

**BAZELE MECANICII APLICATE****PARTEA II-a STATICA  
CONȚINUTUL**

<b>3</b>	<b>REDUCEREA SISTEMELOR DE FORȚE</b> .....	22
3.1	Generalități asupra forțelor .....	22
3.1.1	Efectul mecanic al forței .....	22
3.1.2	Definirea analitică a forței.....	22
3.1.3	Momentul unei forțe față de un punct.....	23
3.1.4	Momentul unei forțe față de o axă.....	24
3.1.5	Teorema momentelor .....	25
3.1.6	Cuplul de forțe.....	25
3.2	Reducerea forțelor concurente .....	26
3.2.1	Generalități.....	26
3.2.2	Calculul grafic .....	27
3.2.3	Calculul analitic.....	27
3.3	Reducerea sistemelor de forțe oarecare. ....	28
3.3.1	Reducerea unei forțe într-un punct. Torsor. ....	28
3.3.2	Torsorul unui sistem de forțe oarecare.....	29
3.3.3	Variația torsorului la schimbarea punctului de reducere. Invarianți. ....	30
3.3.4	Torsor minimal. Axa centrală.....	32
3.3.5	Cazurile de reducere .....	33
3.4	Reducerea sistemelor particulare de forțe.....	36
3.4.1	Reducerea forțelor coplanare.....	36
3.4.2	Reducerea forțelor paralele .....	38
3.4.3	Reducerea forțelor distribuite.....	42
<b>4.</b>	<b>CENTRE DE MASĂ</b> .....	45
4.1	Generalități.....	45
4.2	Centrul de masă al unui sistem de puncte materiale.....	45
4.3	Centrul de masă al unui corp solid rigid .....	47
4.4	Corpuri omogene.....	47
4.4.1	Densitatea .....	47
4.4.2	Poziția centrului de masă. ....	48
4.4.3	Corpuri definite analitic. ....	49
4.4.4	Curbe plane .....	50
4.4.5	Curbe în spațiu.....	53
4.4.6	Suprafețe plane .....	54
4.4.7	Suprafețe în spațiu .....	59
4.4.8	Volume.....	63

	21
4.5 Corpuri compuse .....	67
4.6 Corpuri de rotație.....	74
4.7 Metode speciale de calcul .....	75
<b>5. STATICA PUNCTULUI MATERIAL</b> .....	<b>80</b>
5.1 Generalități.....	80
5.2 Legăturile punctului material .....	80
5.3 Legături definite analitic.....	82
5.4 Legături cu frecare.....	83
5.5 Echilibrul punctului material.....	84
<b>6. STATICA SOLIDULUI RIGID</b> .....	<b>89</b>
6.1 Generalități.....	89
6.2 Legăturile solidului rigid .....	89
6.3 Echilibrul solidului rigid.....	93
6.4 Frecarea în legăturile solidului rigid.....	96
6.4.1 Frecarea de alunecare.....	97
6.4.2 Frecarea de rostogolire.....	97
6.4.3 Frecarea de pivotare.....	102
6.4.4 Frecarea în articulații .....	104
6.4.5 Frecarea firelor .....	106
<b>7. STATICA SISTEMELOR DE CORPURI</b> .....	<b>110</b>
7.1 Generalități.....	110
7.2 Metoda izolării corpurilor .....	112
7.3 Grinzi cu zăbrele .....	117
<b>8. STATICA FIRELOR</b> .....	<b>122</b>
8.1 Generalități.....	122
8.2 Ecuațiile generale de echilibru .....	122
8.3 Ecuațiile de echilibru în coordonate carteziane.....	124
8.4 Ecuațiile de echilibru în triedrul Frenet .....	124
8.5 Funcții hiperbolice. Relații generale.....	125
8.6 Studiul general al firului omogen greu .....	126
8.7 Probleme speciale în statica firelor.....	129
8.7.1 Firul foarte întins .....	129
8.7.2 Firul cu lungime impusă .....	130
8.7.3 Firul cu sarcină adițională fixă .....	134
8.7.4 Firul cu sarcină adițională mobilă.....	135

## Partea II-a STATICA

### 3 REDUCEREA SISTEMELOR DE FORȚE

#### 3.1 Generalități asupra forțelor

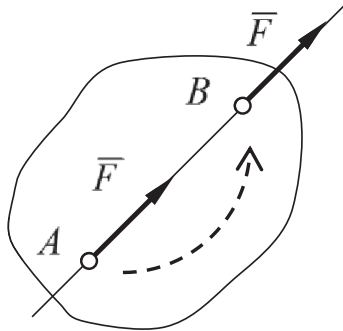


Fig. 3.1

Legat de acest aspect trebuie menționat caracterul de *vector alunecător* al forței. Astfel, o forță aplicată într-un punct al unui corp (fig. 3.1) poate fi deplasată pe suportul ei într-un alt punct al corpului, fără ca prin aceasta efectul asupra corpului să se modifice.

#### 3.1.2 Definierea analitică a forței

Pornind de la relațiile generale (2.3), proiecțiile unei forțe oarecare pe axele de coordonate ale unui sistem de referință cartezian sunt:

$$F_x = |\bar{F}| \cos \alpha \quad F_y = |\bar{F}| \cos \beta \quad F_z = |\bar{F}| \cos \gamma \quad (3.1)$$

în care  $\alpha, \beta, \gamma$  sunt unghiurile directe ale suportului forței (fig. 2.4). În conformitate cu rel. (2.6), aceleași proiecții mai pot fi calculate și cu relațiile:

$$F_x = |\bar{F}| \cos \psi \cos \theta \quad F_y = |\bar{F}| \cos \psi \sin \theta \quad F_z = |\bar{F}| \sin \psi \quad (3.2)$$

Unghiurile  $\theta$  și  $\psi$  au semnificațiile din fig. 2.5. Expresia analitică a forței este:

$$\bar{F} = F_x \bar{i} + F_y \bar{j} + F_z \bar{k} \quad (3.3)$$

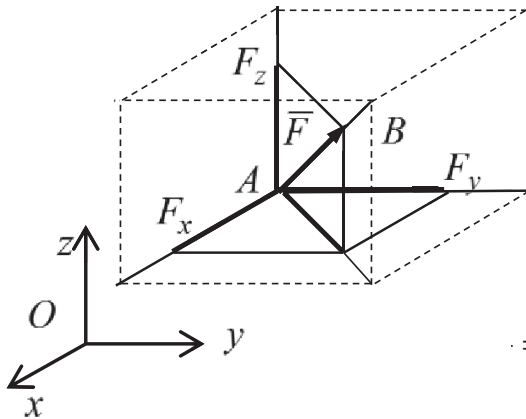


Fig. 3.2

Dacă o forță este coliniară cu un segment de dreaptă mărginit de punctele A și B (fig. 3.2), proiecțiile forței se pot calcula și în funcție de coordonatele acestora, observând asemănarea cu proiecțiile segmentului AB:

$$= \frac{F_x}{x_B - x_A} = \frac{F_y}{y_B - y_A} = \frac{F_z}{z_B - z_A} \quad (3.4)$$

Lungimea segmentului AB în funcție de coordonate este:

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2} \quad (3.5)$$

### 3.1.3 Momentul unei forțe față de un punct

Capacitatea forței de a roti corpul asupra căruia este aplicată în jurul unui punct se evaluează prin *momentul forței* față de punctul respectiv. Momentul se definește vectorial prin relația

$$\overline{M}_O = \overline{r} \times \overline{F} \quad (3.6)$$

în care  $\overline{r} = \overline{OA}$  reprezintă vectorul de poziție al punctului de aplicație al forței  $\overline{F}$  în raport cu punctul față de care se calculează momentul, în cazul de față  $O$  (fig. 3.3). Cu referire la cele arătate anterior referitor la produsul vectorial, pentru momentul forței se poate scrie

$$|\overline{M}_O| = |\overline{F}| |\overline{r}| \sin \alpha = Fb \quad (3.7)$$

Perpendiculara  $b = OB$  dusă din punctul de calcul al momentului pe direcția forței reprezintă *brațul forței* față de punctul  $O$ .

Direcția vectorului  $\overline{M}_O$  este perpendiculară pe planul format de vectorii  $\overline{r}$  și  $\overline{F}$  iar sensul se stabilește prin regula șurubului drept care, în cazul de față corespunde sensului în care forța tinde să rotească corpul.

Cu expresiile analitice ale vectorilor în sistemul de referință cartezian, momentul ia forma:

$$\overline{M}_O = \overline{r} \times \overline{F} = (x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}) \times (F_x\overline{i} + F_y\overline{j} + F_z\overline{k}) = M_x\overline{i} + M_y\overline{j} + M_z\overline{k} \quad (3.8)$$

căreia îi corespunde determinantul:

$$\overline{M}_O = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \quad (3.9)$$

Din dezvoltarea acestuia rezultă proiecțiile:

$$\begin{cases} M_x = yF_z - zF_y \\ M_y = zF_x - xF_z \\ M_z = xF_y - yF_x \end{cases} \quad (3.10)$$

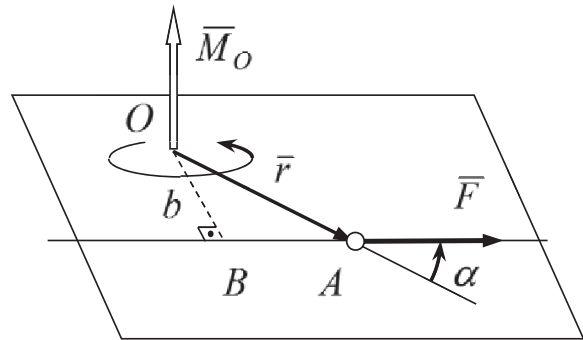


Fig. 3.3

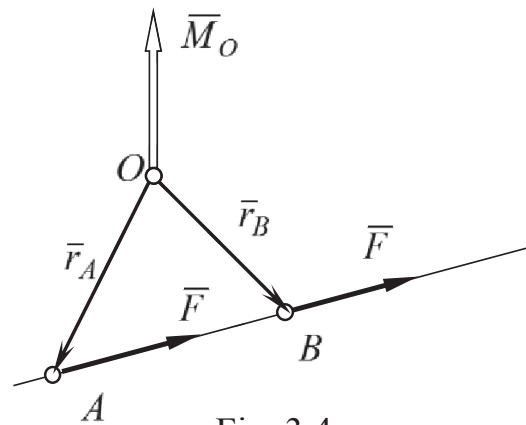


Fig. 3.4

Referitor la momentul forței față de un punct se evidențiază proprietățile:

a) Momentul nu se modifică dacă forța alunecă pe suportul ei de acțiune (fig.3.4). Astfel:

$$\overline{M}'_O = \overline{r}_B \times \overline{F} = (\overline{r}_A + \overline{AB}) \times \overline{F} = \overline{r}_A \times \overline{F} + \overline{AB} \times \overline{F} = \overline{M}_O \quad (3.11)$$

deoarece  $\overline{AB} \times \overline{F} = 0$ , vectorii fiind coliniari. Se confirmă caracterul de vector alunecător al forței afirmat mai înainte.

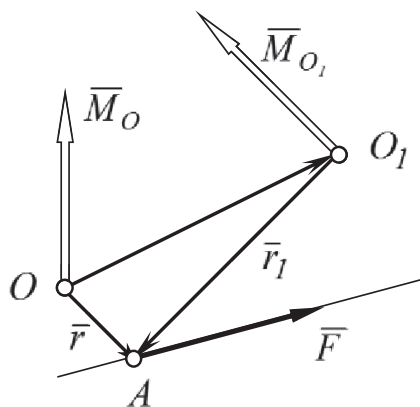


Fig. 3.5

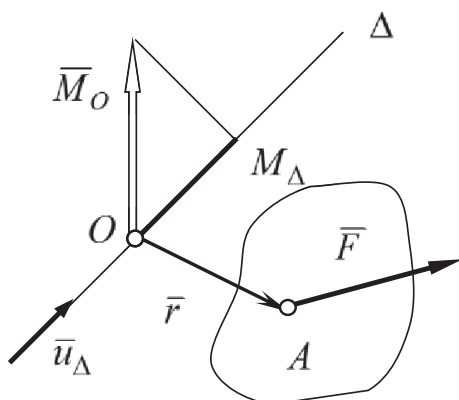


Fig. 3.6

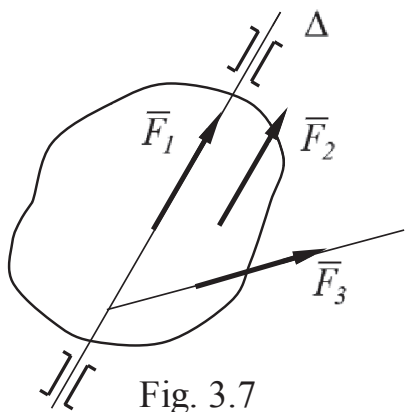


Fig. 3.7

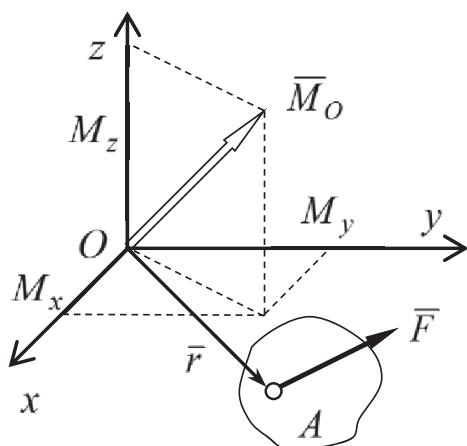


Fig. 3.8

b) Momentul se modifică la schimbarea punctului față de care se face calculul (fig. 3.5):

$$\begin{aligned}\bar{M}_{O_1} &= \bar{r}_1 \times \bar{F} = (\bar{r} - \overline{OO_1}) \times \bar{F} = \\ &= \bar{r} \times \bar{F} - \overline{OO_1} \times \bar{F} = \\ &= \bar{M}_O - \overline{OO_1} \times \bar{F} \neq \bar{M}_O\end{aligned}\quad (3.12)$$

deoarece produsul  $\overline{OO_1} \times \bar{F}$  este în general diferit de 0; se spune că momentul unei forțe este un *vector legat* de punctul de calcul.

c) momentul este nul dacă  $\bar{r} = 0$  sau  $\bar{r}$  este coliniar cu  $\bar{F}$  ceea ce exprimă faptul că o forță nu poate roti corpul în jurul punctului ei de aplicație sau în jurul unui punct aflat pe direcția ei de acțiune.

### 3.1.4 Momentul unei forțe față de o axă

Momentul față de o axă exprimă capacitatea forței de a roti corpul în jurul axei respective. Acest moment se definește prin proiecția pe direcția axei a vectorului momentului forței calculat în raport cu un punct oarecare de pe axă. Astfel, cu referire la fig.3.6:

$$M_{\Delta} = \text{pr}_{\Delta} \bar{M}_O = \bar{M}_O \cdot \bar{u}_{\Delta} = (\bar{r} \times \bar{F}) \cdot \bar{u}_{\Delta} \quad (3.13)$$

Spre deosebire de momentul față de un punct, momentul față de o axă este, o mărime scalară. În cazul în care forța  $\bar{F}$  și axa sunt coplanare atunci momentul față de această axă este nul (cap.2.4.4). Concret, dacă forța este *coliniară*, *paralelă* sau *concurentă* cu axa, ea nu va putea roti corpul în jurul acesteia (fig. 3.7).

Trebuie remarcat faptul că în relația de definiție analitică a momentului unei forțe față de originea O a unui sistem de coordonate cartezian (fig.3.8), respectiv

$$\bar{M}_O = M_x \bar{i} + M_y \bar{j} + M_z \bar{k}, \quad (3.14)$$

proiecțiile pe axe  $M_x, M_y, M_z$  ale vectorului  $\bar{M}_O$  reprezintă chiar momentele acestei forțe față de axele de coordonate  $Ox, Oy$  și  $Oz$ , deoarece punctul O aparține simultan celor trei axe.

### 3.1.5 Teorema momentelor

Sistemul de forțe concurente aplicat din punctul  $A$  (fig.3.9) are rezultanta:

$$\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \dots + \bar{F}_n = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i \quad (3.15)$$

Se înmulțește această relație vectorială la stânga cu vectorul de poziție  $\bar{r}$  al punctului  $A$  față de un punct  $O$ . Se obține:

$$\bar{r} \times \bar{R} = \bar{r} \times \bar{F}_1 + \bar{r} \times \bar{F}_2 + \dots + \bar{r} \times \bar{F}_n = \sum_{i=1}^n (\bar{r} \times \bar{F}_i)$$

$$\bar{M}_O(\bar{R}) = \bar{M}_O(\bar{F}_1) + \bar{M}_O(\bar{F}_2) + \dots + \bar{M}_O(\bar{F}_n) = \sum_{i=1}^n \bar{M}_O(\bar{F}_i) \quad (3.16)$$

Se înmulțește scalar această relație cu versorul  $\bar{u}_\Delta$  al unei axe care trece prin  $O$ :

$$\bar{M}_O(\bar{R}) \cdot \bar{u}_\Delta = \bar{M}_O(\bar{F}_1) \cdot \bar{u}_\Delta + \bar{M}_O(\bar{F}_2) \cdot \bar{u}_\Delta + \dots + \bar{M}_O(\bar{F}_n) \cdot \bar{u}_\Delta = \sum_{i=1}^n [\bar{M}_O(\bar{F}_i) \cdot \bar{u}_\Delta]$$

Ținând cont de (3.13) relația devine:

$$M_\Delta(\bar{R}) = M_\Delta(\bar{F}_1) + M_\Delta(\bar{F}_2) + \dots + M_\Delta(\bar{F}_n) = \sum_{i=1}^n M_\Delta(\bar{F}_i) \quad (3.17)$$

Relațiile (3.16) și (3.17) exprimă *teorema momentelor*, respectiv faptul că *momentul în raport cu un punct sau o axă al rezultantei unui sistem de forțe concurente este egal cu suma momentelor acestor forțe față de punctul sau axa respectivă.*

În practică, această teoremă permite calcularea cu mai multă ușurință a momentului unei forțe față de un punct sau o axă printr-o descompunere convenabilă a forței în componente.

