NICULAE MANAFI

BAZELE MECANICII APLICATE

PARTEA I-a ÎNTRODUCERE ÎN MECANICĂ

CONȚINUTUL

1. INTRODUCERE

1.1 Obiectul şi diviziunile Mecanicii clasice

Mecanica, în accepţiunea clasică a noţiunii, se defineşte drept ştiinţa care studiază legile generale ale mişcării corpurilor materiale. În contextul ştinţelor inginereşti *mişcarea mecanică*, prin care se înţelege schimbarea în timp a poziţiei unui corp în raport cu un sistem de referinţă, se efectuează cu viteze “naturale”, neglijabile în comparaţie cu viteza de propagare a luminii.

La baza Mecanicii clasice stau noţiunile şi principiile formulate în 1687 de Isaac Newton; din acest motiv ea mai este numită şi *Mecanica newtoniană*. Fără a intra în amănunte se aminteşte existenţa *Mecanicii relativiste*, fundamentată de Albert Einstein, şi a *Mecanicii cuantice*, dezvoltată de fizicieni celebri ai ultimului secol; acestea au însă un alt context teoretic şi aplicativ.

Ca obiect de studiu în învăţământul tehnic, Mecanica este prima dintre disciplinele teoretice generale care familiarizează viitorul specialist cu modelarea matematică a proceselor în care intervine mişcarea mecanică.

Din punct de vedere didactic Mecanica clasică studiată în învăţământul tehnic superior se structurează tradiţional în trei părţi mari, definite foarte succint după cum urmează:

- *Statica* – studiază sistemele de forţe şi condiţiile de echilibru ale corpurilor;
- *Cinematica* – studiază mişcarea corpurilor fără a lua în considerare forţele;
- *Dinamica* – studiază mişcarea corpurilor sub acţiunea forţelor.

Separat de aceste trei părţi se studiază şi o a patra – *Mecanica Analitică*, care completează Mecanica clasică cu principii şi metode noi, într-o tratare globală.

Structurarea pe capitole a fiecărei părţi este proprie fiecărui autor în intenţia unei cât mai bune sistematizări.

1.2 Noţiuni fundamentale şi derivate

În Mecanică se operează cu o mulţime de noţiuni prin care se definesc proprietăţile materiei şi proceselor care se efectuează cu aceasta; mărimile fizice asociate acestor noţiuni caracterizează cantitativ aceste proprietăţi iar între simbolurile prin care sunt nominalizate pot fi stabilite relaţii matematice de interdependenţă.

Noţiunile fundamentale corespund unor proprietăţi obiective generale, perceptibile direct sau experimental; ele sunt ireductibile în sensul că nu pot fi exprimate în funcţie de alte noţiuni predefinite. Spre deosebire de acestea *noţiunile derivate* se pot defini unele în funcţie de altele iar prin reducţie, direct în funcţie de noţiunile fundamentale.

Noţiunile fundamentale sunt următoarele:

- *Spaţiul* – noţiune care corespunde spaţiului fizic propriu-zis în care se pot poziţiona şi dimensiona corpurile materiale. În Mecanica clasică spaţiul este tridimensional, infinit, omogen şi izotrop, proprietăţi care corespund modelului spaţiului euclidian. La nivelul deplasărilor în spaţiul terestru sistemele de referinţă pentru descrierea mişcărilor absolute se aleg în raport cu Pământul.
- *Timpul* – noţiune prin care se indică durata şi succesiunea proceselor materiale. În Mecanica clasică timpul este unidimensional, infinit, omogen şi ireversibil. Pentru orice proces originea timpului se stabileşte arbitrar.
- *Masa* – noţiune care reflectă proprietatea materiei de a fi inertă, respectiv de a-şi conserva starea de mişcare în cazul absenţei sau echilibrului forţelor; în vorbirea curentă se acceptă că masa unui corp măsoară cantitatea de materie conţinută în acesta. Trebuie menţionat că pentru orice corp material care nu îşi modifică starea de agregare în timpul procesului masa rămâne constantă oriunde s-ar face determinarea acesteia.
- *Forţa* – noţiune prin care se exprimă şi se evaluează interacţiunea dintre corpuri.

Noţiunile derivate sunt în număr foarte mare şi vor fi definite pe măsura introducerii lor.

1.3 Modele teoretice utilizate în Mecanică.

Marea diversitate a corpurilor materiale existente în natură a făcut necesară gruparea acestora în baza unor proprietăţi comune cu scopul stabilirii unui număr redus de *modele* teoretice; studiul efectuat asupra unui model trebuie să fie valabil pentru toate corpurile care au proprietăţile acestuia.

Diferitele criterii de departajare au condus la apariţia unor "Mecanici" specifice. De exemplu, diferenţierea corpurilor după starea de agregare a materiei a generat *Mecanica solidelor* şi *Mecanica fluidelor* (lichide sau gazoase). În mod analog se poate vorbi de *Mecanica mediilor continue* (elastice) sau de *Mecanica mediilor discontinue* (granulare), etc.

Prin *mediu continuu* (numit uneori şi *continuum material*) se înţelege un corp în care fiecare element de volum din configuraţia sa, oricât de mic ar fi, posedă masă. Se face abstracţie de discontinuitatea la nivel molecular.

Mediile continue solide pot fi *nedeformabile, elastice* sau *plastice*, după cum predomină una sau alta dintre caracteristicile de deformare ale materialului.

Noţiunea de *corp solid rigid* cu care se operează în Mecanică se referă la un mediu continuu nedeformabil, înţelegând prin aceasta că distanţa între oricare două puncte ale sale este invariabilă. În marea lor majoritate corpurile solide rigide sunt şi *omogene*, densitatea lor fiind constantă pe tot domeniul ocupat de corp.

În Mecanica teoretică se admite că toate corpurile materiale (cu excepţia firelor şi a membranelor) sunt solide rigide, ipoteză adecvată studierii mişcării mecanice a acestora.

Criteriul uzual pentru stabilirea modelelor teoretice se referă la raportul dintre cele trei dimensiuni ale corpului solid rigid (lungimea, lăţimea şi grosimea).

Modelele sunt următoarele:

- *punctul material* – toate cele trei dimensiuni sunt neglijabile; în fapt este vorba de o particulă materială reductibilă la un punct geometric;

- *linia materială* – două dimensiuni (lăţimea şi grosimea) sunt neglijabile faţă de a treia (lungimea); include *bara* (rigidă) şi *firul* (flexibil, inextensibil);

- *suprafaţa materială* – o dimensiune (grosimea) este neglijabilă în raport cu celelalte două; include *placa* (rigidă) şi *membrana* (flexibilă, inextensibilă);

- *volumul material* sau *corpul material* propriu-zis – nici una dintre cele trei dimensiuni nu este neglijabilă.

Trebuie făcută observaţia că în anumite condiţii un corp cu dimensiuni neneglijabile poate fi tratat ca un punct material. Atunci când forţele aplicate corpului sunt concurente în centrul său de masă sau mişcarea lui este o translaţie, el poate fi redus la un punct material având masa corpului şi poziţia centrului său de masă.

În Mecanică se operează şi cu ansambluri de corpuri cu rol funcţional bine determinat, numite sisteme. Se deosebesc:

- *sistemul de puncte materiale* – mulţime finită de puncte materiale aflate în interacţiune mecanică;

- *sistemul de corpuri* – conţine un număr oarecare de corpuri aparţinând diferitelor modele enumerate mai sus, aflate de asemenea în interacţiune mecanică.

1.4 Principiile fundamentale ale Mecanicii

În lucrarea sa devenită celebră *"Principiile matematice ale filozofiei naturale"*, apărută în 1687, Isaac Newton a formulat pentru prima oară într-o formă concisă principiile fundamentale ale Mecanicii pe care, intuindu-le importanţa, le-a denumit legi. Ele provin din observarea directă şi verificarea experimentală a comportării corpurilor în natură. În baza acestor principii însă a putut fi realizată întreaga modelare a proceselor care fac obiectul Mecanicii.

Respectând esenţa formulării newtoniene, aceste legi se pot enunţa astfel:

<u>Legea I</u> (principiul inerţiei): *Orice corp îşi păstrează starea de repaus sau de mişcare rectilinie şi uniformă dacă nu intervin forţe care să modifice această stare.*

<u>Legea II</u> (principiul acţiunii forţei): *Forţa aplicată unui punct material îi imprimă acestuia o acceleraţie proporţională cu mărimea forţei, pe direcţia şi în sensul ei de acţiune.*

<u>Legea III</u> (principiul acţiunii şi reacţiunii): *La orice acţiune corespunde o reacţiune egală şi direct opusă;* sau *acţiunile reciproce a două corpuri sunt egale şi de sens contrar.*

La aceste trei principii Newton a adăugat şi un al patrulea – principiul paralelogramului, conform căruia *acţiunea simultană a două forţe concurente poate fi înlocuită prin cea a unei singure forţe având măriea, direcţia şi sensul diagonalei paralelogramului construit cu cele două forţe drept laturi*. Nu l-a numit însă lege observând probabil că se aplică nu numai forţelor ci şi celorlalte mărimi vectoriale.

Legea II, numită şi legea fundamentală a Dinamicii, are şi o exprimare matematică:

$$m\overline{a} = \overline{F} \tag{1.1}$$

unde intervine şi masa *m* care în Mecanica clasică este constantă.

1.5 Mărimi fizice. Unităţi de măsură.

Noţiunilor fundamentale şi derivate definite mai înainte le sunt asociate *mărimi fizice* prin intermediul cărora acestea pot fi exprimate cantitativ, clasificate, ordonate, comparate. Pentru evaluarea cantitativă a fiecărei mărimi fizice se utilizează câte o *unitate de măsură*.

Între mărimile fizice există legături de interdependenţă descrise prin relaţii matematice, astfel încât unele pot fi deduse în funcţie de altele. Şi în acest caz se pot pune în evidenţă nişte *mărimi fizice fundamentale* care sunt ireductibile la alte mărimi fizice; toate celelalte sunt *mărimi fizice derivate*. Corespunzător acestora există *unităţi de măsură fundamentale* şi respectiv *unităţi de măsură derivate*.

În sistemul internaţional de unităţi de măsură (SI) se consideră drept mărimi fizice fundamentale *lungimea*, *masa*, *timpul*, iar unităţile lor de măsură sunt respectiv *metrul* (*m*), *kilogramul* (*kg*), *secunda* (*s*). Se poate observa că forţa, deşi a fost definită ca noţiune fundamentală, nu este inclusă între mărimile fizice fundamentale; relaţia (1.1) permite exprimarea ei in funcţie de alte mărimi reductibile la acestea.

Legătura între unităţile de măsură derivate şi cele fundamentale o fac *ecuaţiile dimensionale* cu forma generală:

$$[umd] = L^{\alpha} M^{\beta} T^{\gamma} \tag{1.2}$$

unde *L*, *M* şi *T* corespund unităţilor fundamentale arătate mai sus iar α, β şi γ sunt exponenţi pozitivi, negativi sau nuli.

În tabelul 1.1 sunt prezentate mărimile fundamentale şi mărimile derivate principale utilizate în Mecanică*). Este evident că pentru mărimile fizice cu caracter vectorial, unităţile de măsură se referă la scalarul lor, respectiv modulul acestora sau, după caz, la proiecţiile lor. Acele unităţi de măsură care provin din numele unor personalități științifice se notează cu majuscule.

Multiplii şi submultiplii zecimali ai unităţilor de măsură se notează prin prefixe ataşate simbolurilor acestor unităţi (tab.1.2); şi în acest caz se utilizează majuscule pentru simbolurile superioare, respectiv *mega, giga, tera*.

---

*) Se face precizarea că toate notațiile și definirile utilizate în cadrul acestei lucrări sunt în conformitate cu prevederile standardului STAS 1814-64, valabil pe teritoriul României.

Tabelul 1.1

Mărimea	*Notaţia*	*Ecuaţia dimensională*	*Unitatea de măsură*	*Simbol*	*Echiva-lenţa*
lungimea	l	L	*metrul*	m	
masa	m	M	*kilogramul*	kg	
timpul	t	T	*secunda*	s	
aria	A	L^2	*metrul pătrat*	m^2	
volumul	V	L^3	*metrul cub*	m^3	
densitatea	ρ	$L^{-3}M$	*kilogram pe metru cub*	kg/m^3	
momentul de inerţie	J	L^2M	*kilogram metru pătrat*	$kg\ m^2$	
viteza	$\bar{v}$	LT^{-1}	*metrul pe secundă*	m/s	
acceleraţia	$\bar{a}$	LT^{-2}	*metrul pe secundă la pătrat*	m/s^2	
forţa	$\bar{F}$	LMT^{-2}	*Newton*	N	$kg\ m/s^2$
momentul forţei	$\bar{M}_O$	L^2MT^{-2}	*Newton metru*	N m	
impulsul	$\bar{H}$	LMT^{-1}	*kilogram metru pe secundă*	kg m/s	
momentul cinetic	$\bar{K}_O$	L^2MT^{-1}	*kilogram metru pătrat pe secundă*	$kg\ m^2/s$	
percuţia	$\bar{P}$	LMT^{-1}	*Newton secundă*	N s	kg m/s
energia, lucrul mecanic	E, L	L^2MT^{-2}	*Joule*	J	N m
puterea	P	L^2MT^{-3}	*Watt*	W	J/s
presiunea	p	$L^{-1}MT^{-2}$	*Pascal*	Pa	N/m^2
frecvenţa	f	T^{-1}	*Hertz*	Hz	s^{-1}
unghiul plan	$\alpha, \beta, \ldots$	–	*radian*	rad	
viteza unghiulară	$\bar{\omega}$	T^{-1}	*radian pe secundă*	rad/s	s^{-1}
acceleraţia unghiulară	$\bar{\varepsilon}$	T^{-2}	*radian pe secundă la pătrat*	rad/s^2	s^{-2}

Tabelul 1.2

Factor de multiplicare	*Prefix*	*Simbol*	*Factor de multiplicare*	*Prefix*	*Simbol*
10^{12}	*tera*	T	10^{-1}	*deci*	d
10^9	*giga*	G	10^{-2}	*centi*	c
10^6	*mega*	M	10^{-3}	*mili*	m
10^3	*kilo*	k	10^{-6}	*micro*	µ
10^2	*hecto*	h	10^{-9}	*nano*	n
10	*deca*	da	10^{-12}	*pico*	p

2. ELEMENTE DE ALGEBRĂ ŞI ANALIZĂ VECTORIALĂ

În cele ce urmează se intenţionează revederea succintă a principalelor operaţiuni din algebra şi analiza vectorială, strict necesare în tratarea atât teoretică cât şi sub aspect aplicativ a problematicii care face obiectul de studiu al Mecanicii. Se are în vedere o anumită rigurozitate în precizarea unor aspecte de detaliu, necesară în special la elaborarea algoritmelor de calcul programabile.

2.1 Mărimi scalare şi mărimi vectoriale

Pentru caracterizarea unei *mărimi scalare* este suficientă o determinare cantitativă printr-un număr real de unităţi de măsură. Simbolizarea unei mărimi scalare este alfanumerică. Se includ în această categorie *lungimea unui segment* (l), *masa* (m), *timpul* (t), *lucrul mecanic* (L), *energia cinetică* (E) şi *potenţială* (V), *momentul de inerţie mecanic* (J), etc.

Atributele unei *mărimi vectoriale* sunt modulul, direcţia şi sensul de acţiune. În Mecanică, pe lângă simbolizarea cunoscută ($\vec{V}$) se utilizează mai frecvent o simbolizare, devenită tradiţională, constând dintr-o bară aşezată deasupra notaţiei alfanumerice a mărimii respective ($\overline{V}$), neexistând posibilitatea unor confuzii. Câteva exemple de mărimi vectoriale sunt: *forţa* ($\overline{F}$), *momentul forţei* faţă de un punct ($\overline{M}_O$), *vectorul de poziţie* ($\overline{r}$), *viteza* ($\overline{v}$) şi *acceleraţia* ($\overline{a}$) ale unui punct, *viteza unghiulară* ($\overline{\omega}$) şi *acceleraţia unghiulară* ($\overline{\varepsilon}$) ale unui corp, *impulsul* ($\overline{H}$) şi *momentul cinetic* ($\overline{K}_O$), etc. Elementele de grafică caracteristice unui vector oarecare $\overline{a}$ sunt reprezentate în fig. 2.1.

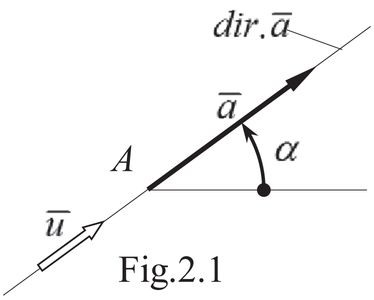

Fig.2.1

Modulul vectorului, notat $|\overline{a}|$, este un scalar pozitiv şi caracterizează dimensional mărimea vectorială respectivă. *Direcţia vectorului* este reprezentată prin dreapta suport coliniară cu vectorul conţinând, evident, şi punctul de aplicaţie A al acestuia; pe această dreaptă sensul pozitiv se atribuie prin versorul $\overline{u}$ ataşat.

Poziţia dreptei suport şi, implicit, cea a vectorului în raport cu o direcţie fixă de referinţă (de obicei axa Ox) se indică prin *unghiul de poziţie* α dintre sensurile pozitive ale acestor direcţii; unghiul de poziţie este un unghi orientat, pozitiv în sens trigonometric. *Sensul* vectorului se raportează la versorul $\overline{u}$; un vector $-\overline{a}$ va avea sens contrar lui $\overline{u}$.

2.2 Definiri grafo-analitice ale vectorilor

Operaţiunile cu mărimi vectoriale pot fi mai uşor urmărite, atât în tratarea teoretică cât şi în aplicaţii, apelând la reprezentări grafice, nefiind obligatorie însă desenarea la scară a vectorilor.