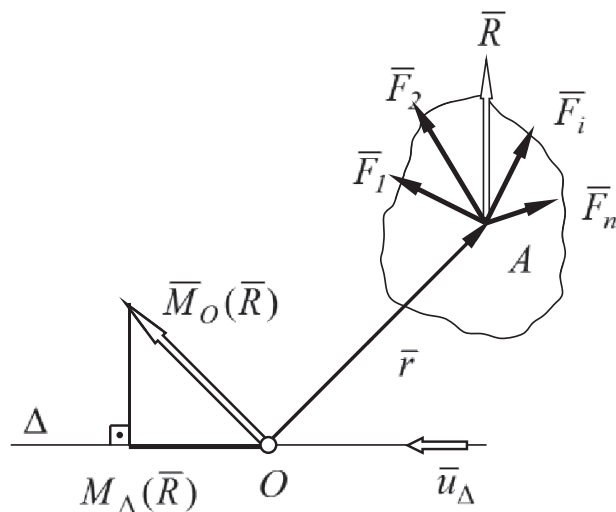


Fig. 3.9

### 3.1.6 Cuplul de forțe

Prin cuplu de forțe se înțelege un ansamblu de două forțe paralele, egale și de sens contrar (fig. 3.10). Cuplul, notat  $(\bar{F}, -\bar{F})$ , are ca efect rotirea corpului asupra căruia acționează în jurul unei axe oarecare, perpendiculară pe planul format de cele două forțe.

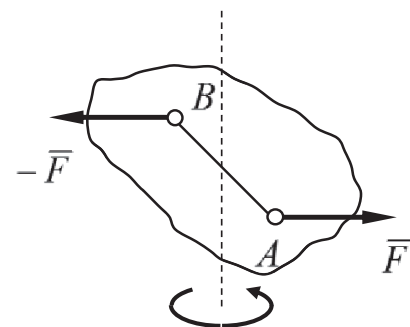


Fig.3.10

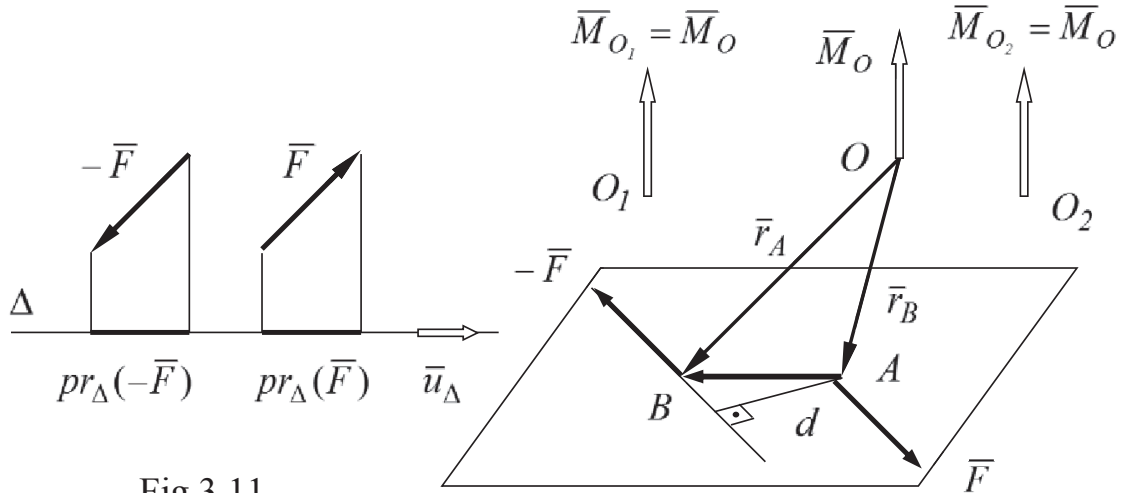


Fig.3.11

Fig.3.12

Se pot pune în evidență următoarele proprietăți :

a) Proiecția unui cuplu de forțe pe orice axă este nulă. Facând, de exemplu, proiectarea pe direcția  $\Delta$  (fig. 3.11) rezultă:

$$\text{pr}_{\Delta}(\vec{F}, -\vec{F}) = \text{pr}_{\Delta}(\vec{F}) + \text{pr}_{\Delta}(-\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{u}_{\Delta} + (-\vec{F}) \cdot \vec{u}_{\Delta} = 0 \quad (3.18)$$

b) Momentul unui cuplu de forțe are aceeași valoare oricare ar fi punctul de calcul. Cu notațiile din fig. 3.12 se poate scrie:

$$\begin{aligned} \vec{M}_O(\vec{F}, -\vec{F}) &= \vec{M}_O(\vec{F}) + \vec{M}(-\vec{F}) = \vec{r}_B \times \vec{F} + \vec{r}_A \times (-\vec{F}) = \\ &= (\vec{r}_B - \vec{r}_A) \times \vec{F} = \vec{AB} \times \vec{F} \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$|\vec{M}_O(\vec{F}, -\vec{F})| = |\vec{F}| |\vec{AB}| \sin \alpha = Fd$$

Se constată că momentul cuplului depinde doar de distanța dintre suporturile forțelor; poziția punctului  $O$  nu intervine în relația de mai sus, acesta putând fi oriunde în spațiu. Spre deosebire de momentul unei singure forțe, momentul unui cuplu este un vector liber.

## 3.2 Reducerea forțelor concurente

### 3.2.1 Generalități

În cazul unui sistem de forțe având toate același punct de aplicație, operațiunea de reducere constă în găsirea unei singure forțe aplicată în punctul respectiv, echivalentă ca efect sistemului dat. Este evident că această forță este tocmai *rezultanta* sistemului.

Dacă sistemul de forțe menționat este aplicat unui punct material, efectul acestuia va consta în deplasarea punctul pe direcția și în sensul de acțiune al rezultantei.

Metodele pentru calculul rezultantei forțelor concurente, atât pe cale grafică cât și analitică, sunt cele analizate în cap.2 pentru sistemele de vectori concurenți.

### 3.2.2 Calculul grafic

În general procedeele grafice au în prezent o valoare ilustrativă servind cel mai adesea la stabilirea pe cale geometrică a unor relații de calcul.

a) *Metoda paralelogramului* (fig. 3.13) se aplică în cazul a numai două forțe concurente și, implicit, coplanare. În afara relațiilor generale (2.13) și (2.14) se mai pot scrie și următoarele:

$$\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 \quad (3.20)$$

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \alpha} \quad (3.21)$$

$$\frac{R}{\sin \alpha} = \frac{F_1}{\sin \gamma} = \frac{F_2}{\sin \beta} \quad (3.22)$$

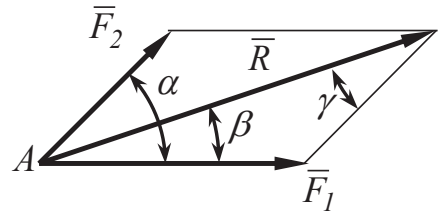


Fig. 3.13

b) *Metoda poligonului* (fig. 3.14) se utilizează pentru un număr mai mare de forțe, rezultanta calculându-se în modul arătat în cap. 2.3. În cazul a  $n$  forțe concurente,

$$\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \dots + \bar{F}_n = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i \quad (3.23)$$

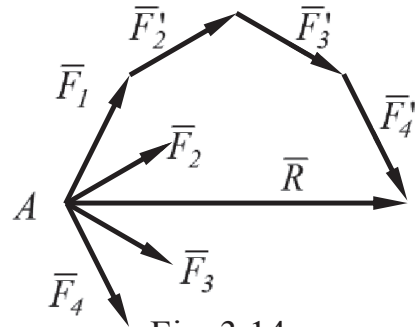


Fig. 3.14

c) *Metoda paralelipipedului* (fig.3.15) este echivalenta în spațiu a metodei paralelogramului și se aplică în cazul a trei forțe concurente necoplanare. Rezultanta este diagonala care unește punctul de aplicație al forțelor cu vârful opus în paralelogramul format cu cele trei forțe drept muchii:

$$\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 \quad (3.24)$$

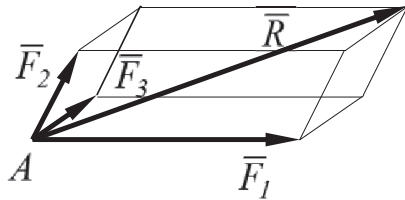


Fig. 3.15

### 3.2.3 Calculul analitic

Rezultanta forțelor concurente se poate evalua analitic particularizând corespunzător relațiile generale stabilite în cap. 2.2 și 2.3.

Pornind de la definiția analitică a unei forțe oarecare:

$$\bar{F}_i = F_{ix}\bar{i} + F_{iy}\bar{j} + F_{iz}\bar{k} \quad (3.25)$$

se poate scrie pentru rezultantă:

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i = \sum_{i=1}^n (F_{ix}\bar{i} + F_{iy}\bar{j} + F_{iz}\bar{k}) = \left( \sum_{i=1}^n F_{ix} \right) \bar{i} + \left( \sum_{i=1}^n F_{iy} \right) \bar{j} + \left( \sum_{i=1}^n F_{iz} \right) \bar{k} \quad (3.26)$$

Rezultanta se definește analitic prin:

$$\bar{R} = X\bar{i} + Y\bar{j} + Z\bar{k} \quad (3.27)$$



Pentru proiecțiile pe axe ale rezultantei se obțin relațiile:

$$X = \sum_{i=1}^n F_{ix} \quad Y = \sum_{i=1}^n F_{iy} \quad Z = \sum_{i=1}^n F_{iz} \quad (3.28)$$

Aceste relații corespund teoremei proiecțiilor (rel.2.17) aplicată în cazul forțelor, respectiv: *proiecțiile pe axe de coordonate ale rezultantei unui sistem de forțe concurente sunt fiecare egală cu suma proiecțiilor pe axa respectivă ale acestor forțe.*

### 3.3 Reducerea sistemelor de forțe oarecare.

#### 3.3.1 Reducerea unei forțe într-un punct. Torsor.

Într-un punct  $A$  al unui corp (fig. 3.16, *a*) se aplică o forță  $\vec{F}$ . Pentru evaluarea efectului acestei forțe într-un punct oarecare  $O$  se procedează după cum urmează. În punctul  $O$  se introduc două forțe egale și direct opuse,  $\vec{F}$  și  $-\vec{F}$ , al căror efect asupra corpului este nul. Forța  $\vec{F}$  din  $A$  și  $-\vec{F}$  din  $O$  alcătuiesc un cuplu al cărui efect asupra corpului se măsoară, conform cap 3.1.6, prin momentul  $\vec{M}_O$  (fig. 3.16, *b*). După înlocuirea cuplului prin acest moment, în  $O$  au rămas forța  $\vec{F}$  și momentul  $\vec{M}_O$  (fig. 3.16, *c*). Ansamblul acestor două mărimi alcătuiește *torsorul de reducere* al forței  $\vec{F}$  în raport cu punctul  $O$ . Torsorul se notează

$$\tau_O(\vec{F}) = (\vec{F}, \vec{M}_O) \quad \text{sau} \quad \tau_O(\vec{F}) \begin{cases} \vec{F} \\ \vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F} \end{cases} \quad (3.29)$$

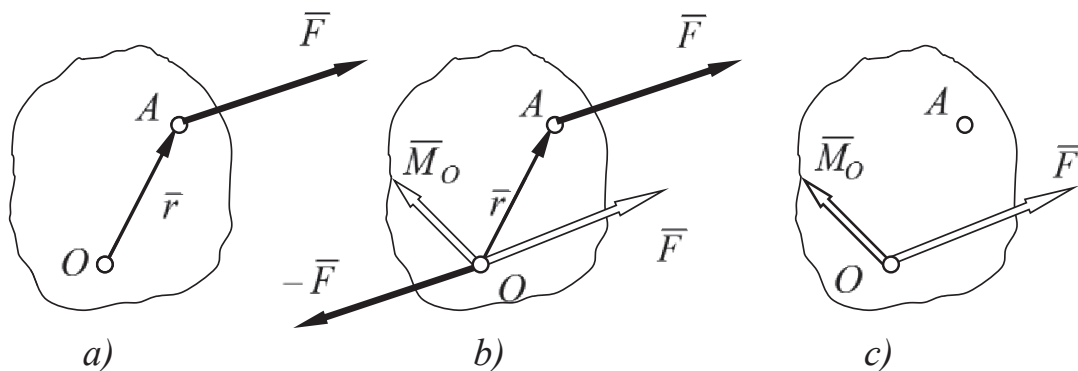


Fig. 3.16

Se spune că efectul forței  $\vec{F}$  aplicată corpului în  $A$  se măsoară în punctul  $O$  prin torsorul de reducere compus din forța dată  $\vec{F}$ , mutată din  $A$  în  $O$ , și din momentul acesteia în raport cu punctul  $O$ . Cele două componente ale torsorului exprimă totodată tendința de translatare a corpului după direcția de acțiune a forței precum și tendința simultană de a-l roti în jurul punctului  $O$ .

Dacă se schimbă punctul de reducere, de exemplu în  $O_1$  (fig. 3.17), procedând în același mod ca mai sus, se găsește un nou torsor, respectiv:

$$\tau_{O_1}(\bar{F}) \begin{cases} \bar{F} \\ \bar{M}_{O_1} = \bar{r}_1 \times \bar{F} \end{cases} \quad (3.30)$$

Forța  $\bar{F}$  este evident aceeași în  $O$  și în  $O_1$  dar momentul este diferit. Observând că  $\bar{r}_1 = \bar{r} - \overline{OO_1}$ ,

$$\begin{aligned} \bar{M}_{O_1} &= (\bar{r} - \overline{OO_1}) \times \bar{F} = \bar{r} \times \bar{F} - \overline{OO_1} \times \bar{F} = \\ &= \bar{M}_O - \overline{OO_1} \times \bar{F} \neq \bar{M}_O \end{aligned} \quad (3.31)$$

cu excepția situației în care  $\overline{OO_1}$  și  $\bar{F}$  ar fi coliniare sau paralele.

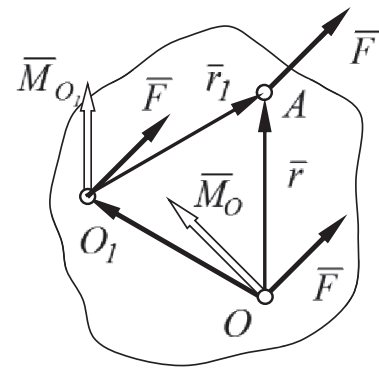


Fig. 3.17

### 3.3.2 Torsorul unui sistem de forțe oarecare

Operațiunea de reducere descrisă în paragraful precedent poate fi efectuată pentru fiecare dintre forțele unui sistem oarecare (fig. 3.18):

$$\begin{aligned} \tau_O(\bar{F}_1) &\begin{cases} \bar{F}_1 \\ \bar{M}_1 = \bar{r}_1 \times \bar{F}_1 \end{cases} \\ \tau_O(\bar{F}_2) &\begin{cases} \bar{F}_2 \\ \bar{M}_2 = \bar{r}_2 \times \bar{F}_2 \end{cases} \\ \dots\dots\dots \\ \tau_O(\bar{F}_n) &\begin{cases} \bar{F}_n \\ \bar{M}_n = \bar{r}_n \times \bar{F}_n \end{cases} \end{aligned} \quad (3.32)$$

După reducere, în punctul  $O$  acționează două sisteme de vectori concurenți. Prin însumarea acestora rezultă torsorul general de reducere al sistemului de forțe dat:

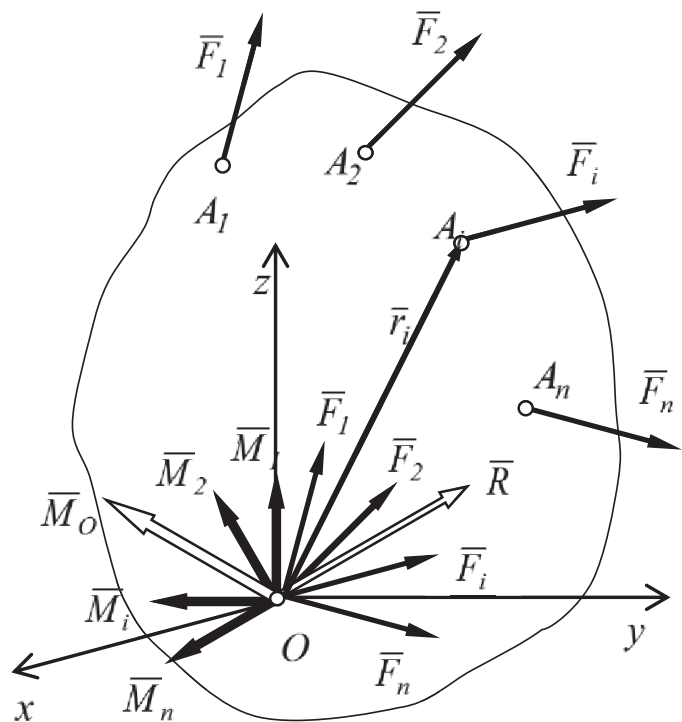


Fig. 3.18

$$\tau_O \begin{cases} \bar{R} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i \\ \bar{M}_O = \sum_{i=1}^n \bar{M}_i = \sum_{i=1}^n (\bar{r}_i \times \bar{F}_i) \end{cases} \quad (3.33)$$

Torsorul va consta din *rezultanta*  $\bar{R}$  și *momentul rezultat*  $\bar{M}_O$  în raport cu punctul de reducere.