2.2.1 Proiecţia unui vector pe o axă

Se consideră o dreaptă oarecare Δ şi un vector $\overline{a}$ necoplanar cu aceasta (fig. 2.2). Prin punctul A de aplicaţie al vectorului se construieşte dreapta $\Delta_1 \| \Delta$ iar din vârful B se duce $BB' \perp \Delta_1$. Se duc apoi perpendicularele comune AA_1 şi $B'B_1$. Lungimea segmentului A_1B_1, notată a_Δ, reprezintă proiecţia vectorului $\overline{a}$ pe direcţia Δ. Astfel, cu observaţia că $\overline{u}_\Delta = \text{versor}\Delta$ şi $|\overline{u}_\Delta| = 1$, se poate scrie:

$$a_\Delta = \text{pr}_\Delta \overline{a} = |\overline{a}|\cos\alpha = |\overline{a}||\overline{u}_\Delta|\cos\alpha = \overline{a}\cdot\overline{u}_\Delta \tag{2.1}$$

Se remarcă faptul că proiecţia oricărui vector pe o dreaptă este o mărime scalară şi se obţine înmulţind scalar vectorul respectiv cu versorul direcţiei pe care se face proiectarea. Semnul proiecţiei depinde de unghiul de poziţie α al vectorului cu Δ. Astfel, dacă $0 \le \alpha < \pi/2$, $a_\Delta > 0$ iar pentru $\pi/2 < \alpha \le \pi$, $a_\Delta < 0$. Proiecţia este nulă în cazul unui vector perpendicular pe Δ (fig.2.3). Un vector se proiectează în adevărată mărime pe propria lui direcţie de acţiune sau pe o paralelă la aceasta. În acest caz, dacă $\overline{u}$ este versorul direcţiei vectorului, se poate scrie:

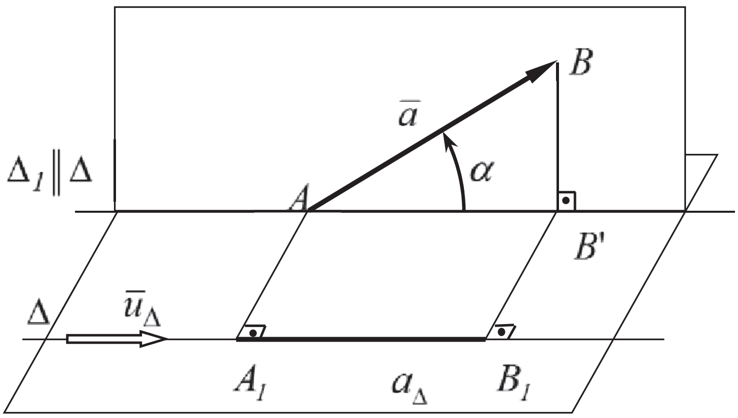

Fig.2.2

$$\overline{a} = a\overline{u} \tag{2.2}$$

deoarece $a = \overline{a}\cdot\overline{u} = a(\overline{u}\cdot\overline{u}) = a\cdot 1$. Proiecţia $a = \pm|\overline{a}|$ este negativă dacă $\overline{a}$ şi $\overline{u}$ au sensuri opuse, respectiv în cazul unui vector $-\overline{a}$.

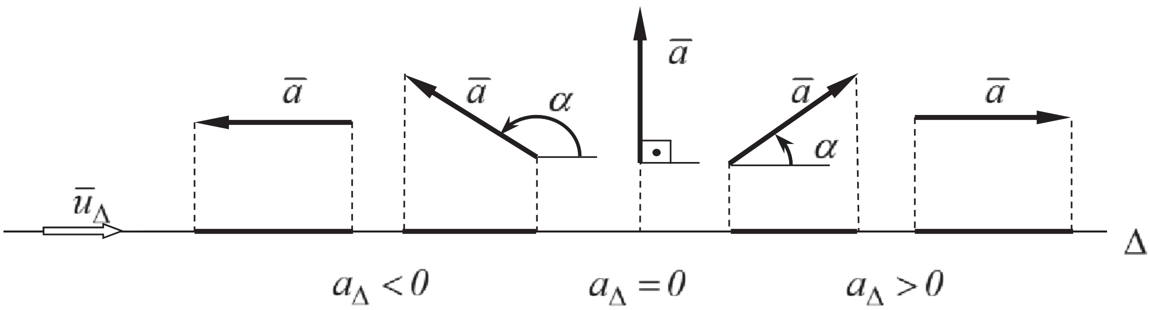

Fig.2.3

2.2.2 Proiecţii pe axele de coordonate

În raport cu un sistem de referinţă cartezian direcţia unui vector este determinată prin unghiurile directoare α, β, γ formate de dreapta suport a vectorului cu axele de coordonate (fig. 2.4).

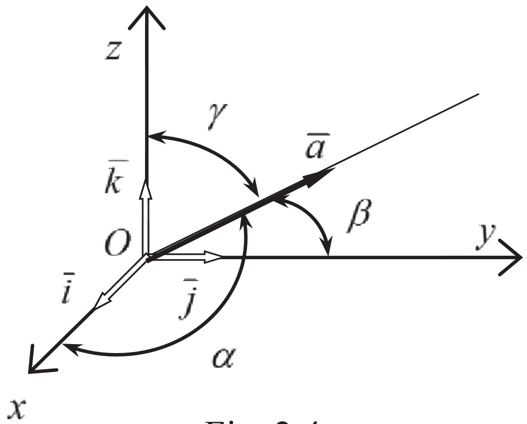

Fig. 2.4

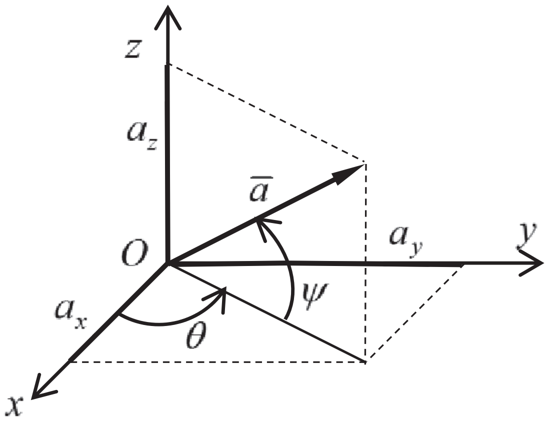

Fig. 2.5

Proiecţiile unui vector $\bar{a}$ pe aceste axe vor fi date de relaţiile:

$$\begin{cases} a_x = \mathrm{pr}_{Ox}\,\bar{a} = \bar{a}\cdot\bar{i} = |\,\bar{a}\,|\cos\alpha \\ a_y = \mathrm{pr}_{Oy}\,\bar{a} = \bar{a}\cdot\bar{j} = |\,\bar{a}\,|\cos\beta \\ a_z = \mathrm{pr}_{Oz}\,\bar{a} = \bar{a}\cdot\bar{k} = |\,\bar{a}\,|\cos\gamma \end{cases} \qquad (2.3)$$

în care $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ sunt versorii axelor de coordonate. Între unghiurile directoare există relaţia:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \qquad (2.4)$$

în baza căreia se poate scrie:

$$|\,\bar{a}\,| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \qquad (2.5)$$

Dacă în locul unghiurilor directoare direcţia vectorului se defineşte prin unghiurile θ şi ψ (fig.2.5), proiecţiile vectorului $\bar{a}$ pe axele de coordonate se pot calcula cu relaţiile:

$$\begin{cases} a_x = |\,\bar{a}\,|\cos\psi\,\cos\theta \\ a_y = |\,\bar{a}\,|\cos\psi\,\sin\theta \\ a_z = |\,\bar{a}\,|\sin\psi \end{cases} \qquad (2.6)$$

2.2.3 Expresia analitică a unui vector

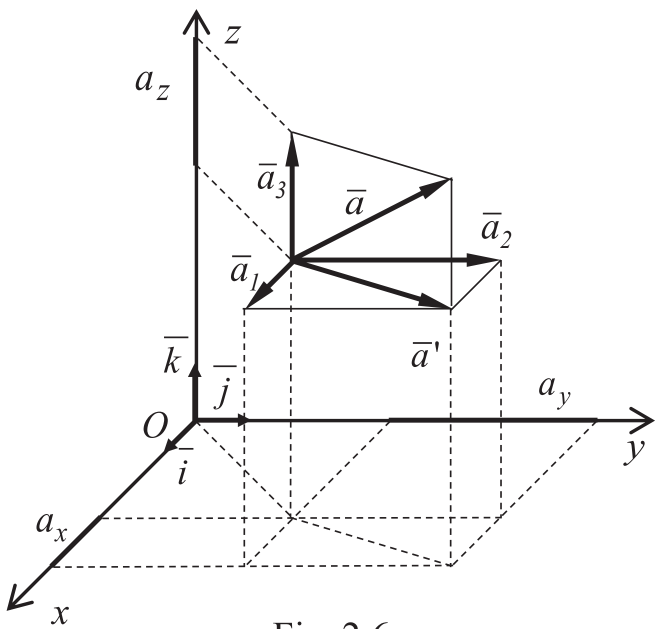

Fig. 2.6

Un vector oarecare poate fi descompus după trei direcţii care nu sunt coplanare. În fig. 2.6 este ilustrată situaţia în care aceste direcţii sunt paralele cu axele de coordonate. În baza regulii paralelogramului se poate scrie:

$$\bar{a} = \bar{a}' + \bar{a}_3 = \bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \bar{a}_3 \qquad (2.7)$$

Vectorii $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ reprezintă *componentele* vectorului $\bar{a}$ după direcţiile axelor de coordonate. Aceste componente se proiectează fiecare pe câte o axă în adevărată mărime, ceea ce rezultă fiind tocmai a_x, a_y, a_z, respectiv *proiecţiile* vectorului $\bar{a}$.

Legătura între proiecţii şi componente se face prin intermediul versorilor $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$, în baza relaţiei (2.2):

$$\bar{a}_1 = a_x \bar{i} \quad \bar{a}_2 = a_y \bar{j} \quad \bar{a}_3 = a_z \bar{k} \tag{2.7'}$$

Înlocuind în (2.7) se obţine:

$$\bar{a} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k} \tag{2.8}$$

relaţie care defineşte analitic vectorul $\bar{a}$. Înlocuind în cele de mai sus vectorul $\bar{a}$ prin versorul $\bar{u}$ se constată cu uşurinţă că proiecţiile pe axe ale versorului sunt tocmai cosinusurile sale directoare:

$$\bar{u} = \cos\alpha\, \bar{i} + \cos\beta\, \bar{j} + \cos\gamma\, \bar{k} \tag{2.9}$$

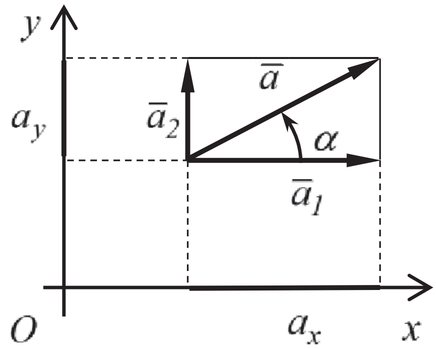

Fig. 2.7

Dacă un vector este conţinut într-un plan, de exemplu în *xOy* (fig. 2.7), atunci $a_z = 0$ şi relaţiile de mai sus iau forma simplificată

$$a_x = |\bar{a}|\cos\alpha \qquad a_y = |\bar{a}|\sin\alpha \tag{2.10}$$

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \tag{2.11}$$

$$\bar{a} = \bar{a}_1 + \bar{a}_2 = a_x \bar{i} + a_y \bar{j} \tag{2.12}$$

Menţionăm că relaţiile (2.3), (2.6) şi (2.10) mai pot fi scrise înlocuind $|\bar{a}|$ prin proiecţia *a*. O astfel de scriere a proiecţiilor este necesară atunci când pentru acel vector este cunoscută numai direcţia de acţiune, mărimea şi sensul urmând să rezulte din calcule. O valoare negativă pentru *a* arată că sensul de acţiune al vectorului este invers celui considerat iniţial.

2.3 Operaţiuni elementare cu vectori concurenţi

În cazul unor vectori concurenţi reprezentând mărimi fizice de aceeaşi natură (ca de exemplu un sistem de forţe acţionând simultan asupra unui punct material) se pune problema reducerii acestora, respectiv a găsirii unui singur vector rezultant, echivalent ca efect sistemului de vectori dat. Se determină atributelor vectorului rezultant, respectiv modulul, direcţia şi sensul acestuia.

Suma $\bar{c} = \bar{a} + \bar{b}$ urmează *regula paralelogramului* (fig. 2.8) conform căreia vectorul rezultant are mărimea şi direcţia diagonalei paralelogramului construit cu cei doi vectori ca laturi. Este uşor de constatat geometric că:

$$\begin{cases} |\bar{c}| = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos(\alpha - \beta)} \\ \mathrm{tg}\,\gamma = \dfrac{a\sin\alpha + b\sin\beta}{a\cos\alpha + b\cos\beta} \end{cases} \tag{2.13}$$

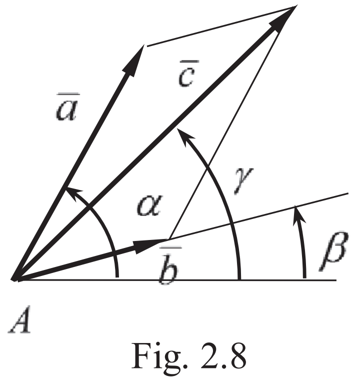

Fig. 2.8

Diferenţa $\bar{c} = \bar{a} - \bar{b} = \bar{a} + (-\bar{b})$ urmează aceeaşi regulă (fig. 2.9), relaţiile de calcul devenind:

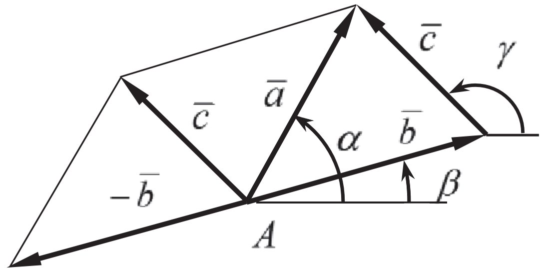

Fig. 2.9

$$\begin{cases} |\,\overline{c}\,| = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos(\alpha - \beta)} \\ \operatorname{tg}\gamma = \dfrac{a\sin\alpha - b\sin\beta}{a\cos\alpha - b\cos\beta} \end{cases} \tag{2.14}$$

Vectorul $\overline{c}$ poate fi reprezentat şi prin unirea vârfurilor vectorilor $\overline{a}$ şi $\overline{b}$ în modul arătat în fig. 2.9.

În cazul unui sistem format din mai mult de doi vectori, pentru găsirea rezultantei se poate aplica succesiv regula paralelogramului. Mai eficientă este în acest caz *regula poligonului* care constă în construirea unei linii poligonale (plană sau tridimensională) ale cărei laturi sunt construite din vectori paraleli şi egali cu cei ai sistemului dat; vectorul rezultant uneşte punctul de aplicaţie al primului vector al poligonului cu vârful ultimului. În fig.2.10 s-a exemplificat metoda pentru cazul a trei vectori coplanari.

În cazul a n vectori concurenţi vectorul rezultant este:

$$\overline{R} = \overline{a}_1 + \overline{a}_2 + \ldots + \overline{a}_n = \sum_{i=1}^{n} \overline{a}_i \tag{2.15}$$

Se înmulţeşte scalar această relaţie cu $\overline{u}_\Delta$ – versorul unei axe Δ oarecare:

$$\overline{R}\cdot\overline{u}_\Delta = \overline{a}_1\cdot\overline{u}_\Delta + \overline{a}_2\cdot\overline{u}_\Delta + \ldots + \overline{a}_n\cdot\overline{u}_\Delta = \sum_{i=1}^{n}\left(\overline{a}_i\cdot\overline{u}_\Delta\right)$$

În baza relaţiei (2.1) se poate scrie:

$$\mathrm{pr}_\Delta\,\overline{R} = \mathrm{pr}_\Delta\,\overline{a}_1 + \mathrm{pr}_\Delta\,\overline{a}_2 + \ldots + \mathrm{pr}_\Delta\,\overline{a}_n = \sum_{i=1}^{n}\mathrm{pr}_\Delta\,\overline{a}_i \tag{2.16}$$

Această relaţie exprimă *teorema proiecţiilor* care se enunţă astfel: *proiecţia pe o axă a rezultantei unui sistem de vectori concurenţi este egală cu suma proiecţiilor acestor vectori pe axa respectivă*.

Aplicând această teoremă relativ la axele de coordonate se obţine:

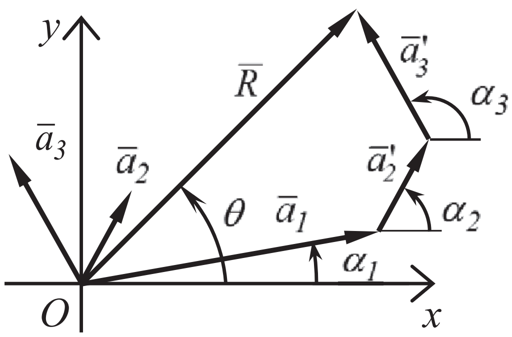

Fig. 2.10

$$\begin{cases} X = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ix} = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i\cos\alpha_i \\ Y = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{iy} = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i\cos\beta_i \\ Z = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{iz} = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i\cos\gamma_i \end{cases} \tag{2.17}$$

Vectorul rezultantei:

$$\overline{R} = X\overline{i} + Y\overline{j} + Z\overline{k} \tag{2.18}$$

are modulul şi unghiurile directoare date de relaţiile:

$$|\,\overline{R}\,| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \tag{2.19}$$

$$\cos\alpha_R = \frac{X}{|\,\overline{R}\,|} \qquad \cos\beta_R = \frac{Y}{|\,\overline{R}\,|} \qquad \cos\gamma_R = \frac{Z}{|\,\overline{R}\,|} \tag{2.20}$$

Pentru sistemul de vectori coplanari din fig. 2.10:

$$X=\sum_{i=1}^{n} a_i \cos\alpha_i \qquad Y=\sum_{i=1}^{n} a_i \sin\alpha_i \tag{2.21}$$

iar pentru vectorul rezultant se poate scrie:

$$\overline{R}=X\overline{i}+Y\overline{j} \qquad \left|\overline{R}\right|=\sqrt{X^2+Y^2} \qquad \mathrm{tg}\theta=\frac{Y}{X} \tag{2.22}$$

2.4 Înmulţiri vectoriale

2.4.1 Înmulţirea unui vector cu un scalar

Prin înmulţirea unui vector cu un scalar se obţine un vector coliniar cu acesta (fig.2.11):

$$\overline{b}=\lambda\,\overline{a} \tag{2.23}$$

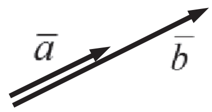

Fig. 2.11

Dacă $\overline{a}$ şi $\overline{b}$ reprezintă mărimi având aceeaşi natură fizică, de exemplu două forţe, atunci scalarul λ este un factor de amplificare adimensional; dacă sunt diferite, de exemplu o forţă şi un moment, atunci λ este un factor de transformare a cărui unitate de măsură depinde de natura mărimilor respective. Dacă λ < 0, atunci $\overline{a}$ şi $\overline{b}$ au sensuri opuse. Cu exprimările analitice:

$$\overline{a}=a_x\overline{i}+a_y\overline{j}+a_z\overline{k} \qquad \overline{b}=b_x\overline{i}+b_y\overline{j}+b_z\overline{k} \tag{2.24}$$

este evidentă relaţia:

$$\lambda=\frac{b_x}{a_x}=\frac{b_y}{a_y}=\frac{b_z}{a_z} \tag{2.25}$$

care exprimă faptul că între proiecţiile pe axe ale vectorilor coliniari există acelaşi raport de proporţionalitate. Această observaţie va fi necesară în Statică la stabilirea ecuaţiei axei centrale a unui sistem de forţe paralele. Relaţia (2.2) confirmă totodată şi legătura dintre un vector şi versorul direcţiei pe care se află.