Într-un sistem de referință cartezian cu originea în punctul  $O$  elementele torsorului de reducere se pot calcula distinct:

$$\tau_O \begin{cases} \bar{R} = X\bar{i} + Y\bar{j} + Z\bar{k} \\ \bar{M}_O = M_{Ox}\bar{i} + M_{Oy}\bar{j} + M_{Oz}\bar{k} \end{cases} \quad (3.34)$$

Pentru o forță oarecare  $\bar{F}_i$  se poate scrie:

$$\bar{r}_i = x_i\bar{i} + y_i\bar{j} + z_i\bar{k} \quad \bar{F}_i = F_{ix}\bar{i} + F_{iy}\bar{j} + F_{iz}\bar{k} \quad (3.35)$$

Ca și la forțele concurente, proiecțiile pe axe ale rezultantei sunt:

$$X = \sum_{i=1}^n F_{ix} \quad Y = \sum_{i=1}^n F_{iy} \quad Z = \sum_{i=1}^n F_{iz} \quad (3.36)$$

Momentul forței  $\bar{F}_i$  față de punctul  $O$  este:

$$\bar{M}_i = \bar{r}_i \times \bar{F}_i = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_i & y_i & z_i \\ F_{ix} & F_{iy} & F_{iz} \end{vmatrix} = M_{ix}\bar{i} + M_{iy}\bar{j} + M_{iz}\bar{k} \quad (3.37)$$

unde proiecțiile pe axe ale momentului sunt minorii determinantului prin care se calculează produsul vectorial de definiție. Astfel,

$$\begin{cases} M_{ix} = y_i F_{iz} - z_i F_{iy} \\ M_{iy} = z_i F_{ix} - x_i F_{iz} \\ M_{iz} = x_i F_{iy} - y_i F_{ix} \end{cases} \quad (3.38)$$

Proiecțiile pe axe ale momentului rezultat sunt:

$$M_{Ox} = \sum_{i=1}^n M_{ix} \quad M_{Oy} = \sum_{i=1}^n M_{iy} \quad M_{Oz} = \sum_{i=1}^n M_{iz} \quad (3.39)$$

### 3.3.3 Variația torsorului la schimbarea punctului de reducere. Invarianți.

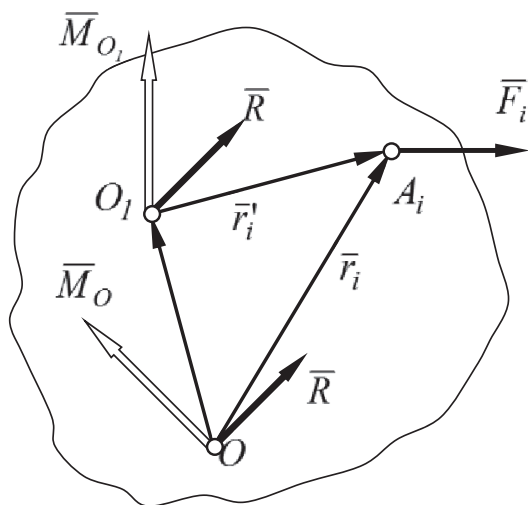


Fig.3.19

Dacă se repetă operațiunea de reducere pentru un punct  $O_1$  (fig. 3.19), se va găsi torsorul:

$$\tau_{O_1} \begin{cases} \bar{R} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i \\ \bar{M}_{O_1} = \sum_{i=1}^n (\bar{r}'_i \times \bar{F}_i) \end{cases} \quad (3.40)$$

Forțele sistemului, reduse în punctul  $O_1$ , vor avea aceeași rezultantă  $\bar{R}$ . În calculul momentului rezultat vor intra însă vectorii de poziție  $\bar{r}'_i$  astfel că acesta va avea o valoare diferită de  $\bar{M}_O$ .

Observând că  $\bar{r}'_i = \bar{r}_i - \overline{OO}_1$  rezultă:

$$\bar{M}_{O_1} = \sum_{i=1}^n [(\bar{r}_i - \overline{OO}_1) \times \bar{F}_i] = \sum_{i=1}^n (\bar{r}_i \times \bar{F}_i) - \overline{OO}_1 \times \sum_{i=1}^n \bar{F}_i = \bar{M}_O - \overline{OO}_1 \times \bar{R} \quad (3.41)$$

Egalitatea  $\bar{M}_{O_1} = \bar{M}_O$  este posibilă dacă vectorii  $\overline{OO}_1$  și  $\bar{R}$  sunt coliniari, respectiv atunci când noul punct de reducere se află chiar pe direcția rezultantei. Mărimile care nu se modifică la schimbarea punctului de reducere se numesc *invarianți* ai sistemului de forțe. Aceștia sunt:

a) *Rezultanta*  $\bar{R}$ . Ca urmare a modului în care se face reducerea vor fi invariabile atât direcția cât și modulul rezultantei:

$$|\bar{R}| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \quad (3.42)$$

b) *Produsul scalar*  $\bar{R} \cdot \bar{M}_O$ . Apelând la relația (3.41) se evidențiază că, oricare ar fi punctul  $O_1$ ,

$$\bar{R} \cdot \bar{M}_{O_1} = \bar{R} \cdot (\bar{M}_O - \overline{OO}_1 \times \bar{R}) = \bar{R} \cdot \bar{M}_O - \bar{R} \cdot (\overline{OO}_1 \times \bar{R}) = \bar{R} \cdot \bar{M}_O, \quad (3.43)$$

produsul mixt din relație fiind nul. Dacă  $\bar{R}$  și  $\bar{M}_O$  sunt cunoscute prin dezvoltările lor analitice (3.34), produsul scalar menționat ia forma:

$$\bar{R} \cdot \bar{M}_O = XM_{Ox} + YM_{Oy} + ZM_{Oz} \quad (3.44)$$

care este numită și *trinomial invariant*.

c) *Proiecția*  $M_R$  a momentului resultant  $\bar{M}_O$  pe direcția rezultantei  $\bar{R}$ . Se descompune momentul resultant  $\bar{M}_O$  în componentele  $M_R$  pe direcția rezultantei și  $M_N$  perpendicular pe aceasta (fig. 3.20).

Versorul direcției rezultantei se exprimă prin relația:

$$\bar{u}_R = \frac{\bar{R}}{|\bar{R}|} \quad (3.45)$$

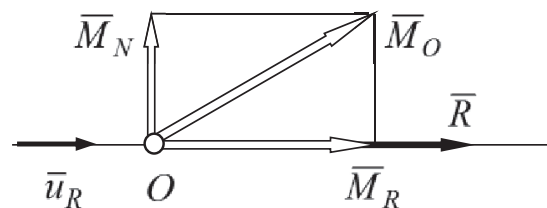


Fig.3.20

Ținând cont de (2.1), proiecția lui  $\bar{M}_O$  pe direcția  $\bar{R}$  va fi:

$$M_R = \text{pr}_{\bar{R}} \bar{M}_O = \bar{M}_O \cdot \bar{u}_R = \bar{M}_O \cdot \frac{\bar{R}}{|\bar{R}|} = \frac{\bar{R} \cdot \bar{M}_O}{|\bar{R}|} \quad (3.46)$$

Rezultă că proiecția  $M_R$ , determinată ca raport al unor invarianți definiți mai sus, este și ea un invariant. Între componenta  $\bar{M}_R$  și proiecția  $M_R$  există, evident, relația  $\bar{M}_R = M_R \bar{u}_R$ .

### 3.3.4 Torsor minimal. Axa centrală.

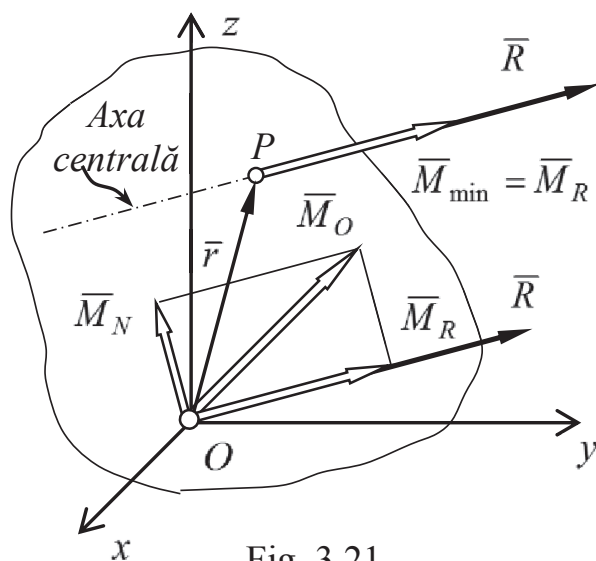


Fig. 3.21

Făcând reducerea sistemului în diferite puncte, torsorul va varia prin cea de a doua componentă a sa – momentul  $\bar{M}_O$ . Dacă se face descompunerea din fig. 3.21, respectiv:

$$\bar{M}_O = \bar{M}_R + \bar{M}_N \quad (3.47)$$

se constată că componenta  $\bar{M}_R$  este constantă deoarece proiecția sa  $M_R$  este un invariant al sistemului de forțe. În consecință, variația momentului rezultat are loc prin componenta sa  $\bar{M}_N$  perpendiculară pe direcția rezultantei.

Dacă făcând reducerea într-un punct vom găsi  $\bar{M}_N = 0$ , atunci momentul rezultat va avea o valoare minimă, respectiv  $\bar{M}_{min} = \bar{M}_R$ . Torsorul de reducere astfel obținut poartă numele de *torsor minimal*.

$$\tau_{min} \begin{cases} \bar{R} \\ \bar{M}_{min} = \bar{M}_R \end{cases} \quad (3.48)$$

Scalarul momentului minim se calculează cu relația:

$$M_{min} = \frac{\bar{R} \cdot \bar{M}_O}{|\bar{R}|} = \frac{XM_{Ox} + YM_{Oy} + ZM_{Oz}}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}} \quad (3.49)$$

Într-un punct oarecare  $P(x, y, z)$  în care făcând reducerea sistemului de forțe dat se găsește un torsor minimal, momentul minim se mai poate exprima, în baza relației (3.41) de variație a torsorului la schimbarea punctului de reducere, prin:

$$\bar{M}_{min} = \bar{M}_P = \bar{M}_O - \overline{OP} \times \bar{R} \quad (3.50)$$

în care  $\overline{OP} = \bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ . Cu exprimările analitice corespunzătoare această relație ia forma:

$$M_{Px}\bar{i} + M_{Py}\bar{j} + M_{Pz}\bar{k} = M_{Ox}\bar{i} + M_{Oy}\bar{j} + M_{Oz}\bar{k} - \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x & y & z \\ X & Y & Z \end{vmatrix} \quad (3.51)$$

Rezultă proiecțiile:

$$\begin{cases} M_{Px} = M_{Ox} - (yZ - zY) \\ M_{Py} = M_{Oy} - (zX - xZ) \\ M_{Pz} = M_{Oz} - (xY - yX) \end{cases} \quad (3.52)$$

Momentul minim și rezultanta sunt vectori coliniari. Între proiecțiile pe axe există, conform relației (2.25), rapoartele de proporționalitate:

$$\frac{M_{Px}}{X} = \frac{M_{Py}}{Y} = \frac{M_{Pz}}{Z} \quad (3.53)$$

sau, după înlocuire,

$$\frac{M_{Ox} - (yZ - zY)}{X} = \frac{M_{Oy} - (zX - xZ)}{Y} = \frac{M_{Oz} - (xY - yX)}{Z} \quad (3.54)$$

Această relație reprezintă ecuația unei drepte în spațiu având direcția rezultantei. În consecință, locul geometric al punctelor din spațiu în care făcând reducerea unui sistem de forțe oarecare se obține un torsor minimal este o dreaptă numită *axa centrală* a sistemului respectiv.

În mod practic, luând câte două rapoartele din relația (3.54) se obțin ecuațiile analitice ale unor plane a căror intersecție este tocmai axa centrală.

### 3.3.5 Cazurile de reducere

Torsorul de reducere al unui sistem de forțe poate furniza informații despre efectul cumulat al acestuia asupra corpului pe care îl acționează. Astfel, există o tendință de translație a corpului după direcția și în sensul de acțiune ale rezultantei simultană cu o tendință de rotire a corpului în jurul unei axe coliniare cu momentul rezultat (fig.3.22).

Din analiza torsorului de reducere se poate determina cel mai simplu sistem de forțe, echivalent ca efect cu sistemul dat. În funcție de valorile rezultantei și momentului rezultat se evidențiază următoarele cazuri de reducere ale unui sistem de forțe:

Cazul 1:  $\bar{R} = 0, \bar{M}_O = 0$ . Sistem de forțe aflat în echilibru; corpul rămâne în repaus sau continuă o deplasare rectilinie și uniformă. Toate sistemele aflate în echilibru sunt echivalente între ele.

Cazul 2:  $\bar{R} = 0, \bar{M}_O \neq 0$ . Sistem echivalent cu un cuplu de forțe (fig.3.23) acționând într-un plan perpendicular pe direcția momentului rezultat  $\bar{M}_O$ . Sistemul are ca efect numai rotirea corpului în jurul axei coliniare cu  $\bar{M}_O$ .

Cazul 3:  $\bar{R} \neq 0, \bar{M}_O = 0$ . Sistem echivalent cu o forță unică, egală cu rezultanta  $\bar{R}$ , acționând chiar în punctul de reducere (fig.3.24).

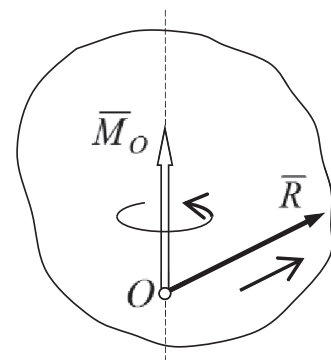


Fig. 3.22

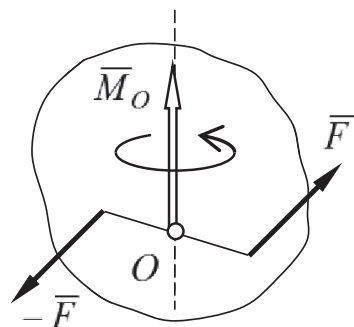


Fig.3.23

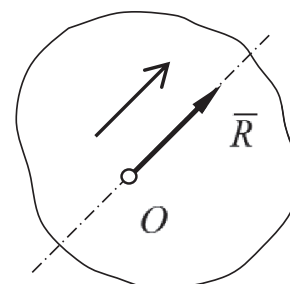


Fig.3.24

Cazul 4 :  $\bar{R} \neq 0, \bar{M}_O \neq 0$ . Se deosebesc situațiile:

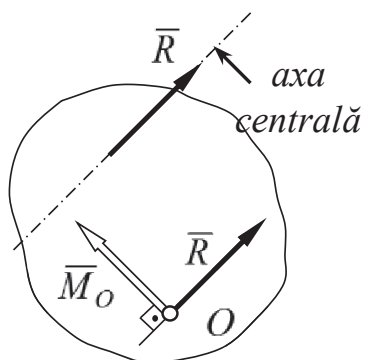


Fig.3.25

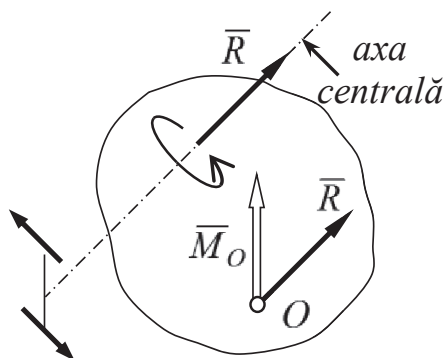


Fig.3.26

a)  $\bar{R} \cdot \bar{M}_O = 0$ . În acest caz  $\bar{M}_O \perp \bar{R}$  și deci  $M_{min} = 0$ . Torsorul minimal este compus numai din  $\bar{R}$ . Sistemul este echivalent cu o forță unică, egală cu rezultanta, acționând pe axa centrală (fig.3.25). Efectul sistemului este de translație a corpului în lungul axei centrale.

b)  $\bar{R} \cdot \bar{M}_O \neq 0$ . Sistemul este echivalent cu un torsor minimal compus dintr-o forță egală cu  $\bar{R}$ , acționând pe axa centrală și un cuplu de forțe de moment  $\bar{M}_{min}$ , acționând într-un plan perpendicular pe axa centrală (fig. 3.26). Efectul sistemului constă dintr-o translație a corpului după direcția axei centrale și dintr-o rotație simultană a acestuia, analog unei mișcări elicoidale.

De remarcat că situația descrisă pentru cazul 3 este o particularizare a cazului 4, a), axa centrală trecând chiar prin punctul de reducere.

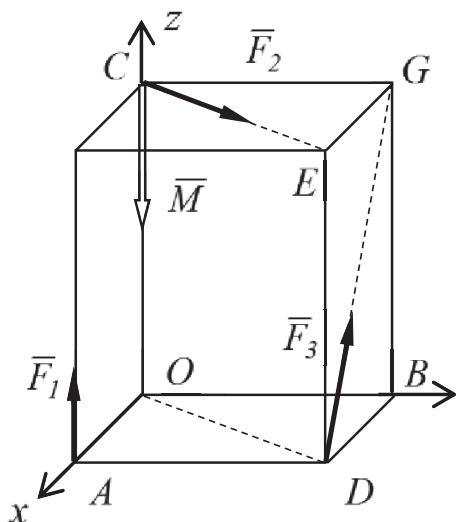


Fig.3.27

Problema 3.1: Se dă un sistem de forțe aplicat unui paralelipiped având trei muchii suprapuse axelor de coordonate ca în fig.3.27.

Date:  $OA = 3a, OB = 4a, OC = 5a$ ,

$$|\bar{F}_1| = 2P, |\bar{F}_2| = 5P, |\bar{F}_3| = \sqrt{34}P,$$

$$|\bar{M}| = 6Pa \text{ (momentul unui cuplu).}$$

Cerute:  $-\tau_O(\bar{R}, \bar{M}_O)$  și  $\tau_D(\bar{R}, \bar{M}_D)$ ;

– echivalența sistemului;

– axa centrală;

– reprezentarea grafică a elementelor de reducere.

Rezolvare: Forța  $\bar{F}_1$  are proiecție numai pe axa  $Oz$ . Proiecțiile forțelor  $\bar{F}_2$  și  $\bar{F}_3$  se găsesc utilizând relația (3.4) după cum urmează:

$$\frac{|\bar{F}_2|}{CE} = \frac{F_{2x}}{x_E - x_C} = \frac{F_{2y}}{y_E - y_C} = \frac{F_{2z}}{z_E - z_C} \rightarrow \frac{5P}{5a} = \frac{F_{2x}}{3a - 0} = \frac{F_{2y}}{4a - 0} = \frac{F_{2z}}{0 - 0}$$

$$\frac{|\bar{F}_3|}{DG} = \frac{F_{3x}}{x_G - x_D} = \frac{F_{3y}}{y_G - y_D} = \frac{F_{3z}}{z_G - z_D} \rightarrow \frac{\sqrt{34}P}{\sqrt{34}a} = \frac{F_{3x}}{0 - 3a} = \frac{F_{3y}}{4a - 4a} = \frac{F_{3z}}{5a - 0}$$

Momentele forțelor față de punctul  $O$  se calculează cu relația (3.9).

$$\bar{M}_1 = \overline{OA} \times \bar{F}_1 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2P \end{vmatrix}; \quad \bar{M}_2 = \overline{OC} \times \bar{F}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & 5a \\ 3P & 4P & 0 \end{vmatrix};$$

$$\bar{M}_3 = \overline{OD} \times \bar{F}_3 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3a & 4a & 0 \\ -3P & 0 & 5P \end{vmatrix}$$

Proiecțiile forțelor și momentelor pe axele de coordonate, calculate cu aceste relații, sunt concentrate în tabelul 3.1.