2.4.2 Produsul scalar

Înmulţirea scalară dintre doi vectori $\overline{a}$ şi $\overline{b}$ se exprimă prin relaţia:

$$s=\overline{a}\cdot\overline{b}=\left|\overline{a}\right|\left|\overline{b}\right|\cos\alpha \tag{2.26}$$

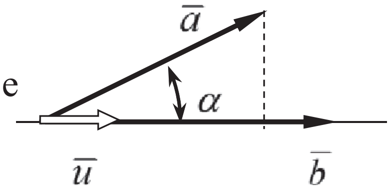

Fig. 2.12

în care $\alpha\in(0,\pi)$ este unghiul dintere cei doi vectori (fig.2.12). Pentru $\overline{b}=b\overline{u}$, unde $\overline{u}=\mathrm{versor}\overline{b}$, produsul scalar ia forma:

$$s=\overline{a}\cdot b\overline{u}=b(\overline{a}\cdot\overline{u})=b\cdot \mathrm{pr}_{\overline{b}}\,\overline{a} \tag{2.27}$$

Produsul scalar este comutativ şi distributiv faţă de adunare, respectiv:

$$\overline{a}\cdot\overline{b}=\overline{b}\cdot\overline{a} \qquad (\overline{a}+\overline{b})\cdot\overline{c}=\overline{a}\cdot\overline{c}+\overline{b}\cdot\overline{c} \tag{2.28}$$

Produsul scalar este nul dacă cei doi vectori sunt perpendiculari unul pe celălalt.

Înmulţind scalar un vector cu el însuşi se obţine:

$$\bar{a}\cdot\bar{a}=|\,\bar{a}\,|^2=a^2 \qquad (2.29)$$

Cu aceste observaţii produsele scalare dintre versorii axelor de coordonate vor avea valorile următoare:

$$\begin{array}{lll} \bar{i}\cdot\bar{i}=1 & \bar{j}\cdot\bar{j}=1 & \bar{k}\cdot\bar{k}=1 \\ \bar{i}\cdot\bar{j}=0 & \bar{j}\cdot\bar{k}=0 & \bar{k}\cdot\bar{i}=0 \end{array} \qquad (2.30)$$

Dacă vectori sunt exprimaţi analitic, atunci înmulţirea scalară ia forma

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=(a_x\bar{i}+a_y\bar{j}+a_z\bar{k})\cdot(b_x\bar{i}+b_y\bar{j}+b_z\bar{k})=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z \qquad (2.31)$$

Vom întâlni produsul scalar în Statică la reducerea sistemelor de forţe şi în Dinamică la calculul lucrului mecanic al unei forţe.

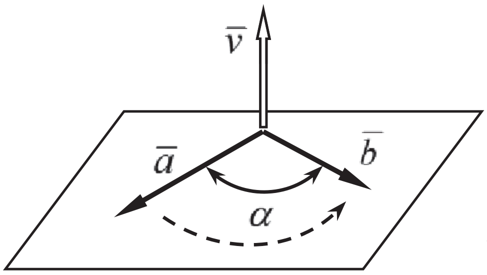

Fig. 2.13

2.4.3 Produsul vectorial

Considerând aceiaşi vectori $\bar{a}$ şi $\bar{b}$ (fig. 2.13), produsul vectorial se exprimă prin relaţia:

$$\bar{v}=\bar{a}\times\bar{b} \qquad (2.32)$$

Vectorul rezultant are modulul:

$$|\,\bar{v}\,|=|\,\bar{a}\,||\,\bar{b}\,|\sin\alpha \qquad (2.33)$$

Direcţia acestui vector este perpendiculară pe direcţiile vectorilor $\bar{a}$ şi $\bar{b}$, deci pe planul în care sunt conţinuţi aceştia. Sensul vectorului $\bar{v}$ se determină aplicând regula şurubului drept. Astfel, un şurub drept rotit în sensul de la $\bar{a}$ către $\bar{b}$, acoperind unghiul α, va avansa în sensul lui $\bar{v}$.

Produsul vectorial nu este comutativ:

$$\bar{b}\times\bar{a}=-(\bar{a}\times\bar{b})=-\bar{v} \qquad (2.34)$$

Produsul este distributiv faţă de adunare, respectiv:

$$(\bar{a}+\bar{b})\times\bar{c}=\bar{a}\times\bar{c}+\bar{b}\times\bar{c} \qquad (2.35)$$

Un scalar care înmulţeşte un produs vectorial poate fi ataşat oricăruia dintre cei doi vectori:

$$\lambda(\bar{a}\times\bar{b})=\lambda\bar{a}\times\bar{b}=\bar{a}\times\lambda\bar{b} \qquad (2.36)$$

Rezultatul înmulţirii unui vector cu el însuşi este nul:

$$\bar{a}\times\bar{a}=0 \qquad (2.37)$$

Produsele dintre versori vor avea următoarele rezultate:

$$\begin{array}{lll} \bar{i}\times\bar{i}=0 & \bar{i}\times\bar{j}=\bar{k} & \bar{i}\times\bar{k}=-\bar{j} \\ \bar{j}\times\bar{i}=-\bar{k} & \bar{j}\times\bar{j}=0 & \bar{j}\times\bar{k}=\bar{i} \\ \bar{k}\times\bar{i}=\bar{j} & \bar{k}\times\bar{j}=-\bar{i} & \bar{k}\times\bar{k}=0 \end{array} \qquad (2.38)$$

Dacă $\bar{a}$ şi $\bar{b}$ sunt exprimaţi analitic, atunci:

$$\begin{aligned} \bar{v}&=(a_x\bar{i}+a_y\bar{j}+a_z\bar{k})\times(b_x\bar{i}+b_y\bar{j}+b_z\bar{k})= \\ &=(a_yb_z-a_zb_y)\bar{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\bar{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\bar{k} \end{aligned} \qquad (2.39)$$

Se verifică uşor că aceste relaţii reprezintă dezvoltarea unui determinant:

$$\overline{v}=\overline{a}\times\overline{b}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix} \tag{2.40}$$

după versorii din prima linie. Vom întâlni produsul vectorial în Statică la calculul momentului unei forţe în raport cu un punct, în Cinematică la calculul vitezei şi acceleraţiei în mişcarea de rotaţie, în Dinamică la calculul momentului cinetic.

2.4.4 Produsul mixt

Cu trei vectori $\overline{a},\overline{b}$ şi $\overline{c}$ se poate forma un produs mixt de forma:

$$s=(\overline{a}\times\overline{b})\cdot\overline{c} \tag{2.41}$$

având ca rezultat o mărime scalară. Acest produs nu este comutativ, astfel că rocada între doi dintre vectorii produsului modifică semnul rezultatului:

$$(\overline{a}\times\overline{b})\cdot\overline{c}=-(\overline{b}\times\overline{a})\cdot\overline{c}=-(\overline{c}\times\overline{b})\cdot\overline{a}=-(\overline{a}\times\overline{c})\cdot\overline{b}\quad \text{etc.} \tag{2.42}$$

Un produs mixt este nul dacă cei trei vectori sunt coplanari. Astfel:

$$(\overline{a}\times\overline{b})\cdot\overline{c}=\overline{v}\cdot\overline{c}=0 \tag{2.43}$$

deoarece $\overline{v}$ este perpendicular pe planul vectorilor $\overline{a}$ şi $\overline{b}$ şi deci şi pe $\overline{c}$. Produsul mixt mai este nul dacă doi dintre vectori sunt coliniari sau paraleli; considerând, de exemplu, coliniari vectorii $\overline{a}$ şi $\overline{c}$ se poate scrie $\overline{c}=\lambda\overline{a}$ şi, ţinând cont de (2.37), va rezulta:

$$(\overline{a}\times\overline{b})\cdot\overline{c}=\lambda(\overline{a}\times\overline{b})\cdot\overline{a}=-\lambda(\overline{a}\times\overline{a})\cdot\overline{b}=0 \tag{2.44}$$

Dacă $\overline{a}$, $\overline{b}$ şi $\overline{c}$ sunt exprimaţi analitic, produsul mixt se poate pune sub forma unui determinant:

$$s=(\overline{a}\times\overline{b})\cdot\overline{c}=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix} \tag{2.45}$$

Rezultatul produsului mixt va fi egal cu valoarea determinantului.

Vom întâlni produsul mixt în Statică la calculul momentelor faţă de axe precum şi în unele demonstraţii.

2.4.5 Produsul vectorial dublu

Cu vectorii $\overline{a}$, $\overline{b}$ şi $\overline{c}$ se poate forma un produs vectorial dublu de forma:

$$\overline{v}=\overline{a}\times(\overline{b}\times\overline{c}) \tag{2.46}$$

având ca rezultat un vector. Acest produs mai poate fi pus şi sub forma:

$$\overline{v}=\overline{b}(\overline{a}\cdot\overline{c})-\overline{c}(\overline{a}\cdot\overline{b}) \tag{2.47}$$

Produsul dublu vectorial se utilizează în Cinematică la calculul acceleraţiilor unui solid rigid.

2.5 Noţiuni de bază în analiza vectorială

Operaţiunile de bază din analiza vectorială sunt pe de o parte *derivarea* şi *diferenţierea* mărimilor vectoriale, precum şi operaţiunea inversă – *integrarea*, respectiv găsirea funcţiei vectoriale când se cunosc derivatele acesteia.

Regulile după care se fac aceste operaţiuni sunt asemănătoare celor întâlnite la funcţiile scalare; sunt necesare unele precizări legate de operaţiunile cu vectori descrise în paragraful precedent.

2.5.1 Derivata şi diferenţiala unei funcţii vectoriale

Se consideră funcţia vectorială $\bar{v} = \bar{v}(t)$ având ca variabilă scalară independentă parametrul t. În marea lor majoritate variaţiile mărimilor vectoriale ale Mecanicii sunt în raport cu timpul astfel că simbolul considerat pentru exemplificare nu este ales întâmplător.

Dacă funcţia $\bar{v}(t)$ este continuă şi netedă pe un interval cuprins între t şi $t + \Delta t$, derivata vectorului în raport cu t se defineşte prin relaţia:

$$\bar{v}' = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\bar{v}(t + \Delta t) - \bar{v}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t} = \frac{d\bar{v}}{dt} \tag{2.48}$$

Prin $\Delta \bar{v}$ s-a notat variaţia finită a vectorului $\bar{v}$ corespunzătoare intervalului respectiv. Dacă şi funcţia $\bar{v}' = \bar{v}'(t)$ este continuă şi netedă pe acelaşi interval se defineşte asemănător şi cea de a doua derivată a vectorului $\bar{v}$. Astfel:

$$\bar{v}'' = \frac{d}{dt}(\bar{v}') = \frac{d^2\bar{v}}{dt^2} \tag{2.49}$$

În Mecanică se utilizează în general derivate până la ordinul II.

Dacă parametrul în raport cu care se face derivarea este timpul, atunci se obişnuieşte o marcare specifică a derivatelor:

$$\dot{\bar{v}} = \frac{d\bar{v}}{dt} \qquad \ddot{\bar{v}} = \frac{d}{dt}(\dot{\bar{v}}) = \frac{d^2\bar{v}}{dt^2} \tag{2.50}$$

Aceeaşi marcare se aplică şi derivatelor mărimilor scalare, de exemplu $\dot{s}, \ddot{s}$, etc.

Presupunând că funcţia vectorială $\bar{v}$ este dependentă de *t* printr-o variabilă scalară intermediară, $\bar{v} = \bar{v}(\theta)$ şi $\theta = \theta(t)$, derivata în raport cu *t* urmează regula de la funcţiile scalare

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d\bar{v}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\bar{v}}{d\theta}\dot{\theta} \tag{2.51}$$

Dacă vectorul $\bar{v}$ se raportează la un sistem de referinţă fix, de exemplu *Oxyz*, în expresia analitică

$$\bar{v} = v_x\bar{i} + v_y\bar{j} + v_z\bar{k} \tag{2.52}$$

versorii $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ sunt constanţi şi derivare se aplică proiecţiilor pe axe:

$$\begin{cases} \dfrac{d\bar{v}}{dt} = \dfrac{dv_x}{dt}\bar{i} + \dfrac{dv_y}{dt}\bar{j} + \dfrac{dv_z}{dt}\bar{k} \\ \dfrac{d^2\bar{v}}{dt^2} = \dfrac{d^2v_x}{dt^2}\bar{i} + \dfrac{d^2v_y}{dt^2}\bar{j} + \dfrac{d^2v_z}{dt^2}\bar{k} \end{cases} \quad (2.53)$$

Cazul în care versorii $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ aparţin unui sistem de referinţă mobil, fiind prin urmare variabili în timp ca direcţie, va fi tratat separat în partea de Cinematică.

Variaţia finită $\Delta\bar{v}$ a vectorului $\bar{v}$, corespunzătoare unei variaţii Δt a variabilei independente se poate scrie în funcţie de variaţiile proiecţiilor:

$$\Delta\bar{v} = \Delta v_x\bar{i} + \Delta v_y\bar{j} + \Delta v_z\bar{k} \quad (2.54)$$

Variaţia infinitezimală, respectiv *diferenţiala* vectorului $\bar{v}$, corespunzătoare unei variaţii infinitezimale dt, se exprimă printr-o relaţie asemănătoare:

$$d\bar{v} = dv_x\bar{i} + dv_y\bar{j} + dv_z\bar{k} \quad (2.55)$$

Dacă vectorul $\bar{v}$ este o funcţie de două variabile scalare independente, respectiv:

$$\bar{v} = \bar{v}(m,t) = v_x(m,t)\bar{i} + v_y(m,t)\bar{j} + v_z(m,t)\bar{k} \quad (2.56)$$

şi sistemul de referinţă este fix, se pot calcula derivatele parţiale de ordinul I:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\bar{v}}{\partial m} = \dfrac{\partial v_x}{\partial m}\bar{i} + \dfrac{\partial v_y}{\partial m}\bar{j} + \dfrac{\partial v_z}{\partial m}\bar{k} \\ \dfrac{\partial\bar{v}}{\partial t} = \dfrac{\partial v_x}{\partial t}\bar{i} + \dfrac{\partial v_y}{\partial t}\bar{j} + \dfrac{\partial v_z}{\partial t}\bar{k} \end{cases} \quad (2.57)$$

În mod analog se calculează şi derivatele de ordin superior. Diferenţiala totală a vectorului, corespunzătoare variaţiilor infinitezimale dm şi dt, are forma:

$$d\bar{v} = \frac{\partial\bar{v}}{\partial m}dm + \frac{\partial\bar{v}}{\partial t}dt \quad (2.58)$$

În acelaşi mod se obţin derivatele parţiale şi diferenţiala unui vector funcţie de mai multe variabile scalare independente, necesare în Mecanica analitică.

2.5.2 Interpretări geometrice

În sistemul de referinţă *Oxyz* din fig. 2.14 vârful vectorului $\bar{v} = \bar{v}(t)$ va descrie o curbă (*C*) în spaţiu. Între momentele t şi $t + \Delta t$ variaţia $\Delta\bar{v}$ va uni vârfurile vectorilor corespunzători celor două momente, respectiv punctele *M* şi M_1. La limită, când $\Delta t \to 0$, punctul M_1 tinde către *M* iar dreapta MM_1 va deveni tangenta la curba (*C*) în *M*. Vectorul derivatei $\bar{v}'$, definit prin relaţia (2.48), va avea deci direcţia tangentei la această curbă şi sensul în concordanţă cu deplasarea vârfului vectorului pe curbă. În fig. 2.15 este reprezentată situaţia frecventă în care curba (*C*) şi vectorul $\bar{v}$ sunt coplanare în planul *xOy*.