**Tabelul 3.1**

	$F_x$	$F_y$	$F_z$	$M_x$	$M_y$	$M_z$
$\bar{F}_1$	0	0	2P	0	-6Pa	0
$\bar{F}_2$	3P	4P	0	-20Pa	15Pa	0
$\bar{F}_3$	-3P	0	5P	20Pa	-15Pa	12Pa
$\bar{M}$	-	-	-	0	0	-6Pa
$\Sigma$	0	4P	7P	0	-6Pa	6Pa

Ultima linie, obținută prin însumarea coloanelor, conține tocmai proiecțiile pe axe ale rezultantei și momentului rezultat în urma reducerii în punctul  $O$ .

$$\tau_O \begin{cases} \bar{R} = 4P\bar{j} + 7P\bar{k} \\ \bar{M}_O = -6Pa\bar{j} + 6Pa\bar{k} \end{cases}$$

Modulul rezultantei, dat de rel.(3.42), are valoarea  $|\bar{R}| = \sqrt{65}P$ . Pentru torsorul de reducere în punctul  $D$  se calculează numai momentul rezultat pornind de la  $\bar{M}_O$  în baza rel.(3.41). Se obține astfel:

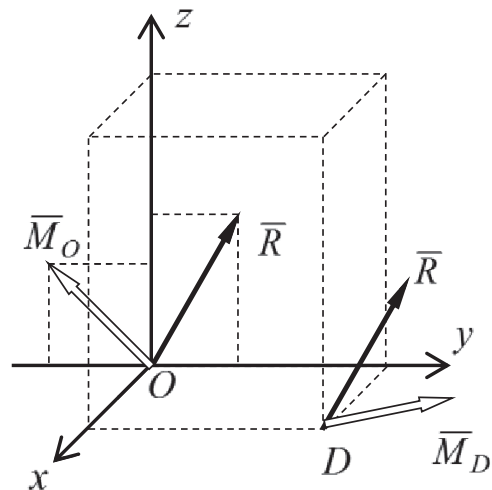


Fig.3.28

$$\bar{M}_D = \bar{M}_O - \overline{OD} \times \bar{R} = -6Pa\bar{j} + 6Pa\bar{k} - \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3a & 4a & 0 \\ 0 & 4P & 7P \end{vmatrix} =$$

$$= -28Pa\bar{i} + 15Pa\bar{j} - 6Pa\bar{k}$$

Componentele torsorului din punctul  $O$  și ale celui din punctul  $D$  sunt reprezentate în fig.3.28. Trinomul invariant al sistemului, definit prin rel.(3.44), are valoarea  $\bar{R} \cdot \bar{M}_O = 18P^2a \neq 0$ . Deoarece  $\bar{R} \neq 0$ ,  $\bar{M}_O \neq 0$  și  $\bar{R} \cdot \bar{M}_O \neq 0$  ne aflăm în cazul de reducere 4 b) analizat mai înainte. Sistemul dat este echivalent



în consecință cu un torsor minimal compus dintr-o forță egală cu rezultanta sistemului acționând pe axa centrală și dintr-un cuplu de moment minim.

Axa centrală se obține făcând înlocuirile în ecuația generală (3.54):

$$\frac{0 - (7Py - 4Pz)}{0} = \frac{-6Pa - (0 - 7Px)}{4P} = \frac{6Pa - (4Px - 0)}{7P}$$

Rezultă imediat:

$$7y - 4z = 0 \quad x = \frac{66}{65}a \approx a$$

Momentul minim are valoarea:

$$M_{min} = \frac{\bar{R} \cdot \bar{M}_O}{|\bar{R}|} = \frac{18P^2a}{\sqrt{65}P} = 2.23Pa$$

Axa centrală este o dreaptă având aceeași direcție cu rezultanta, situată într-un plan paralel cu  $yOz$ . În fig.3.29 s-a reprezentat torsorul minimal care se obține făcând reducerea într-un punct al acesteia.

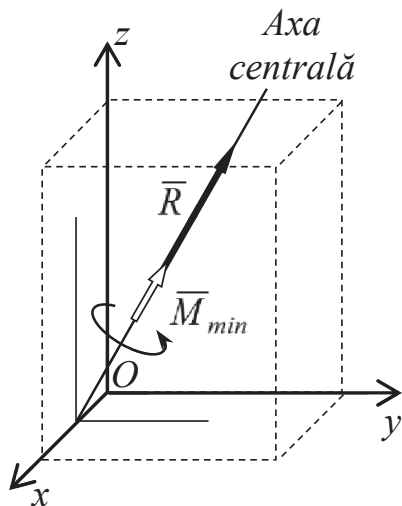


Fig.3.29

### 3.4 Reducerea sistemelor particulare de forțe

În afara sistemelor de forțe concurente, a căror reducere a fost studiată separat în cap.3.2, prezintă o importanță deosebită forțele coplanare și forțele paralele.

#### 3.4.1 Reducerea forțelor coplanare

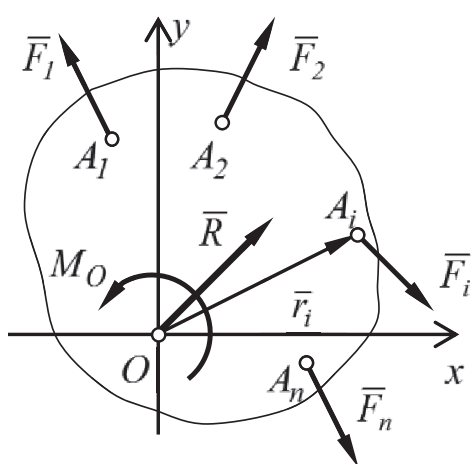


Fig.3.30

Pornind de la forma generală a torsorului de reducere al unui sistem de forțe oarecare în raport cu un punct  $O$ , respectiv:

$$\tau_O \begin{cases} \bar{R} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i \\ \bar{M}_O = \sum_{i=1}^n \bar{M}_i = \sum_{i=1}^n (\bar{r}_i \times \bar{F}_i) \end{cases} \quad (3.55)$$

se consideră pentru simplificare că toate forțele sistemului sunt coplanare în  $xOy$  (fig.3.30). În acest caz, pentru o forță oarecare  $\bar{F}_i$  a sistemului

$$\bar{r}_i = x_i \bar{i} + y_i \bar{j} \quad (z_i = 0) \quad \bar{F}_i = F_{ix} \bar{i} + F_{iy} \bar{j} \quad (F_{iz} = 0) \quad (3.56)$$

Proiecțiile pe axe ale rezultantei vor fi:

$$X = \sum_{i=1}^n F_{ix} \neq 0 \quad Y = \sum_{i=1}^n F_{iy} \neq 0 \quad Z = \sum_{i=1}^n F_{iz} = 0 \quad (3.57)$$

Momentul forței  $\bar{F}_i$  față de punctul  $O$  este:

$$\bar{M}_i = \bar{M}_O(\bar{F}_i) = \bar{r}_i \times \bar{F}_i = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_i & y_i & 0 \\ F_{ix} & F_{iy} & 0 \end{vmatrix} = (x_i F_{iy} - y_i F_{ix}) \bar{k} = M_{iz} \bar{k} \quad (3.58)$$

Observând că  $M_{ix} = M_{iy} = 0$ , proiecțiile pe axe ale momentului rezultat sunt:

$$M_{Ox} = \sum_{i=1}^n M_{ix} = 0 \quad M_{Oy} = \sum_{i=1}^n M_{iy} = 0 \quad M_{Oz} = \sum_{i=1}^n M_{iz} \neq 0 \quad (3.59)$$

Sintetizând, torsorul de reducere al forțelor coplanare va fi:

$$\tau_O \begin{cases} \bar{R} = X\bar{i} + Y\bar{j} & (Z = 0) \\ \bar{M}_O = M_{Oz}\bar{k} & (M_{Ox} = M_{Oy} = 0) \end{cases} \quad (3.60)$$

Rezultanta sistemului este și ea coplanară cu forțele ce îl compun, în timp ce momentul rezultat este perpendicular pe planul acestora. Efectul sistemului va consta dintr-o tendință de translatare în plan a corpului, simultană cu o rotație în jurul unei axe perpendiculare pe plan.

Referitor la invarianții sistemului se observă că

$$\bar{R} \neq 0 \quad \bar{R} \cdot \bar{M}_O = XM_{Ox} + YM_{Oy} + ZM_{Oz} = 0 \quad M_{min} = \frac{\bar{R} \cdot \bar{M}_O}{|\bar{R}|} = 0 \quad (3.61)$$

În consecință, sistemul de forțe coplanare nu va putea fi echivalat cu un torsor minimal. Făcând înlocuirile corespunzătoare în ecuația (3.54) a axei centrale, respectiv

$$\frac{zY}{X} = \frac{-zX}{Y} = \frac{M_{Oz} - (xY - yX)}{0} \quad (3.62)$$

se obține

$$z = 0 \quad y = \frac{Y}{X}x - \frac{M_{Oz}}{X} \quad (3.63)$$

Aceste relații demonstrează că axa centrală este și ea coplanară cu forțele sistemului.

Referitor la cazurile de reducere analizate în cap.3.4.5, echivalența valabilă în cazul forțelor coplanare este:

Cazul 1 :  $\bar{R} = 0, \bar{M}_O = 0$  – echilibru;

Cazul 2 :  $\bar{R} = 0, \bar{M}_O \neq 0$  – cuplu de forțe acționând în planul sistemului sau paralel cu acesta;

Cazul 3 :  $\bar{R} \neq 0, \bar{M}_O = 0$  – forță unică, egală cu rezultanta, acționând în punctul  $O$ ;

Cazul 4 :  $\bar{R} \neq 0, \bar{M}_O \neq 0$  – forță unică, egală cu rezultanta, acționând pe axa centrală.

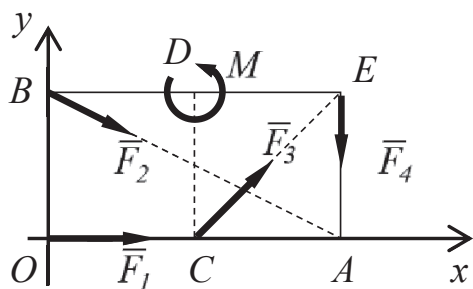


Fig.3.31

Tabelul 3.2

	$F_x$	$F_y$	$M_z$
$\bar{F}_1$	$2P$	$0$	$0$
$\bar{F}_2$	$-P$	$2P$	$-2Pa$
$\bar{F}_3$	$P$	$P$	$Pa$
$\bar{F}_4$	$0$	$-P$	$-2Pa$
$\bar{M}$	-	-	$4Pa$
$\Sigma$	$2P$	$2P$	$Pa$

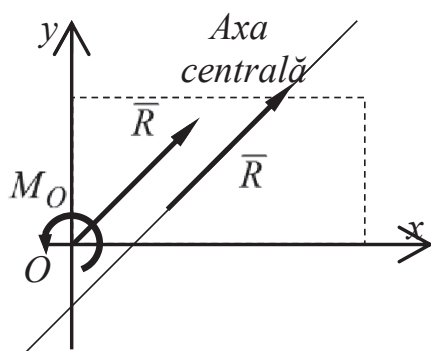


Fig.3.32

**Problema 3.2:** Se dă un sistem de forțe aplicat unui dreptunghi având laturile suprapuse axelor de coordonate ca în fig.3.31.

**Date:**  $OA = 2a$ ,  $OB = OC = a$ ,

$$|\bar{F}_1| = 2P, |\bar{F}_2| = \sqrt{5}P, |\bar{F}_3| = \sqrt{2}P, |\bar{F}_4| = P,$$

$$|\bar{M}| = 4Pa$$

**Cerute:**  $-\tau_O(\bar{R}, \bar{M}_O)$

- echivalența sistemului;
- axa centrală;
- reprezentarea grafică a elementelor de reducere.

**Rezolvare:** Forțele sistemului au proiecții numai pe axele  $Ox$  și  $Oy$  iar momente numai față de axa  $Oz$ . Proiecțiile sunt grupate în tabelul 3.2. Proiecțiile pe axe ale rezultantei și momentului rezultat se găsesc prin însumarea coloanelor tabelului. Torsorul de reducere în punctul  $O$  va avea în consecință componentele:

$$\bar{R} = 2P\bar{i} + 2P\bar{j} \quad \bar{M}_O = Pa\bar{k}$$

Atât rezultanta cât și momentul rezultat sunt diferite de 0 astfel că sistemul de forțe dat se încadrează în cazul 4 de reducere, respectiv este echivalent cu o forță unică acționând pe axa centrală. Ecuația acesteia se obține făcând înlocuirile în rel.(3.63):

$$y = x - \frac{a}{2}$$

Rezultatele reducerii sunt puse în evidență în fig.3.32

### 3.4.2 Reducerea forțelor paralele

Pornind de la forma generală a torsorului de reducere în  $O$ , respectiv:

$$\tau_O \begin{cases} \bar{R} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i \\ \bar{M}_O = \sum_{i=1}^n \bar{M}_i = \sum_{i=1}^n (\bar{r}_i \times \bar{F}_i) \end{cases} \quad (3.64)$$

toate relațiile stabilite în cap.3.3 își păstrează valabilitatea și în cazul forțelor paralele cu o direcție dată.

Particularitățile reducerii în acest caz sunt mai ușor de evidențiat dacă direcției generale a forțelor  $i$  se atașează un versor  $\bar{u}$  (fig.3.33). Pentru o forță oarecare din sistem se poate scrie

$$\bar{F}_i = F_i \bar{u} \quad (3.65)$$

în care  $F_i$  reprezintă proiecția forței pe direcția comună. Rezultanta are forma:

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i = \sum_{i=1}^n F_i \bar{u} = \left( \sum_{i=1}^n F_i \right) \bar{u} = R \bar{u} \quad (3.66)$$

în care s-a notat proiecția rezultantei pe direcția forțelor sistemului:

$$R = \sum_{i=1}^n F_i \quad (3.67)$$

Pentru momentul resultant se poate scrie:

$$\begin{aligned} \bar{M}_O &= \sum_{i=1}^n (\bar{r}_i \times \bar{F}_i) = \sum_{i=1}^n (\bar{r}_i \times F_i \bar{u}) = \\ &= \sum_{i=1}^n (F_i \bar{r}_i \times \bar{u}) = \left( \sum_{i=1}^n F_i \bar{r}_i \right) \times \bar{u} \end{aligned} \quad (3.68)$$

Recapitulând, torsorul are forma finală:

$$\tau_O \left\{ \begin{aligned} \bar{R} &= \left( \sum_{i=1}^n F_i \right) \bar{u} = R \bar{u} \\ \bar{M}_O &= \left( \sum_{i=1}^n F_i \bar{r}_i \right) \times \bar{u} \end{aligned} \right. \quad (3.69)$$

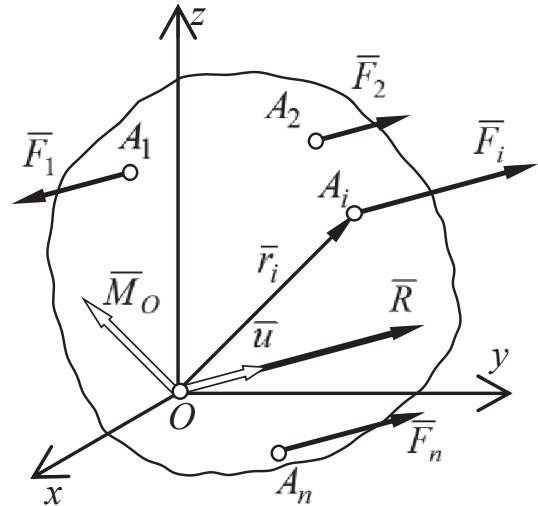


Fig.3.33

Aceste relații indică faptul că rezultanta are aceeași direcție cu forțele date, în timp ce momentul resultant este perpendicular pe aceasta.

Invarianții sistemului de forțe paralele sunt:

$$\bar{R} \neq 0 \quad \bar{R} \cdot \bar{M}_O = \bar{R} \cdot \left[ \left( \sum F_i \bar{r}_i \right) \times \bar{u} \right] = 0 \quad M_{min} = \frac{\bar{R} \cdot \bar{M}_O}{|\bar{R}|} = 0 \quad (3.70)$$

Rezultă că și sistemul forțelor paralele nu poate fi echivalent cu un torsor minimal. Echivalențele posibile, evidențiate de cazurile de reducere sunt:

Cazul 1 :  $\bar{R} = 0$ ,  $\bar{M}_O = 0$  – echilibru;

Cazul 2 :  $\bar{R} = 0$ ,  $\bar{M}_O \neq 0$  – cuplu de forțe;

Cazul 3 :  $\bar{R} \neq 0$ ,  $\bar{M}_O = 0$  – forță unică, egală cu rezultanta, în punctul  $O$ ;

Cazul 4 :  $\bar{R} \neq 0$ ,  $\bar{M}_O \neq 0$  – forță unică, egală cu rezultanta, acționând pe axa centrală.