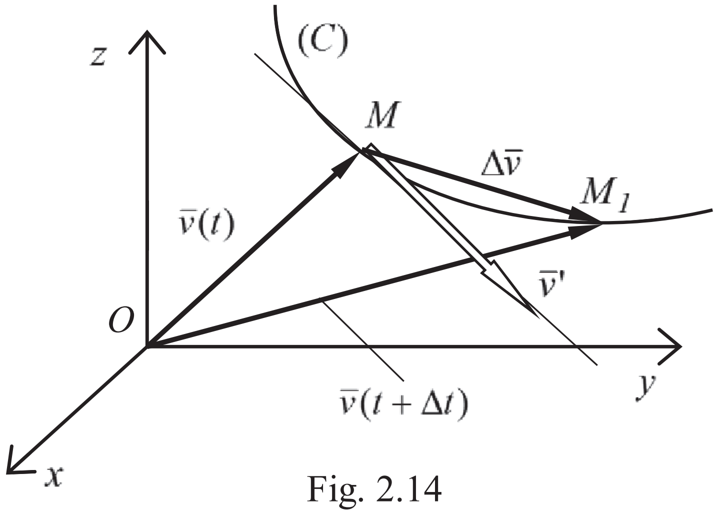

Fig. 2.14

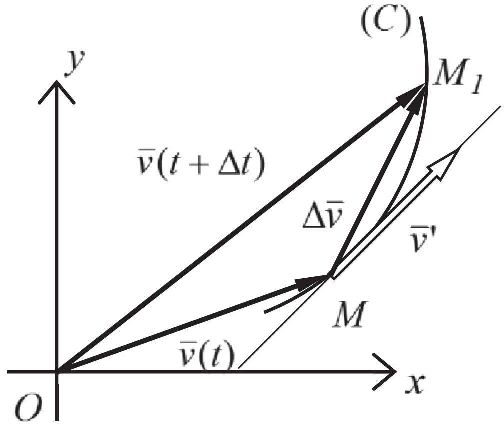

Fig. 2.15

2.5.3 Reguli de derivare vectorială

Regulile de derivare în cadrul unor operaţiuni cu vectori sunt analoge celor efectuate cu mărimi scalare. În relaţiile (2.59) sunt grupate cele mai frecvente operaţiuni de derivare în raport cu variabila t întâlnite în Mecanică.

$$\frac{d}{dt}(\bar{a}+\bar{b})=\frac{d\bar{a}}{dt}+\frac{d\bar{b}}{dt} \qquad \frac{d}{dt}(\lambda\bar{a})=\frac{d\lambda}{dt}\bar{a}+\lambda\frac{d\bar{a}}{dt}$$
$$\frac{d}{dt}(\bar{a}\cdot\bar{b})=\frac{d\bar{a}}{dt}\cdot\bar{b}+\bar{a}\cdot\frac{d\bar{b}}{dt} \qquad \frac{d}{dt}(\bar{a}\times\bar{b})=\frac{d\bar{a}}{dt}\times\bar{b}+\bar{a}\times\frac{d\bar{b}}{dt}$$
$$\frac{d}{dt}[(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}]=\left(\frac{d\bar{a}}{dt}\times\bar{b}\right)\cdot\bar{c}+\left(\bar{a}\times\frac{d\bar{b}}{dt}\right)\cdot\bar{c}+(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\frac{d\bar{c}}{dt} \tag{2.59}$$
$$\frac{d}{dt}[\bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c})]=\frac{d\bar{a}}{dt}\times\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)+\bar{a}\times\left(\frac{d\bar{b}}{dt}\times\bar{c}\right)+\bar{a}\times\left(\bar{b}\times\frac{d\bar{c}}{dt}\right)$$

Regulile de diferenţiere sunt analoge acestora, relaţiile uzuale obţinându-se prin suprimarea termenului dt.

2.5.4 Integrarea funcţiilor vectoriale

Integrala nedefinită a funcţiei vectoriale $\bar{v}=\bar{v}(t)$ se exprimă prin relaţia:

$$\int\bar{v}dt=\bar{V}+\bar{C} \tag{2.60}$$

în care $\bar{V}=\bar{V}(t)$ este funcţia primitivă de determinat iar $\bar{C}$ este o constantă vectorială de integrare a cărei expresie se calculează în funcţie de condiţiile concrete impuse.

Dacă funcţia $\bar{v}(t)$ este integrabilă pe un interval cuprins între momentele t_1 şi t_2, *integrala definită* a acestei funcţii va fi:

$$\int_{t_1}^{t_2}\bar{v}dt=\bar{V}(t_2)-\bar{V}(t_1) \tag{2.61}$$

Considerând pentru vectorii $\bar{v}$, $\bar{V}$ şi $\bar{C}$ exprimări analitice corespunzătoare, integrala nedefinită (2.60) devine:

$$\begin{aligned}\int(v_x\bar{i}+v_y\bar{j}+v_z\bar{k})\,dt=\bar{i}\int v_x dt+\bar{j}\int v_y dt+\bar{k}\int v_z\bar{k}=\\ =V_x\bar{i}+V_y\bar{j}+V_z\bar{k}+C_x\bar{i}+C_y\bar{j}+C_z\bar{k}\end{aligned} \tag{2.62}$$

Rezultă relaţiile scalare:

$$\int v_x dt=V_x+C_x \qquad \int v_y dt=V_y+C_y \qquad \int v_z dt=V_z+C_z \tag{2.63}$$

În acelaşi mod se deduc şi relaţiile scalare provenite din integrala definită (2.61):

$$\begin{cases}\int_{t_1}^{t_2} v_x dt=V_x(t_2)-V_x(t_1)\\ \int_{t_1}^{t_2} v_y dt=V_y(t_2)-V_y(t_1)\\ \int_{t_1}^{t_2} v_z dt=V_z(t_2)-V_z(t_1)\end{cases} \tag{2.64}$$

În cazul unei funcţii vectoriale de două variabile independente $\bar{v}=\bar{v}(m,t)$ integrarea se poate efectua în raport cu oricare dintre acestea, cealaltă comportându-se ca o constantă.

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{(m)}\bar{v}dm\right)=\int_{(m)}\left(\frac{\partial\bar{v}}{\partial t}\right)dm \tag{2.65}$$

Operaţiunea de derivare în raport cu t este independentă faţă de integrarea în raport cu variabila m. Relaţia aceasta este utilă în Dinamica solidului rigid relativ la teorele generale.

2.5.5 Reguli de integrare vectorială

Făcând abstracţie de constantele de integrare, relativ la operaţiunile cu vectori se pot menţiona unele reguli de integrare, după cum urmează:

$$\begin{aligned}&\int(\bar{a}+\bar{b})\,dt=\int\bar{a}\,dt+\int\bar{b}\,dt\\ &\int\lambda\bar{a}\,dt=\lambda\int\bar{a}\,dt \qquad (\lambda=const.)\\ &\int(\bar{a}\cdot\bar{b})\,dt=\int(a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z)\,dt\\ &\left.\begin{aligned}&\int(\bar{C}\cdot\bar{v})\,dt=\bar{C}\cdot\int\bar{v}\,dt\\ &\int(\bar{C}\times\bar{v})\,dt=\bar{C}\times\int\bar{v}\,dt\end{aligned}\right\}\quad(\bar{C}=vector\ constant)\\ &\int_{t_1}^{t_3}\bar{v}\,dt=\int_{t_1}^{t_2}\bar{v}\,dt+\int_{t_2}^{t_3}\bar{v}\,dt \quad (t_1<t_2<t_3)\end{aligned} \tag{2.66}$$

Pentru integrarea unui singur vector relaţiile (2.63) şi (2.64) "transferă" operaţiunile la nivelul proiecţiilor, fiind valabile regulile generale de integrare ale mărimilor scalare.

2.6 Relaţii matriceale între vectori

2.6.1 Generalităţi

Din Analiza Matriceală se vor pune în evidenţă numai acele aspecte care sunt strict necesare operaţiunilor cu vectori din Mecanică.

Prin definiţie, o matrice este un sistem de date, numite elemente, dispuse într-un tabel dreptunghiular care are un anumit număr de linii şi coloane.

În cadrul prezentei lucrări se introduc câteva convenţii de notare şi reprezentare, considerate mai adecvate în context. Astfel, se convine ca o matrice oarecare $\mathbf{a}\{m,n\}$ să se simbolizeze prin caractere îngroşate – "**bold**". Valorile dintre acolade, date opţional şi în această ordine, indică prin *m* numărul de linii iar prin *n* numărul de coloane al matricei. O matrice la care una dintre dimensiuni, *m* sau *n*, este egală cu 1 se numeşte tot *vector*; corespondenţa nefiind, după cum se va vedea, întâmplătoare. În general, elementele matricei se notează prin aceleaşi caractere ca şi matricea, însă neîngroşate, însoţite de indici de poziţionare fie în cadrul matricei, fie în sistemul de referinţă utilizat.

Pentru reprezentarea detaliată a configuraţiei unei matrice, încadrarea elementelor acesteia se va face prin paranteze pătrate. Determinantul unei matrice are o configuraţie identică cu aceasta, încadrarea făcându-se însă prin bare verticale. Pentru cazul frecvent în care $m = n = 3$ se utilizeaza formele:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad (2.67) \qquad \mathrm{Det}(\mathbf{a}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (2.68)$$

Câteva din operaţiunile cu matrice sunt reamintite în cele ce urmează.

Prin transpunerea unei matrice liniile acesteia devin coloane iar coloanele devin linii; matricea transpusă se notează prin $\mathbf{a_t}\{n,m\}$. La nivel de elemente $a_{i,j}$ devine $a_{j,i}$.în care $i = 1 \ldots m, j = 1 \ldots n$ sunt indici de poziţionare în matrice. Este evident că printr-o dublă transpunere se revine la matricea iniţială.