Referitor la axa centrală trebuie pusă în evidență o particularitate deosebit de importantă. Se explicitează în cele ce urmează vectorul de poziție  $\bar{r} = \overline{OP}$  al unui punct oarecare  $P$  aparținând axei centrale (fig.3.34). Pe baza formulei de variație a torsorului se poate scrie:

$$\bar{M}_P = \bar{M}_O - \overline{OP} \times \bar{R} = 0 \quad (3.71)$$

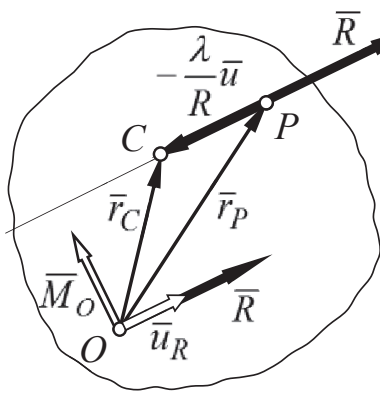


Fig.3.34

Cu referire la (3.68) se prelucrează relația astfel obținută:

$$\begin{aligned} (\sum F_i \bar{r}_i) \times \bar{u} - \bar{r} \times R\bar{u} &= (\sum F_i \bar{r}_i) \times \bar{u} - R\bar{r} \times \bar{u} = \\ &= [(\sum F_i \bar{r}_i) - R\bar{r}] \times \bar{u} = 0 \end{aligned} \quad (3.72)$$

Un produs vectorial este nul în cazul în care vectorii înmulțiți sunt coliniari; pe de altă parte, între vectorii coliniari există o relație de forma (2.23). În consecință:

$$(\sum F_i \bar{r}_i) - R\bar{r} = \lambda \bar{u} \quad (3.73)$$

$\lambda$  fiind un scalar oarecare. Rezultă imediat:

$$\bar{r} = \frac{\sum F_i \bar{r}_i}{R} - \frac{\lambda \bar{u}}{R} = \bar{r}_C - \overline{PC} = \bar{r}_C + \overline{CP} \quad (3.74)$$

Se pune în evidență astfel existența unui punct  $C$  pe axa centrală a sistemului de forțe paralele, punct a cărui poziție:

$$\bar{r}_C = \frac{1}{R} \sum_{i=1}^n F_i \bar{r}_i \quad \left( \text{în care } R = \sum_{i=1}^n F_i \right) \quad (3.75)$$

nu depinde de direcția forțelor ci numai de mărimile lor  $F_i$  și de pozițiile  $\bar{r}_i$  ale punctelor lor de aplicație. Acest punct remarcabil este numit *centrul forțelor paralele* și are următoarele proprietăți:

1) Dacă toate forțele sistemului își schimbă direcția (nu și mărimea sau punctul de aplicație), noua axă centrală a sistemului va trece prin același punct  $C$ ; proprietatea este evidentă prin aceea că în rel.(3.74) nu apare versorul  $\bar{u}$  ;

2) Amplificând toate forțele sistemului cu un factor oarecare  $k$ , poziția centrului forțelor paralele nu se modifică. Făcând schimbarea  $F_i \leftarrow kF_i$  rezultă:

$$\frac{\sum (kF_i) \bar{r}_i}{\sum (kF_i)} = \frac{k \sum F_i \bar{r}_i}{k \sum F_i} = \frac{\sum F_i \bar{r}_i}{\sum F_i} = \bar{r}_C \quad (3.76)$$

3) Poziția centrului forțelor paralele nu depinde de originea sistemului de referință considerat. Astfel, schimbând originea din  $O$  în  $O_1$ , pentru vectorii de poziție ai punctelor de aplicație ale forțelor devin  $\bar{r}_i \leftarrow \bar{r}_i - \overline{OO_1}$  și în consecință:

$$\frac{\sum F_i (\bar{r}_i - \overline{OO_1})}{R} = \frac{\sum F_i \bar{r}_i}{R} - \overline{OO_1} \frac{\sum F_i}{R} = \bar{r}_C - \overline{OO_1} \quad (3.77)$$

Vectorul  $\bar{r}_C$  s-a modificat cu același vector  $\overline{OO_1}$  ca și vectorii de poziție  $\bar{r}_i$ , ceea ce indică faptul că poziția relativă a centrului forțelor paralele în raport cu punctul de aplicație al forțelor a rămas aceeași.

Considerând pentru vectorii de poziție din relația (3.75) definițiile analitice:

$$\bar{r}_C = x_C \bar{i} + y_C \bar{j} + z_C \bar{k} \quad \bar{r}_i = x_i \bar{i} + y_i \bar{j} + z_i \bar{k} \quad (3.78)$$

rezultă coordonatele centrului forțelor paralele:

$$x_C = \frac{1}{R} \sum_{i=1}^n F_i x_i \quad y_C = \frac{1}{R} \sum_{i=1}^n F_i y_i \quad z_C = \frac{1}{R} \sum_{i=1}^n F_i z_i \quad (3.79)$$

**Problema 3.3:** Să se facă reducerea sistemului de forțe paralele cu direcția  $Oz$  din fig.3.35 ale căror puncte de aplicație se află pe o grilă echidistantă situată în planul  $Oxy$ .

**Date:**  $a$  (echidistanța);  
 $P$  (forța unitară).

**Cerute:** –  $\bar{R}, \bar{M}_O$ ;

- coordonatele centrului forțelor paralele, ecuația axei centrale;
- reprezentarea grafică a elementelor de reducere.

**Rezolvare:** În tabelul 3.3 sunt date proiecțiile pe axa  $Oz$  ale forțelor și momentele lor față de axele  $Ox$  și  $Oy$ . În plus, sunt date și elementele necesare calculării poziției centrului forțelor paralele.

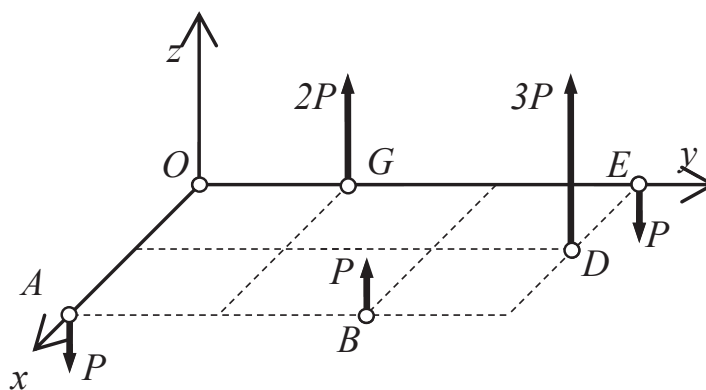


Fig.3.35

**Tabelul 3.3**

	$x_i$	$y_i$	$F_i$	$M_{ix}$	$M_{iy}$	$F_i x_i$	$F_i y_i$
A	$2a$	$0$	$-P$	$0$	$2Pa$	$-2Pa$	$0$
B	$2a$	$2a$	$P$	$2Pa$	$-2Pa$	$2Pa$	$2Pa$
D	$a$	$3a$	$3P$	$9Pa$	$-3Pa$	$3pa$	$9Pa$
E	$0$	$3a$	$-P$	$-3Pa$	$0$	$0$	$-3Pa$
G	$0$	$a$	$2P$	$2Pa$	$0$	$0$	$2Pa$
$\Sigma$	-	-	$4P$	$10Pa$	$-3pa$	$3Pa$	$10Pa$

Cu rezultatele din linia de însumare se poate exprima torsorul de reducere :

$$\tau_O \begin{cases} \bar{R} = 4P\bar{k} \\ \bar{M}_O = 10Pa\bar{i} - 3Pa\bar{j} \end{cases}$$

Ecuția generală (3.54) a axei centrale, aplicată în acest caz, conduce la  
 $4y - 10a = 0$      $4x - 3a = 0$   
reprezentând ecuațiile a două plane a căror intersecție este axa căutăată.

Pentru centrul forțelor paralele se fac înlocuirile în rel.(3.79).

$$x_C = \frac{3}{4}a = 0,75a \quad y_C = \frac{10}{4}a = 2,5a \quad z_C = 0$$

Elementele de reducere sunt reprezentate în fig.3.36.

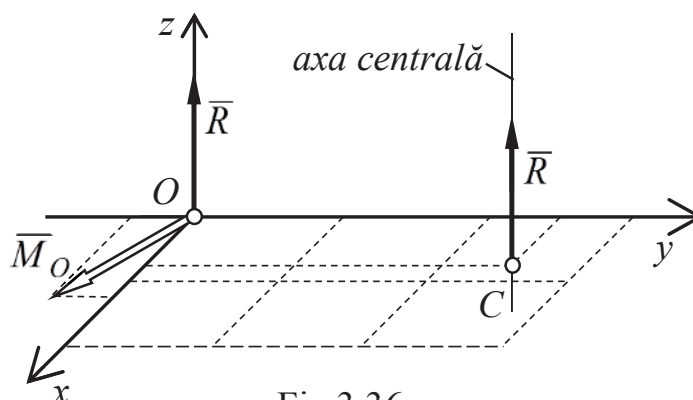


Fig.3.36

### 3.4.3 Reducerea forțelor distribuite

Sistemele analizate în capitolele precedente au fost compuse din forțe concurente având fiecare câte un punct de aplicație. Spre deosebire de acestea, forțele distribuite acționează continuu în lungul unei linii sau pe o suprafață. Unitățile de măsură pentru forțele distribuite sunt  $N/m$  și respectiv  $N/m^2$ . În cele mai frecvente situații forțele distribuite sunt paralele și au același sens. De obicei ele se reprezintă grafic printr-un șir de săgeți paralele iar continuitatea de acțiune se marchează prin unirea extremităților acestora printr-o curbă sau o suprafață care caracterizează legea de distribuție a acestor forțe. Pentru notarea forțelor distribuite se utilizează de obicei litere mici.

După cum s-a arătat în capitolul precedent, forțele paralele se reduc în cazul cel mai general la o rezultantă având direcția acestor forțe, coliniară cu axa centrală. Pentru simplificarea tratării se consideră că forțele distribuite sunt perpendiculare pe linia sau pe suprafața asupra căreia sunt aplicate, alte cazuri putându-se rezolva în mod analog.

Reducerea forțelor distribuite constă în calculul mărimii rezultantei și în determinarea poziției axei centrale; sensul rezultantei este evident cel al forțelor distribuite. Relațiile stabilite în capitolul anterior pentru cazul forțelor concentrate se modifică în cazul forțelor distribuite continuu prin transformarea sumelor în integrale pe domeniul ( $D$ ) de acțiune al acestora, fie acesta linie sau suprafață. Pentru rezultantă, notată prin  $Q$ , relația (3.67) va deveni:

$$Q = \int_{(D)} dQ \quad (3.80)$$

unde  $dQ$  corespunde unei porțiuni elementare din domeniul de aplicare.

Pentru poziția axei centrale se pornește de la coordonatele centrului  $C$  al forțelor paralele (rel.3.79) care în acest caz devin:

$$x_C = \frac{1}{Q} \int_{(D)} x dQ \quad y_C = \frac{1}{Q} \int_{(D)} y dQ \quad z_C = \frac{1}{Q} \int_{(D)} z dQ \quad (3.81)$$

Relațiile generale se detaliază în funcție de situația concretă de distribuire.

*a) Forțe distribuite în lungul unei bare rectilinii (fig.3.37).*

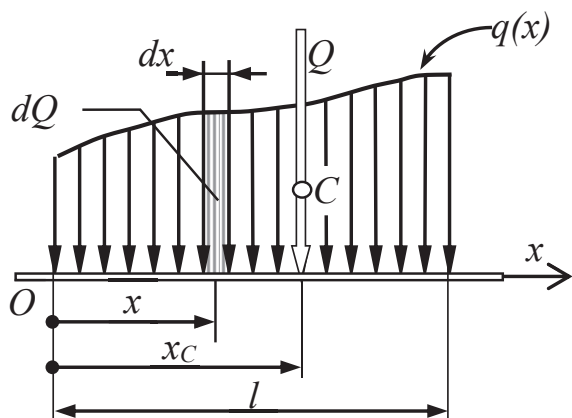


Fig.3.37

Variația forței distribuite este de forma  $q = q(x)$ , domeniul de acțiune fiind segmentul de lungime  $l$ . Pe o lungime elementară  $dx$  va acționa  $dQ = q dx$ . În reprezentarea grafică se observă că  $dQ$  corespunde unei arii elementare din diagrama de reprezentare a forței distribuite; prin urmare rezultanta  $Q$  va fi echivalentă cu întreaga arie a acestei diagrame.

$$Q = \int_{(l)} dQ = \int_0^l q dx \quad x_C = \frac{1}{Q} \int x dq = \frac{1}{Q} \int_0^l xq dx \quad (3.82)$$

Anticipând cele ce vor fi studiate în cap.4 se poate face o remarcă, utilă în aplicațiile practice: *rezultanta forțelor distribuite perpendicular pe o bară rectilinie este numeric egală cu aria diagramei de reprezentare și trece prin centrul de masă al acestei diagrame.*

*Exemplu:* Fie distribuția trapezoidală din fig.3.38 în care la extremitățile segmentului  $AB = l$  forța distribuită are valorile  $q_0$  și  $q_1$ . În ecuația generală a unei drepte care trece prin două puncte de coordonate  $(x_1, y_1)$  și  $(x_2, y_2)$ , scrisă sub forma unui determinant, se fac înlocuirile corespunzătoare:

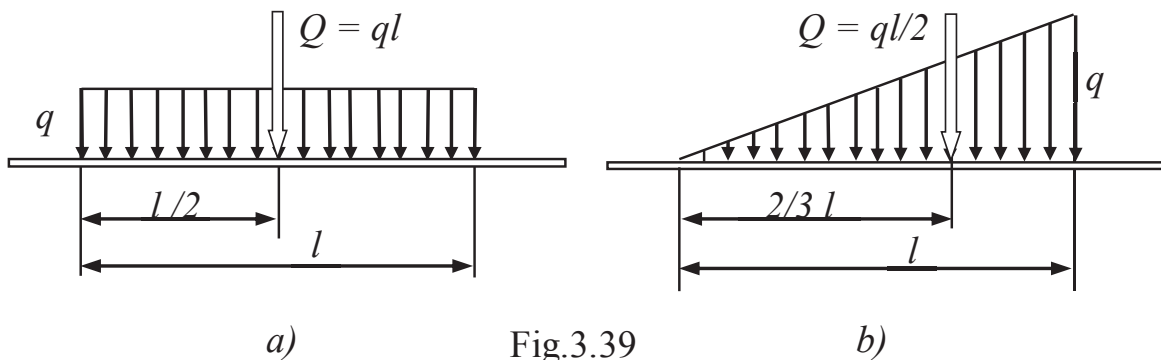
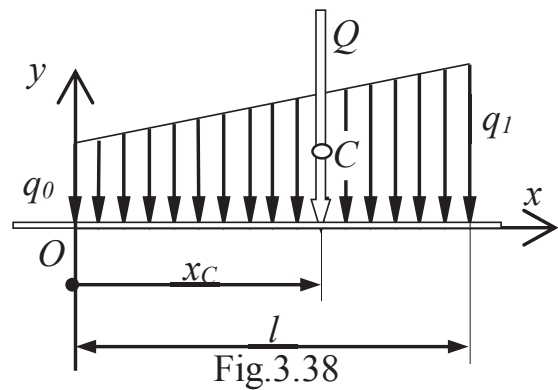
$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & q & 1 \\ 0 & q_0 & 1 \\ l & q_1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (3.83)$$

și, prin dezvoltarea acestui determinant, rezultă legea de variație a forței distribuite:

$$q = q_0 + \frac{x}{l}(q_1 - q_0) \quad (3.84)$$

Efectuând calculele se obține:

$$Q = \frac{1}{2}(q_0 + q_1)l \quad x_C = \frac{q_0 + 2q_1}{3(q_0 + q_1)}l \quad (3.85)$$



În cazul frecvent al unei distribuții constante,  $q_0 = q_1 = q$  (fig. 3.39, a), se găsesc valorile evidente:

$$Q = ql \quad x_C = l/2 \quad (3.86)$$

Pentru o distribuție triunghiulară (fig. 3.39, b), în care  $q_0 = 0$  și  $q_1 = q$ ,

$$Q = ql/2 \quad x_C = 2l/3 \quad (3.87)$$

*b) Forțe distribuite pe o suprafață plană (fig. 3.40).*

Variația acestora are forma  $q = q(x, y)$ . Pentru o arie elementară  $dA$  forța elementară va fi  $dQ = q dA = q dx dy$  și în consecință se obțin relațiile:

$$Q = \int_{(A)} dQ = \int_{(A)} q dA \quad x_C = \frac{1}{Q} \int x dQ = \frac{1}{Q} \int xq dA \quad y_C = \frac{1}{Q} \int y dQ = \frac{1}{Q} \int yq dA \quad (3.88)$$



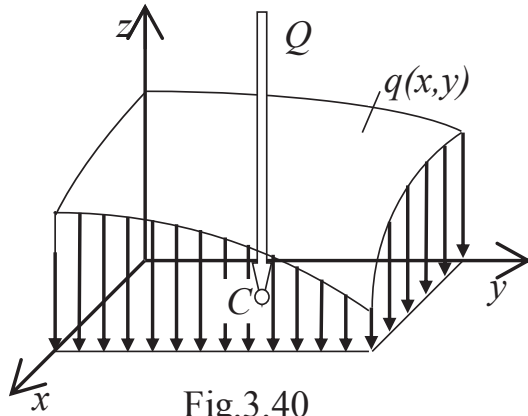


Fig.3.40

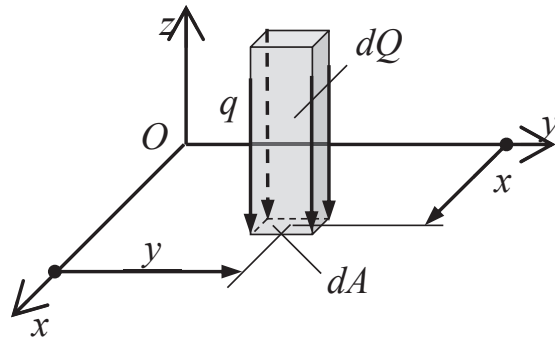


Fig.3.41

Ca și în cazul precedent, în reprezentarea grafică din fig.3.41 se observă că  $dQ$  corespunde unui volum elementar din domeniul tridimensional de reprezentare și deci rezultanta  $Q$  va fi echivalentă întregului volum.

Și în acest caz se poate formula observația: *rezultanta forțelor distribuite perpendicular pe o suprafață plană este numeric egală cu volumul domeniului de reprezentare și trece prin centrul de masă al acestuia.*

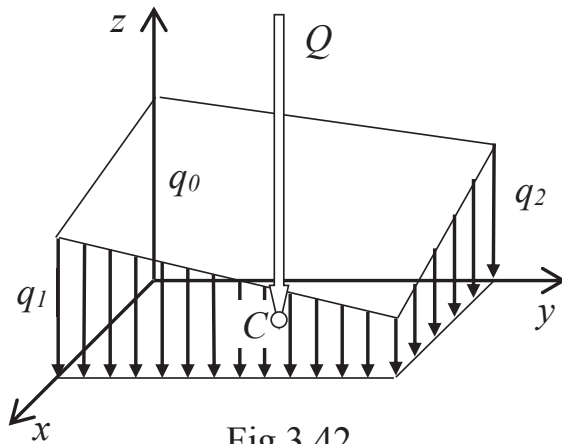


Fig.3.42

Exemplu: Placa dreptunghiulară plană din fig. 3.42 este acționată de o forță distribuită sub forma unei prisme mărginită superior de un plan oblic. Se cunosc lungimile  $l_1$  și  $l_2$  precum și valorile  $q_0, q_1, q_2$  în punctele extreme.

Legea de variație a forței distribuite se poate deduce din ecuația generală a unui plan care trece prin trei puncte în care se înlocuiesc coordonatele cu valorile date.

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & q & 1 \\ 0 & 0 & q_0 & 1 \\ l_1 & 0 & q_1 & 1 \\ 0 & l_2 & q_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (3.89)$$

Rezultă distribuția

$$q = q_0 + \frac{x}{l_1}(q_1 - q_0) + \frac{y}{l_2}(q_2 - q_0) \quad (3.90)$$

Se înlocuiește  $q$  în relațiile (3.88) și după efectuarea calculelor rezultă:

$$Q = \frac{1}{2}l_1l_2(q_1 + q_2) \quad x_C = \frac{4q_1 + 3q_2 - q_0}{6(q_1 + q_2)} \quad y_C = \frac{4q_2 + 3q_1 - q_0}{6(q_1 + q_2)} \quad (3.91)$$

Prin particularizarea valorilor extreme se pot găsi relațiile de calcul în diferite situații. Astfel, se verifică ușor că pentru o distribuție uniformă, la care  $q_0 = q_1 = q_2 = q$ , se obțin rezultatele previzibile:

$$Q = l_1l_2q \quad x_C = l_1/2 \quad y_C = l_2/2 \quad (3.92)$$

## 4. CENTRE DE MASĂ

### 4.1 Generalități

Forțele gravitaționale reprezintă cazul clasic de forțe paralele. În conformitate cu cele arătate în capitolul anterior, aceste forțe pot fi reduse la o rezultantă aplicată în centrul forțelor paralele care în acest caz devine *centrul de greutate*.

Pentru un singur punct material (fig.4.1) vectorul greutatei este definit prin

$$\bar{G} = m\bar{g} \quad (4.1)$$

în care  $m$  este masa punctului și  $\bar{g}$  vectorul accelerației gravitaționale, având direcția verticală și sensul către pământ. La nivel scalar se poate scrie  $G = mg$ , vectorii fiind coliniari, cu direcții și sensuri constante. La nivelul suprafeței terestre accelerația gravitațională este relativ constantă, fiind dependentă de latitudinea geografică. Ea variază între  $g = 9,781 \text{ m/s}^2$  la ecuator și  $g = 9,831 \text{ m/s}^2 \approx 9,81 \text{ m/s}^2$ .

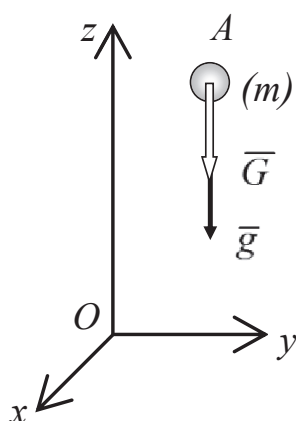


Fig.4.1

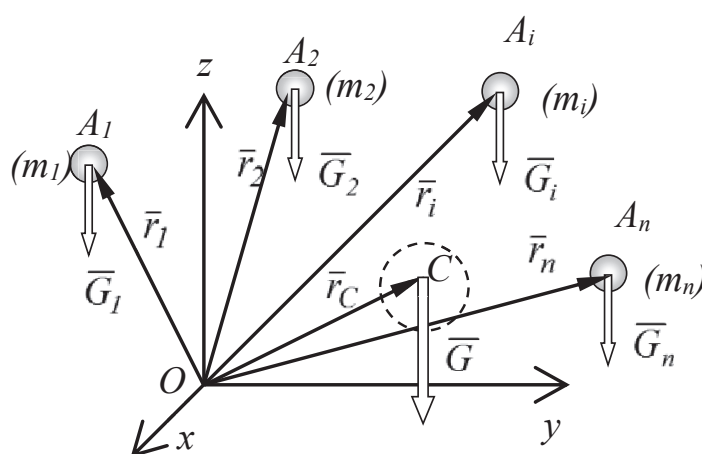


Fig.4.2

### 4.2 Centrul de masă al unui sistem de puncte materiale

Pentru sistemul de forțe paralele din fig.4.2, alcătuit din greutatele punctelor, rezultanta (greutatea totală) este

$$G = G_1 + G_2 + \dots + G_n = \sum_{i=1}^n G_i \quad (4.2)$$

care se mai poate scrie

$$G = \sum_{i=1}^n m_i g = \left( \sum_{i=1}^n m_i \right) g = mg \quad (4.3)$$

$$m = \sum_{i=1}^n m_i \quad (4.4)$$

S-a notat prin  $m$  masa totală a sistemului. Pornind de la poziția centrului forțelor paralele în cazul general (rel.3.72), poziția centrului de greutate al sistemului este dată de relația:

$$\bar{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^n G_i \bar{r}_i}{\sum_{i=1}^n G_i} = \frac{1}{G} \sum_{i=1}^n G_i \bar{r}_i \quad (4.5)$$

Prelucrând această relație se obține

$$\bar{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^n m_i g \bar{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i g} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \bar{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i \bar{r}_i \quad (4.6)$$

Se constată că poziția centrului de greutate depinde numai de masele punctelor și de pozițiile lor relative (s-a arătat mai înainte că poziția centrului forțelor paralele nu depinde de sistemul de referință considerat). Din acest motiv în mod curent centrul de greutate este numit *centru de masă*.

Într-un sistem de referință cartezian coordonatele centrului de masă sunt date de relațiile

$$x_C = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i x_i \quad y_C = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i y_i \quad z_C = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i z_i \quad (4.7)$$

Produsul dintre masa unui punct material și distanța sa la un plan oarecare poartă numele de *moment static* al punctului față de planul respectiv. Relațiile

$$m\bar{r}_C = \sum m_i \bar{r}_i \quad mx_C = \sum m_i x_i \quad my_C = \sum m_i y_i \quad mz_C = \sum m_i z_i \quad (4.8)$$

pun în evidență *teorema momentelor statice* care se enunță: *momentul static al unui sistem de puncte materiale (SPM) față de orice plan este echivalent cu momentul static față de același plan al unui singur punct material având masa totală a sistemului și poziția centrului de masă a acestuia*. Relațiile (4.8) sunt utile într-o serie de demonstrații. Aceleași relații pun în evidență și următoarele aspecte:

– dacă momentul static al unui SPM față de un plan este nul, atunci centrul de masă al acestuia se află în acest plan; astfel, dacă  $\sum m_i x_i = 0$  atunci  $x_C = 0$  și  $C \in (xOy)$ ;

– dacă momentele statice ale unui SPM față de două plane concurente sunt nule, atunci centrul său de masă se află pe dreapta de intersecție a planelor; pentru  $\sum m_i x_i = \sum m_i y_i = 0$  rezultă  $x_C = y_C = 0$  și deci  $C \in (Oz)$ ;

– dacă momentele statice ale unui SPM față de trei plane concurente sunt nule, atunci centrul de masă al acestuia se află în punctul de intersecție al planelor; pentru  $\sum m_i x_i = \sum m_i y_i = \sum m_i z_i = 0$  rezultă  $x_C = y_C = z_C = 0$  și deci  $C \equiv O$ .

Observațiile de mai sus sunt și mai evidente în cazul existenței unor simetrii. *Dacă un sistem de puncte materiale are un punct, o axă sau un plan de simetrie, atunci centrul său de masă se va găsi în acel punct, pe acea axă sau în acel plan*.

### 4.3 Centrul de masă al unui corp solid rigid

Forțele de greutate sunt distribuite în tot domeniul  $(D)$  ocupat de corp. Astfel, considerând greutatea elementară  $dG = g dm$  se obține greutatea totală

$$G = \int_{(D)} dG = g \int_{(m)} dm = mg \quad (4.9)$$

în care masa corpului este

$$m = \int_{(m)} dm \quad (4.10)$$

Pe baza relației (4.6), centrul de masă va avea poziția:

$$\bar{r}_C = \frac{\int_{(m)} \bar{r} dm}{\int_{(m)} dm} = \frac{1}{m} \int_{(m)} \bar{r} dm \quad (4.11)$$

Coordonatele centrului de masă sunt

$$x_C = \frac{1}{m} \int_{(m)} x dm \quad y_C = \frac{1}{m} \int_{(m)} y dm \quad z_C = \frac{1}{m} \int_{(m)} z dm \quad (4.12)$$

Ca și în cazul sistemului de puncte materiale aceste relații pot fi puse sub forma:

$$m\bar{r}_C = \int_{(m)} \bar{r} dm \quad mx_C = \int_{(m)} x dm \quad my_C = \int_{(m)} y dm \quad mz_C = \int_{(m)} z dm \quad (4.13)$$

Integralele din partea dreaptă reprezintă momentele statice ale corpului față de planele de coordonate. Teorema momentelor statice enunțată anterior pentru un sistem de puncte materiale capătă formularea: *momentul static al unui corp față de orice plan este echivalent cu momentul static față de planul respectiv al unui punct material având masa corpului și poziția centrului de masă al acestuia.*

### 4.4 Corpuri omogene.

#### 4.4.1 Densitatea

În general, pentru un corp oarecare de volum  $V$  și masa  $m$  se definește **densitatea medie**  $\rho_{med} = m/V$  reprezentând masa unității de volum. Pentru un volum elementar  $dV$  având masa  $dm$  este definită **densitatea locală**  $\rho = dm/dV$ . La **corpurile neomogene** densitatea locală variază de la un punct la altul,  $\rho = \rho(x, y, z)$ ; în cazul cel mai frecvent, cel al **corpurilor omogene**, densitatea are aceeași valoare în orice punct al corpului, respectiv  $\rho = const.$

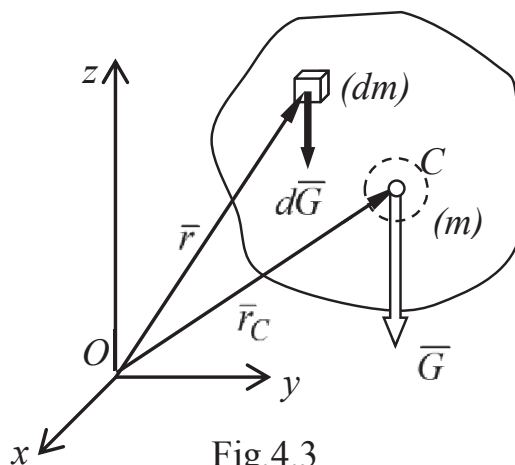


Fig.4.3

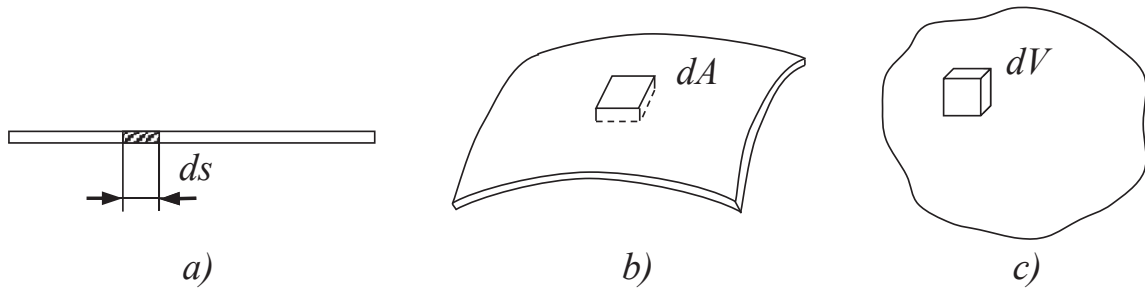


Fig. 4.4

Pentru modelele de corpuri omogene tratate în Mecanică se pot utiliza forme particulare ale densității adecvate acestora, după cum urmează:

- *bare* (fig. 4.4, a) - **densitatea liniară** (kg/m):

$$\rho_l = dm/ds \quad (4.14)$$

- *plăci* (fig. 4.4, b) - **densitatea superficială** (kg/m<sup>2</sup>):

$$\rho_A = dm/dA \quad (4.15)$$

- *volume* (fig. 4.4, c) - **densitatea volumică** (kg /m<sup>3</sup>):

$$\rho_V = \rho = dm/dV \quad (4.16)$$

#### 4.4.2 Poziția centrului de masă.

Plecând de la relațiile generale (4.11) se pot face particularizări pentru fiecare din modelele de corpuri, după cum urmează:

a) Bare ( $\rho_l = \text{const.}$ ,  $dm = \rho_l ds$ )

$$\begin{cases} m = \int_{(m)} dm = \int_{(l)} \rho_l ds = \rho_l \int_{(l)} ds = \rho_l l \\ \bar{r}_C = \frac{1}{m} \int_{(m)} \bar{r} dm = \frac{1}{\rho_l l} \int_{(l)} \bar{r} \rho_l ds = \frac{1}{l} \int_{(l)} \bar{r} ds \end{cases} \quad (4.17)$$

În relațiile de mai sus se remarcă simplificarea densității liniare  $\rho_l$ . Pentru calculul lungimii și coordonatelor centrului de masă rezultă relațiile generale:

$$\begin{cases} l = \int_{(l)} ds \\ x_C = \frac{1}{l} \int_{(l)} x ds \quad y_C = \frac{1}{l} \int_{(l)} y ds \quad z_C = \frac{1}{l} \int_{(l)} z ds \end{cases} \quad (4.18)$$

b) Plăci ( $\rho_A = \text{const.}$ ,  $dm = \rho_A dA$ ). Procedând analog, se obține:

$$m = \rho_A A \quad \bar{r}_C = \frac{1}{A} \int_{(A)} \bar{r} dA \quad (4.19)$$

iar pentru coordonate:

$$\left\{ \begin{array}{l} A = \int_{(A)} dA \\ x_C = \frac{1}{A} \int_{(A)} x dA \quad y_C = \frac{1}{A} \int_{(A)} y dA \quad z_C = \frac{1}{A} \int_{(A)} z dA \end{array} \right. \quad (4.20)$$

c) Volume ( $\rho_V = \text{const.}, dm = \rho_V dV$ ). Se obține:

$$m = \rho_V V \quad \bar{r}_C = \frac{1}{V} \int_{(V)} \bar{r} dV \quad (4.21)$$

și, în continuare:

$$\left\{ \begin{array}{l} V = \int_{(V)} dV \\ x_C = \frac{1}{V} \int_{(V)} x dV \quad y_C = \frac{1}{V} \int_{(V)} y dV \quad z_C = \frac{1}{V} \int_{(V)} z dV \end{array} \right. \quad (4.22)$$

Din examinarea grupurilor de relații de mai sus rezultă câteva observații importante:

- poziția centrului de masă al unui corp nu depinde de materialul din care este confecționat ci numai de forma acestuia (ca urmare a simplificării densității); corpi identice dar din materiale diferite au centrul de masă în aceeași poziție;
- poziția centrului de masă în raport cu corpul nu depinde de sistemul de referință (urmare a proprietăților centrului forțelor paralele, evidențiate anterior);
- dacă un corp are un punct, o axă sau un plan de simetrie, centrul său de masă se va găsi în acel punct, pe acea axă sau în acel plan (pe domenii simetrice integralele sunt nule).

Dacă în calculele efective se alege un segment elementar  $ds$ , o arie elementară  $dA$  sau un volum elementar  $dV$  de o anumită configurație, variabilele  $x, y, z$  de sub integralele de calcul ale coordonatelor centrului de masă se vor referi la poziția centrului de masă al figurii elementare respective. Precizarea este necesară în special atunci când corpurile studiate sunt descrise prin ecuații în coordonate carteziane.

#### 4.4.3 Corpuri definite analitic.

O serie de corpuri omogene pot fi descrise total sau parțial prin ecuațiile matematice ale unor curbe sau, după caz, suprafețe.

Principalele situații de definiții matematice sunt următoarele:

- linia mediană a unei bare, printr-o curbă plană sau în spațiu;
- conturul unei plăci plane, prin curbe coplanare cu ea;
- suprafața mediană a unei plăci și curbele prin care ea este delimitată;
- învelișul unui volum, prin suprafețe plane sau în spațiu.

În cele ce urmează se tratează câteva situații mai importante la care se pot obține relativ ușor soluții analitice.

#### 4.4.4 Curbe plane

Pentru simplificare se consideră un arc de curbă  $AB$  (fig. 4.5) conținut într-un plan  $yOx$ . Relațiile generale pentru calculul lungimii arcului și al poziției centrului său de masă sunt:

$$l = \int_{(l)} ds \quad x_C = \frac{1}{l} \int_{(l)} x ds \quad y_C = \frac{1}{l} \int_{(l)} y ds \quad (4.23)$$

Pentru arcul elementar  $ds$  din fig. 4.6, legătura dintre coordonatele  $x$  și  $y$  ale centrului său de masă este făcută de relația prin care este dată curba respectivă. Lungimea arcului elementar se poate defini prin

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} \quad (4.24)$$

relație care poate lua diferite forme în funcție de modul de reprezentare al curbei.