Două matrice se pot însuma dacă au aceeaşi configuraţie. Astfel:

$$\mathbf{a}\{m,n\} + \mathbf{b}\{m,n\} = \mathbf{c}\{m,n\} \tag{2.69}$$

Elementele matricei rezultante se obţin prin însumarea elementelor de acelaşi rang ale matricelor care se însumează.

$$a_{i,j} + b_{i,j} = c_{i,j} \tag{2.70}$$

Înmulţirea a două matrice este posibilă dacă numărul de coloane al celei dintâi este egal cu numărul de linii al celei de a doua.

$$\mathbf{a}\{m,p\} + \mathbf{b}\{p,n\} = \mathbf{c}\{m,n\} \tag{2.71}$$

Calculul elementelor matricei rezultante se face cu relaţia generală:

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j} \tag{2.72}$$

2.6.2 Expresia matriceală a unui vector

Unei mărimi vectoriale dintr-un spaţiu tridimensional cartezian i se poate ataşa o matrice coloană cu trei elemente care sunt proiecţiile vectorului pe axele de coordonate. Expresia analitică a unui vector oarecare $\bar{a}$ a fost dată în cap. 2.2.2 prin relaţia (2.8), respectiv:

$$\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k} \tag{2.73}$$

Matricea corespunzătoare acestuia va fi $\mathbf{a}\{3,1\}$, având dezvoltarea:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \tag{2.74}$$

Transpusa vectorului, notată $\mathbf{a_t}\{1,3\}$, are aceleaşi elemente dispuse însă în linie:

$$\mathbf{a_t} = [\, a_x \;\; a_y \;\; a_z \,] \tag{2.75}$$

Este evidentă proprietatea că dubla transpunere are ca rezultat vectorul dat:

$$(\mathbf{a_t})_\mathbf{t} = \mathbf{a} \tag{2.76}$$

Pentru versorul unei direcţii oarecare din acelaşi spaţiu proiecţiile pe axe sunt cosinusurile directoare ale acesteia. Pornind de la relaţia (2.9), respectiv:

$$\bar{u} = \cos\alpha\,\bar{i} + \cos\beta\,\bar{j} + \cos\gamma\,\bar{k} \tag{2.77}$$

expresiile matriceale vor avea formele:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{bmatrix} \quad (2.78) \qquad \mathbf{u_t} = [\cos\alpha \;\; \cos\beta \;\; \cos\gamma] \quad (2.79)$$

2.6.3 Operaţiuni vectoriale sub formă matriceală

a) <u>însumarea vectorilor concurenţi</u>

Plecând de la relaţia (2.15) se poate scrie pentru rezultantă:

$$\bar{R} = X\,\bar{i} + Y\,\bar{j} + Z\,\bar{k} = \sum \bar{a}_i \tag{2.80}$$

Formă matriceală concentrată echivalentă:

$$\mathbf{R} = \sum \mathbf{a_i} \tag{2.81}$$

se poate detalia la nivel de elemente prin relaţia următoare:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1x} + a_{2x} + \ldots \\ a_{1y} + a_{2y} + \ldots \\ a_{1z} + a_{2z} + \ldots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum a_{ix} \\ \sum a_{iy} \\ \sum a_{iz} \end{bmatrix} \tag{2.82}$$

Se regăsesc expresiile din relaţia (2.17).

b) <u>înmulţirea unui vector cu un scalar</u>

Cu notaţiile din cap.2.4.1 se poate scrie relaţia:

$$\bar{b} = \lambda\,\bar{a} \quad \rightarrow \quad \mathbf{b} = \lambda\,\mathbf{a} \tag{2.81}$$

Aceasta se detaliază în modul următor:

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda\, a_x \\ \lambda\, a_y \\ \lambda\, a_z \end{bmatrix} \qquad (2.82)$$

c) <u>produsul scalar</u>

Două matrice se pot înmulţi între ele dacă numărul de coloane al celei dintâi este egal cu numărul de linii al celei de a doua. În consecinţă:

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{b} \cdot \bar{a} = s \quad \rightarrow \quad s = \mathbf{a_t}\{1,3\} \cdot \mathbf{b}\{3,1\} = \mathbf{b_t}\{1,3\} \cdot \mathbf{a}\{3,1\} \qquad (2.83)$$

respectiv:

$$s = \mathbf{a_t b} = [\, a_x \quad a_y \quad a_z \,] \cdot \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \qquad (2.84)$$

S-a regăsit rezultatul dat de relaţia (2.31). Se observă că, deşi produsul scalar este comutativ, inversarea ordinii de înmulţire a vectorilor este însoţită de transpunerea acestora.

Înmulţind scalar un vector cu el însuşi se obţine:

$$\mathbf{a_t\, a} = [\, a_x \quad a_y \quad a_z \,] \cdot \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = |\,\bar{a}\,|^2 \qquad (2.85)$$

În cazul unui versor:

$$\mathbf{u_t u} = [\, \cos\alpha \quad \cos\beta \quad \cos\gamma \,] \cdot \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{bmatrix} = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \qquad (2.86)$$

d) <u>produsul vectorial</u>

Pentru efectuarea unui produs vectorial este necesar ca unul dintre vectori să fie pus sub forma unei *matrice asociată antisimetrică*. Notarea acesteia se va face prin sublinierea simbolului vectorului respectiv:

$$\underline{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix} \qquad (2.87)$$

Produsul vectorial devine în această situaţie:

$$\bar{a} \times \bar{b} = \bar{v} \quad \rightarrow \quad \underline{\mathbf{a}}\{3,3\} \cdot \mathbf{b}\{3,1\} = \mathbf{v}\{3,1\} \qquad (2.88)$$

Detaliind, se obţine:

$$\mathbf{v} = \underline{\mathbf{a}}\,\mathbf{b} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{bmatrix} \qquad (2.89)$$

Se regăsesc rezultatele din relaţia (2.39).

S-a arătat în cap.2.4.3 că produsul vectorial nu este comutativ; proprietatea se poate verifica şi utilizând formele matriceale ale vectorilor.

$$\overline{b}\times\overline{a}=-\overline{v} \quad\rightarrow\quad \underline{\mathbf{b}}\{3,3\}\cdot\mathbf{a}\{3,1\}=-\mathbf{v}\{3,1\} \qquad (2.90)$$

$$\underline{\mathbf{b}}\cdot\mathbf{a}=\begin{bmatrix}0 & -b_z & b_y\\ b_z & 0 & -b_x\\ -b_y & b_x & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}a_x\\ a_y\\ a_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-a_yb_z+a_zb_y\\ -a_zb_x+a_xb_z\\ -a_xb_y+a_yb_x\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}v_x\\ v_y\\ v_z\end{bmatrix}=-\mathbf{v} \qquad (2.91)$$

Se poate verifica deasemenea că produsul vectorial al unui vector cu el însuşi este nul.

$$\overline{a}\times\overline{a}=0 \quad\rightarrow\quad \underline{\mathbf{a}}\cdot\mathbf{a}=0 \qquad (2.92)$$

e) <u>produsul mixt</u>

Cu notaţiile din cap.2.4.4 şi ţinând cont de cele de mai sus, produsul mixt se poate pune sub forma următoare:

$$(\overline{a}\times\overline{b})\cdot\overline{c}=s \quad\rightarrow\quad s=(\underline{\mathbf{a}}\,\mathbf{b})_{\mathbf{t}}\mathbf{c}=\mathbf{b}_{\mathbf{t}}\{1,3\}\cdot\underline{\mathbf{a}}_{\mathbf{t}}\{3,3\}\cdot\mathbf{c}\{3,1\} \qquad (2.93)$$

Detaliind se obţine

$$s=\mathbf{b}_{\mathbf{t}}\underline{\mathbf{a}}_{\mathbf{t}}\mathbf{c}=[\,b_x\;\; b_y\;\; b_z\,]\cdot\begin{bmatrix}0 & a_z & -a_y\\ -a_z & 0 & a_x\\ a_y & -a_x & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}c_x\\ c_y\\ c_z\end{bmatrix} \qquad (2.94)$$

Efectuând calculul conform regulilor de înmulţire matriceală se obţine:

$$s=a_xb_yc_z+b_xc_ya_z+c_xa_yb_z-c_xb_ya_z-a_xc_yb_z-b_xa_yc_z \qquad (2.95)$$

Se observă că expresia obţinută reprezintă dezvoltarea determinantului:

$$s=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix} \qquad (2.96)$$

demonstrându-se astfel relaţia (2.45).

f) <u>produsul vectorial dublu</u>

Pornind de la forma matriceală a produsului vectorial simplu se poate scrie pentru produsul vectorial dublu relaţia:

$$\overline{a}\times(\overline{b}\times\overline{c})=\overline{v} \quad\rightarrow\quad \underline{\mathbf{a}}\{3,3\}\cdot\underline{\mathbf{b}}\{3,3\}\cdot\mathbf{c}\{3,1\}=\mathbf{v}\{3,1\} \qquad (2.97)$$

Dezvoltând expresiile se obţine:

$$\underline{\mathbf{a}}\,\underline{\mathbf{b}}\,\mathbf{c}=\begin{bmatrix}0 & -a_z & a_y\\ a_z & 0 & -a_x\\ -a_y & a_x & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0 & -b_z & b_y\\ b_z & 0 & -b_x\\ -b_y & b_x & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}c_x\\ c_y\\ c_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}v_x\\ v_y\\ v_z\end{bmatrix}=\mathbf{v} \qquad (2.98)$$

Efectuând înmulţirile şi grupând corespunzător termenii se regăseşte relaţia matriceală:

$$\mathbf{v}=(\mathbf{a}_{\mathbf{t}}\mathbf{c})\mathbf{b}-(\mathbf{a}_{\mathbf{t}}\mathbf{b})\mathbf{c} \qquad (2.99)$$

care demonstrează valabilitatea relaţiei vectoriale (2.47), respectiv:

$$\overline{v}=\overline{b}(\overline{a}\cdot\overline{c})-\overline{c}(\overline{a}\cdot\overline{b}) \qquad (2.100)$$