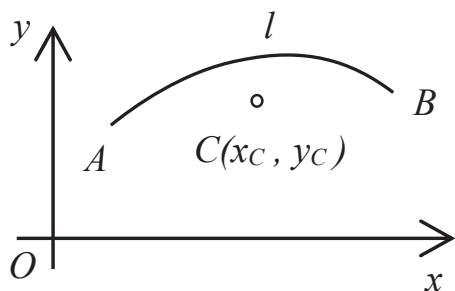


Fig. 4.5

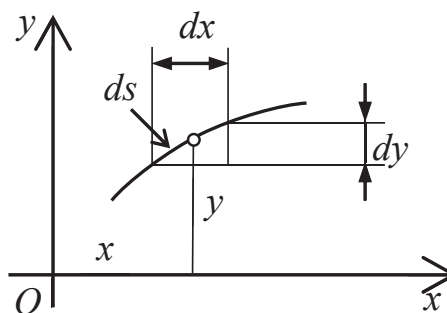


Fig. 4.6

Pentru o curbă plană relația matematică de definiție poate avea mai multe moduri de reprezentare, relațiile (4.23) luând forme specifice.

a) *Reprezentarea parametrică.* Considerând un parametru independent  $t$ , o curbă oarecare este dată prin relații de forma

$$x = x(t) \quad y = y(t) \quad (4.25)$$

Arcul de curbă elementar se poate scrie

$$ds = dt \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt \quad (4.26)$$

Pentru un arc limitat de punctele  $A(t_1)$  și  $B(t_2)$  relațiile (4.23) iau forma

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt \quad (4.27)$$

$$x_C = \frac{1}{l} \int_{t_1}^{t_2} x \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt \quad y_C = \frac{1}{l} \int_{t_1}^{t_2} y \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt$$

Exemplu: Arcul de cicloidă  $OAB$  din fig. 4.7 este definit prin ecuațiile parametrice:

$$x = R(\theta - \sin\theta) \quad y = R(1 - \cos\theta) \quad (4.28)$$

în care  $R$  este raza roții generatoare și  $\theta$  unghiul de rotație al acesteia.

Se calculează derivatele și arcul elementar:

$$x' = R(1 - \cos\theta) \quad y' = R \sin\theta \quad (4.29)$$

$$ds = R\sqrt{(1 - \cos\theta)^2 + \sin^2\theta} d\theta = 2R \sin\frac{\theta}{2} d\theta \quad (4.30)$$

Înlocuind în (4.27) se obține:

$$\begin{cases} l = 2R \int_0^{2\pi} \sin\frac{\theta}{2} d\theta = 8R \\ x_C = \frac{2R^2}{l} \int_0^{2\pi} (\theta - \sin\theta) \sin\frac{\theta}{2} d\theta = \pi R \\ y_C = \frac{2R^2}{l} \int_0^{2\pi} (1 - \cos\theta) \sin\frac{\theta}{2} d\theta = \frac{4}{3}R \end{cases}$$

(4.31)

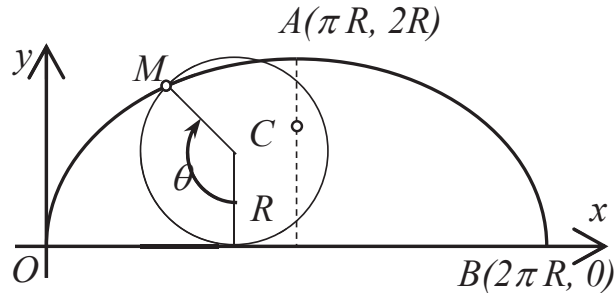


Fig. 4.7

Rezultatul pentru  $x_C$  era previzibil, curba fiind simetrică.

b) *Reprezentarea explicită.* Considerând  $x$  variabilă independentă,

$$y = f(x) \quad y' = \frac{dy}{dx} \quad (4.32) \quad ds = dx\sqrt{1 + (dy/dx)^2} = \sqrt{1 + (y')^2} dx \quad (4.33)$$

Relațiile pentru calculul poziției centrului de masă devin:

$$\begin{cases} l = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (y')^2} dx \\ x_C = \frac{1}{l} \int_{x_1}^{x_2} x \sqrt{1 + (y')^2} dx \\ y_C = \frac{1}{l} \int_{x_1}^{x_2} y \sqrt{1 + (y')^2} dx \end{cases} \quad (4.34)$$

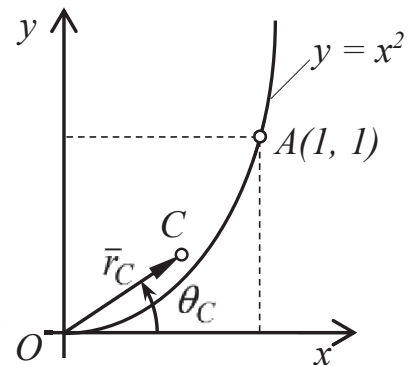


Fig. 4.8

cu observația că  $x_2 > x_1$ , pentru a obține o valoare pozitivă a lungimii arcului de curbă.

*Exemplu.* Pentru arcul de parabolă  $OA$  (fig.4.8) se scriu următoarele relații:

$$y = x^2 \quad y' = 2x \quad ds = \sqrt{1 + 4x^2} dx \quad (4.35)$$

Înlocuind în (4.34) se obține:

$$\begin{cases} l = \int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2} dx = \frac{1}{2}x\sqrt{1 + 4x^2} + \frac{1}{4}\operatorname{argsh}(2x) \\ x_C = \frac{1}{l} \int_0^1 x \sqrt{1 + 4x^2} dx = \frac{1}{12l} \sqrt{(1 + 4x^2)^3} \\ y_C = \frac{1}{l} \int_0^1 x^2 \sqrt{1 + 4x^2} dx = \\ = \frac{1}{16l} \left( x\sqrt{(1 + 4x^2)^3} - \frac{1}{2}x\sqrt{1 + 4x^2} - \frac{1}{4}\operatorname{argsh}(2x) \right) \end{cases} \quad (4.36)$$

În cazul  $A(1,1)$  se obțin valorile numerice  $l = 1,479$ ,  $x_C = 0,630$ ,  $y_C = 0,410$ .



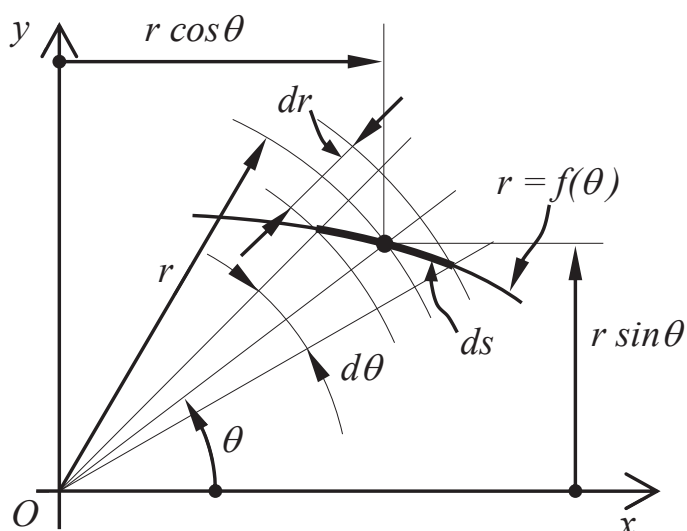


Fig. 4.9

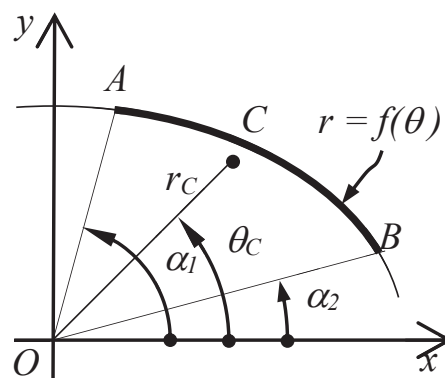


Fig.4.10

c) *Reprezentare în coordonate polare.* Tratarea este analogă celei de la reprezentarea explicită prezentată mai sus. Coordonatele polare, suprapuse unui sistem de axe  $xOy$ , sunt lungimea  $r$  a razei vectoriale și unghiul de poziție  $\theta$  al acesteia. Pentru o curbă plană se pot scrie relațiile:

$$r = f(\theta) \quad r' = \frac{dr}{d\theta} \quad (4.37)$$

Considerând  $\theta$  variabilă independentă, arcul de curbă elementar (fig. 4.9) are forma:

$$ds = \sqrt{(r d\theta)^2 + (dr)^2} = d\theta \sqrt{r^2 + (r')^2} \quad (4.38)$$

Pentru arcul de curbă  $AB$  (fig. 4.10) se poate calcula:

$$\begin{cases} l = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sqrt{r^2 + (r')^2} d\theta \\ x_C = \frac{1}{l} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} r \cos \theta \sqrt{r^2 + (r')^2} d\theta \\ y_C = \frac{1}{l} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} r \sin \theta \sqrt{r^2 + (r')^2} d\theta \end{cases} \quad (4.39)$$

Coordonatele polare ale centrului de masă vor fi:

$$r_C = \sqrt{x_C^2 + y_C^2} \quad \theta_C = \arctg(y_C/x_C) \quad (4.40)$$

*Exemplu:* Bara în formă de arc de cerc (fig. 4.11) are centrul de masă pe axa de simetrie care, pentru simplificare, se alege drept axă  $Ox$  cu originea în centrul geometric al arcului. Se observă că:

$$r = R = \text{const.} \quad r' = 0 \quad (4.41)$$

Arcul de curbă elementar dat de (4.38) va fi:

$$ds = R d\theta \quad (4.42)$$

astfel că rel.(4.39) devin:

$$\begin{cases} l = \int_{-\alpha}^{\alpha} R d\theta = 2R\alpha_r \\ x_C = OC = \frac{l}{2R\alpha_r} \int_{-\alpha}^{\alpha} R \cos\theta \cdot R d\theta = R \frac{\sin\alpha}{\alpha_r} \end{cases} \quad (4.43)$$

În aceste relații prin  $\alpha_r$  s-a notat semiunghiul la centru al arcului măsurat în radiani.

Pentru multe aplicații interesează unele cazuri particulare. Astfel, pentru sfertul de cerc din fig.4.12, a) la care  $\alpha_r = \pi/4$  se calculează proiecțiile distanței  $OC$  pe laturi:

$$\begin{cases} l = \pi R/2 \\ x_C = y_C = OC \cos 45^\circ = \frac{2R}{\pi} \end{cases} \quad (4.44)$$

La semicercul din fig.4.12, b)  $\alpha_r = \pi/2$  și din rel.(4.43) se obține:

$$l = \pi R \quad y_C = OC = \frac{2R}{\pi} \quad (4.45)$$

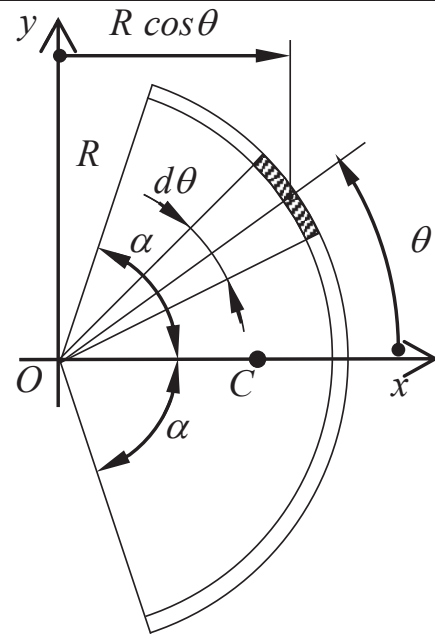


Fig.4.11

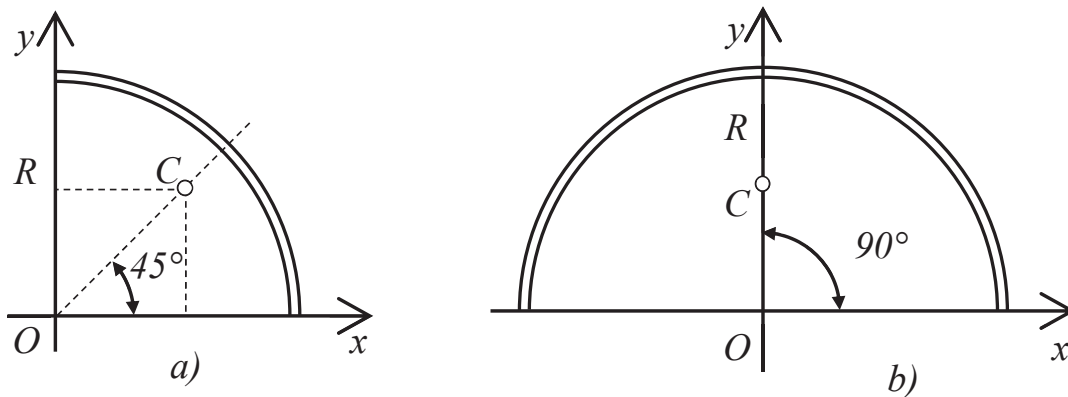


Fig.4.12

#### 4.4.5 Curbe în spațiu

Pentru un arc aparținând unei curbe în spațiul  $Oxyz$  relațiile generale pentru calculul lungimii și coordonatelor centrului de masă sunt:

$$l = \int_{(l)} ds \quad x_C = \int_{(l)} x ds \quad y_C = \int_{(l)} y ds \quad z_C = \int_{(l)} z ds \quad (4.46)$$

în care variabilele  $x, y, z$  sunt coordonatele centrului de masă ale arcului elementar  $ds$ . Aceste coordonate sunt legate între ele prin ecuațiile analitice care definesc curba.

Pentru arcul elementar din spațiu relația de definiție este:

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2} \quad (4.47)$$

care se particularizează în funcție de modul de reprezentare. În cazul unei reprezentări parametrice de forma:

$$x = x(t) \quad y = y(t) \quad z = z(t) \quad (4.48)$$

arcul elementar se poate scrie:

$$ds = dt \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} = \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2} dt \quad (4.49)$$

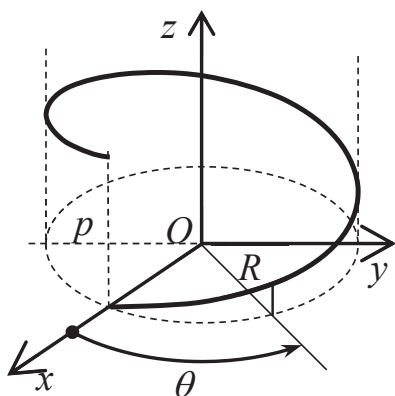


Fig.4.13

Exemplu: Elicea cilindrică din fig.4.13 are ecuațiile parametrice:

$$x = R \cos \theta \quad y = R \sin \theta \quad z = \frac{p}{2\pi} \theta \quad (4.50)$$

în care  $R$  este raza cilindrului,  $p$  pasul elicei iar  $\theta$ , parametrul pozițional independent, este unghiul de poziție în planul  $xOy$ . Cu derivatele:

$$x' = -R \sin \theta \quad y' = R \cos \theta \quad z' = \frac{p}{2\pi} \quad (4.51)$$

rezultă arcul elementar:

$$ds = \sqrt{R^2 + (p/2\pi)^2} d\theta \quad (4.52)$$

În continuare,

$$\begin{cases} l = \sqrt{R^2 + (p/2\pi)^2} \int_0^\theta d\theta = \theta_r \sqrt{R^2 + (p/2\pi)^2} \\ x_C = \frac{R}{l} \int_0^\theta \cos \theta d\theta = \frac{R \sin \theta}{\theta_r} \\ y_C = \frac{R}{l} \int_0^\theta \sin \theta d\theta = \frac{R(1 - \cos \theta)}{\theta_r} \\ z_C = \frac{p}{2\pi l} \int_0^\theta \theta d\theta = \frac{p}{4\pi} \theta_r \end{cases} \quad (4.53)$$

S-a notat  $\theta_r$ , unghiul respectiv în radiani. Pentru o spirală completă  $\theta_r = 2\pi$  și se obține  $l = \sqrt{(2\pi R)^2 + p^2}$ ,  $x_C = y_C = 0$ ,  $z_C = p/2$ .

#### 4.4.6 Suprafețe plane

Pentru o placă plană având un contur oarecare (fig.4.14) conținută, de exemplu, în planul  $xOy$  relațiile generale pentru calculul ariei și coordonatelor centrului de masă sunt:

$$A = \int_{(A)} dA \quad x_C = \frac{1}{A} \int_{(A)} x dA \quad y_C = \frac{1}{A} \int_{(A)} y dA \quad (4.54)$$

Dacă se ia aria elementară  $dA = dx dy$ , integralele de suprafață de mai sus devin integralele duble definite ale căror limite depind de curba care servește drept contur suprafeței respective.

$$\begin{cases} A = \iint_{(A)} dx dy \\ x_C = \frac{1}{A} \iint_{(A)} x dx dy \\ y_C = \frac{1}{A} \iint_{(A)} y dx dy \end{cases} \quad (4.55)$$

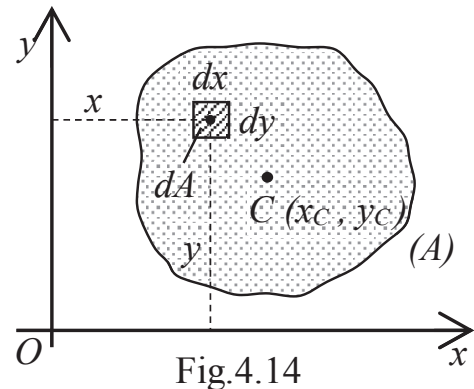


Fig.4.14

Este necesar să se reamintească faptul că variabilele  $x$  și  $y$  din relațiile pentru calculul coordonatelor se referă la centrul de masă al ariei elementare  $dA$ ; se va face distincția necesară de curbele care limitează suprafața respectivă, descrise de regulă prin ecuații tot în  $x$  și  $y$ .

Integralele duble de mai sus sunt separabile în cazul unor limite de contur constituite din drepte paralele cu axele de coordonate, respectiv în cadrul unei suprafețe dreptunghiulare.

Exemplul 1 : Pentru placa dreptunghiulară din fig. 4.15 se obține:

$$\begin{cases} A = \int_0^a dx \int_0^b dy = ab \\ x_C = \frac{1}{A} \int_0^a x dx \int_0^b dy = \frac{a}{2} \\ y_C = \frac{1}{A} \int_0^a dx \int_0^b y dy = \frac{b}{2} \end{cases} \quad (4.56)$$

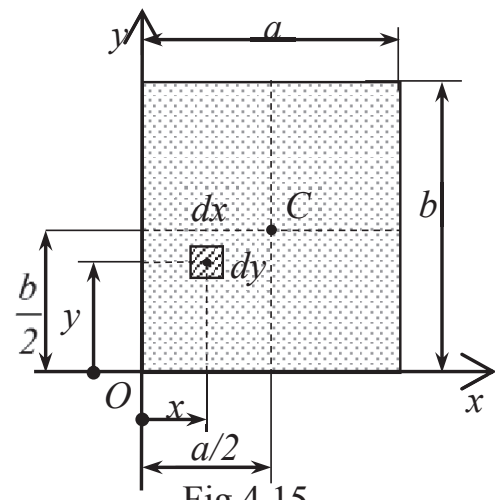


Fig.4.15

Rezultatele sunt evidente și datorită celor două axe de simetrie.

În mod practic, printr-o alegere adecvată a ariei elementare calculele pot fi simplificate. Pentru suprafața limitată de curbele  $y = f_1(x)$  și  $y = f_2(x)$  din fig.4.16 se notează:

$$\begin{cases} dA = (y_2 - y_1) dx \\ x^* = x \\ y^* = \frac{1}{2}(y_2 + y_1) \end{cases} \quad (4.57)$$

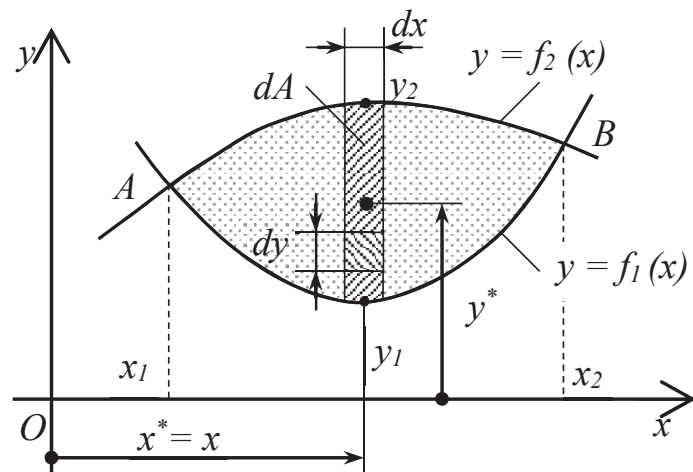


Fig.4.16

Aria elementară  $dA$  este o fâșie asimilabilă unui dreptunghi de grosime infinitezimală  $dx$  iar  $x^*$  și  $y^*$  sunt coordonatele centrului de masă al acestei fâșii. Cu aceste notații relațiile (4.55) se pot pune sub forma:

$$A = \int_{x_1}^{x_2} \left( \int_{y_1}^{y_2} dy \right) dx = \int_{x_1}^{x_2} (y_2 - y_1) dx = \int_{(A)} dA$$

$$x_C = \frac{1}{A} \int_{x_1}^{x_2} x \left( \int_{y_1}^{y_2} dy \right) dx = \frac{1}{A} \int_{x_1}^{x_2} x (y_2 - y_1) dx = \frac{1}{A} \int_{(A)} x^* dA \quad (4.58)$$

$$y_C = \frac{1}{A} \int_{x_1}^{x_2} \left( \int_{y_1}^{y_2} y dy \right) dx = \frac{1}{A} \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{2} (y_2^2 - y_1^2) dx =$$

$$= \frac{1}{A} \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{2} (y_2 + y_1)(y_2 - y_1) dx = \frac{1}{A} \int_{(A)} y^* dA$$

Exemplul 2: Suprafața din fig.4.17 este limitată de elipsa:

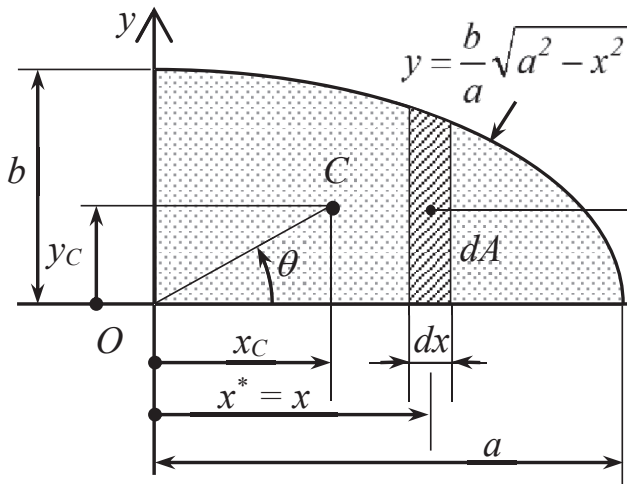


Fig.4.17

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \quad (4.59)$$

și de semiaxe de lungime  $a$  și  $b$  suprapuse axelor de coordonate.

$$dA = y dx = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} dx \quad (4.60)$$

$$y^* = \frac{1}{2} y = \frac{b}{2a} \sqrt{a^2 - x^2} \quad (4.61)$$

Efectuând calculele se obțin aria și coordonatele centrului de masă pentru acest sfert de elipsă:

$$A = \frac{b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx =$$

$$= \frac{b}{2a} \left[ x \sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a} \right]_0^a = \frac{\pi ab}{4}$$

$$x_C = \frac{1}{A} \frac{b}{a} \int_0^a x \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{4}{\pi ab} \frac{b}{a} \left[ -\frac{1}{3} \sqrt{(a^2 - x^2)^3} \right]_0^a = \frac{4a}{3\pi} \quad (4.62)$$

$$y_C = \frac{1}{A} \frac{b^2}{2a^2} \int_0^a (a^2 - x^2) dx = \frac{4}{\pi ab} \frac{b^2}{2a^2} \left[ a^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^a = \frac{4b}{3\pi}$$

**Exemplul 3:** Triunghiul oarecare  $OAB$  se așează într-un mod convenabil (fig.4.18), respectiv cu una din laturi suprapusă axei  $Oy$ . În funcție de coordonatele vârfurilor triunghiului se pot scrie ecuațiile dreptelor cărora le aparțin celelalte două laturi :

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x) = \frac{y_A}{x_A} x \\ y_2 = f_2(x) = \frac{y_A - y_B}{x_A} x + y_B \end{cases} \quad (4.63)$$

Aria elementară și coordonatele centrului de masă al acesteia sunt date de rel.(4.58) în care se fac înlocuirile de mai sus, rezultând:

$$dA = \left( y_B - \frac{y_B}{x_A} x \right) dx \quad x^* = x \quad y^* = \frac{1}{2} \left( y_B + \frac{2y_A - y_B}{x_A} x \right) dx \quad (4.64)$$

În continuare, în baza rel.(4.57) se efectuează calculele:

$$\begin{cases} A = \int_0^{x_A} \left( y_B - \frac{y_B}{x_A} x \right) dx = \frac{1}{2} x_A y_B \\ x_C = \frac{1}{A} \int_0^{x_A} x \left( y_B - \frac{y_B}{x_A} x \right) dx = \frac{1}{3} x_A \\ y_C = \frac{1}{A} \int_0^{x_A} \frac{1}{2} \left( y_B + \frac{2y_A - y_B}{x_A} x \right) \left( y_B - \frac{y_B}{x_A} x \right) dx = \frac{1}{3} (y_A + y_B) \end{cases} \quad (4.65)$$

Se pot recunoaște cu ușurință relațiile  $A = \frac{1}{2} AN \cdot OB$  și  $AC = \frac{2}{3} AM$  specifice geometriei triunghiurilor. Centrul de masă al oricărui triunghi coincide cu punctul în care se intersectează medianele acestuia.

Poziția centrului maselor în cazul unui triunghi dispus în spațiu poate fi exprimată și în funcție de coordonatele vârfurilor acestuia, (fig. 4.19) cu relațiile, ușor de dedus:

$$\begin{cases} x_C = \frac{1}{3} (x_1 + x_2 + x_3) \\ y_C = \frac{1}{3} (y_1 + y_2 + y_3) \\ z_C = \frac{1}{3} (z_1 + z_2 + z_3) \end{cases} \quad (4.66)$$

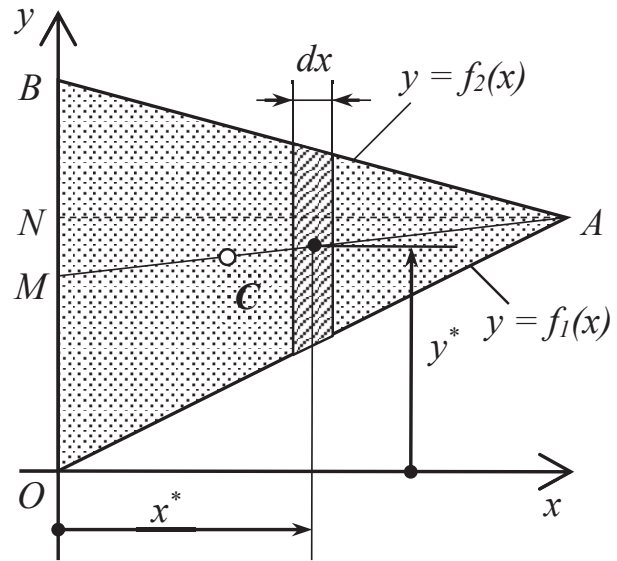


Fig.4.18

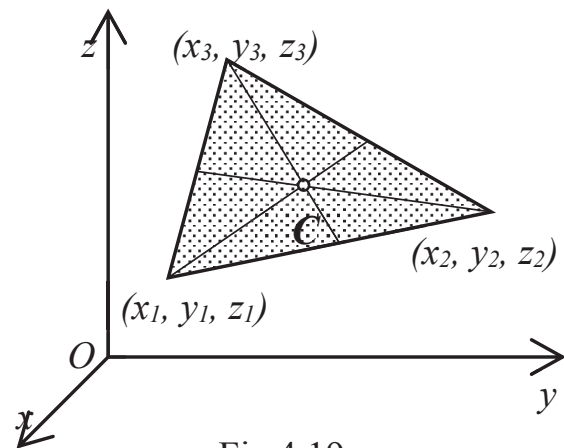


Fig.4.19

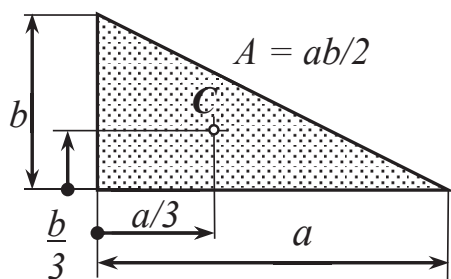


Fig.4.20

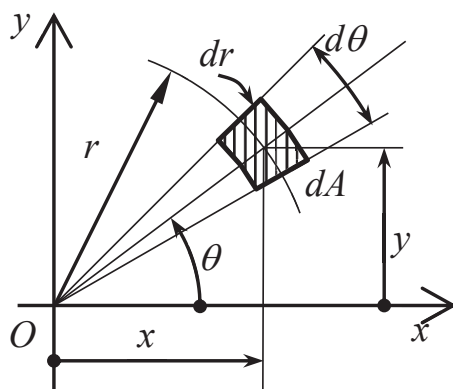


Fig.4.21

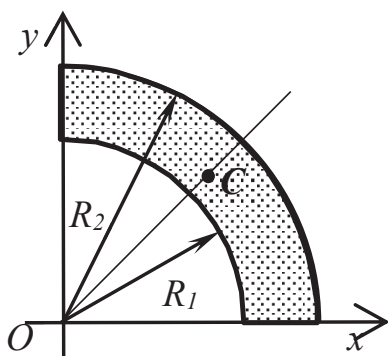


Fig.4.22

Pentru cazul particular al triunghiului dreptunghic din fig.4.20 se particularizează relația (4.65) făcând  $y_A = 0$ . Concret, centrul de masă se proiectează pe catetele acestuia la câte o treime din lungimea lor față de vârful unghiului drept.

În unele aplicații este convenabil să se exprime aria elementară și poziția ei în coordonate polare suprapuse sistemului cartezian (fig.4.21). Astfel, observând că:

$$dA = r d\theta dr \quad x = r \cos\theta \quad y = r \sin\theta \quad (4.67)$$

relațiile (4.54) iau forma

$$\begin{cases} A = \iint_{(A)} r dr d\theta \\ x_C = \frac{1}{A} \iint_{(A)} r^2 \cos\theta dr d\theta \\ y_C = \frac{1}{A} \iint_{(A)} r^2 \sin\theta dr d\theta \end{cases} \quad (4.68)$$

Pentru aceste integrale duble definite limitele de integrare se stabilesc în funcție de curbele care mărginesc suprafața respectivă. Integralele sunt separabile în cazul unor limite constituite din arce de cerc cu centrul în origine.

Exemplul 4: Pentru sfertul de inel din fig. 4.22 se stabilesc relațiile:

$$\begin{cases} A = \int_{R_1}^{R_2} r dr \int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{\pi}{4} (R_2^2 - R_1^2) \\ x_C = \frac{1}{A} \int_{R_1}^{R_2} r^2 dr \int_0^{\pi/2} \cos\theta d\theta = \frac{4}{3\pi} \frac{R_2^3 - R_1^3}{R_2^2 - R_1^2} \\ y_C = \frac{1}{A} \int_{R_1}^{R_2} r^2 dr \int_0^{\pi/2} \sin\theta d\theta = \frac{4}{3\pi} \frac{R_2^3 - R_1^3}{R_2^2 - R_1^2} \end{cases} \quad (4.69)$$

Și în cazul lucrului în coordonate polare pot fi alese arii elementare care să simplifice calculul. Astfel, dacă curba limită este de forma  $r = r(\theta)$  (fig.4.23), drept arie elementară se poate lua un sector circular de rază  $r$  și unghi  $d\theta$  care poate fi asimilat unui triunghi isoscel; așa cum s-a arătat mai sus, centrul de masă al triunghiului se află la  $2/3$  din lungimea medianei  $OM$  față de vârf.

$$dA = \frac{1}{2} r^2 d\theta \quad x = \frac{2}{3} r \cos\theta \quad y = \frac{2}{3} r \sin\theta \quad (4.70)$$

Se fac înlocuirile în relațiile generale (4.54) și se obține:

$$\begin{cases} A = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} r^2 d\theta \\ x_C = \frac{1}{3A} \int_{\theta_1}^{\theta_2} r^3 \cos\theta d\theta \\ y_C = \frac{1}{3A} \int_{\theta_1}^{\theta_2} r^3 \sin\theta d\theta \end{cases} \quad (4.71)$$

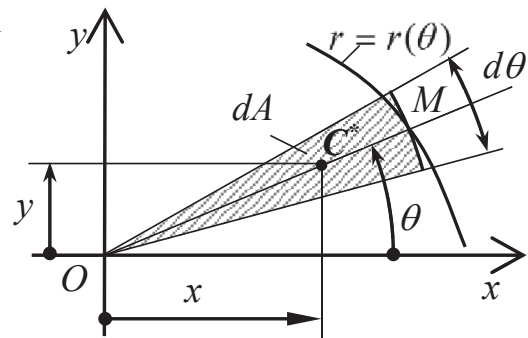


Fig.4.23

**Exemplul 5** : Pentru sectorul circular (fig.4.24), la care  $r = R = \text{const.}$  și  $Ox$  este axa de simetrie, se obține:

$$\begin{cases} A = \frac{1}{2} \int_{-\alpha}^{\alpha} R^2 d\theta = R^2 \alpha_r \\ OC = x_C = \frac{1}{3A} \int_{-\alpha}^{\alpha} R^3 \cos\theta d\theta = \frac{2}{3} R \frac{\sin\alpha}{\alpha_r} \end{cases} \quad (4.72)$$

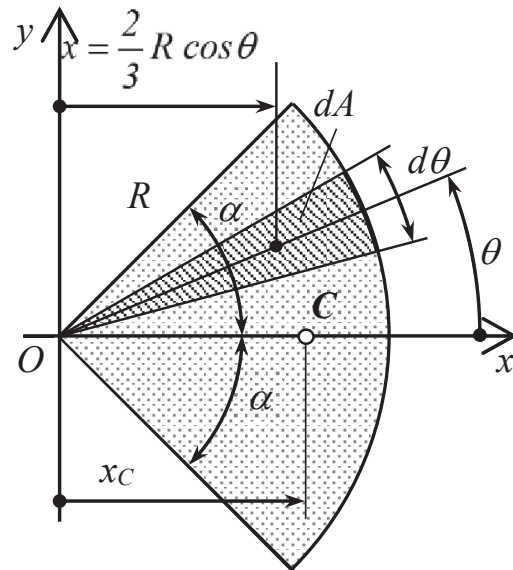


Fig.4.24

În calcule semiunghiul la centru al sectorului circular  $\alpha_r$  se va introduce în radiani.

Pentru aplicațiile practice prezintă interes unele cazuri particulare ale sectorului circular. Pentru semidiscul din fig.4.25 a), relațiile de mai sus devin:

$$A = \frac{\pi R^2}{2} \quad OC = \frac{2}{3} R \frac{\sin 90^\circ}{\frac{\pi}{2}} = \frac{4R}{3\pi} \quad (4.73)$$

Pentru sfertul de disc din fig.4.25 b), se calculează proiecțiile distanței  $OC$  pe laturi. Se obține:

$$\begin{cases} A = \frac{\pi R^2}{4} \\ OC_1 = OC_2 = OC \cos 45^\circ = \frac{4R}{3\pi} \end{cases} \quad (4.74)$$

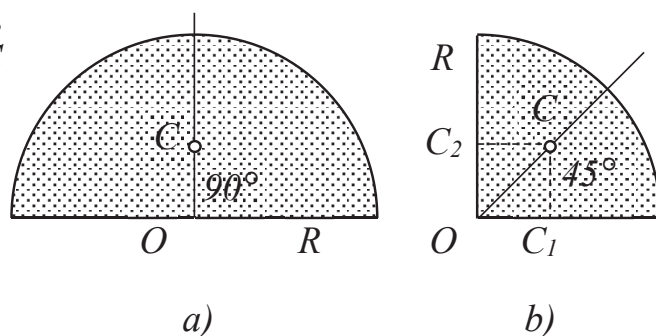


Fig.4.25

#### 4.4.7 Suprafețe în spațiu

Relațiile generale care definesc poziția centrului de masă al unei suprafețe în spațiu sunt:

$$A = \int_{(A)} dA \quad x_C = \frac{1}{A} \int_{(A)} x dA \quad y_C = \frac{1}{A} \int_{(A)} y dA \quad z_C = \frac{1}{A} \int_{(A)} z dA \quad (4.75)$$



Variabilele  $x, y, z$  se referă la poziția centrului de masă al ariei elementare  $dA$ , oricare ar fi forma aleasă pentru aceasta. Aceste variabile sunt legate între ele printr-o ecuație de forma  $f(x, y, z) = 0$  care reprezintă în fapt ecuația analitică de definire a suprafeței respective.

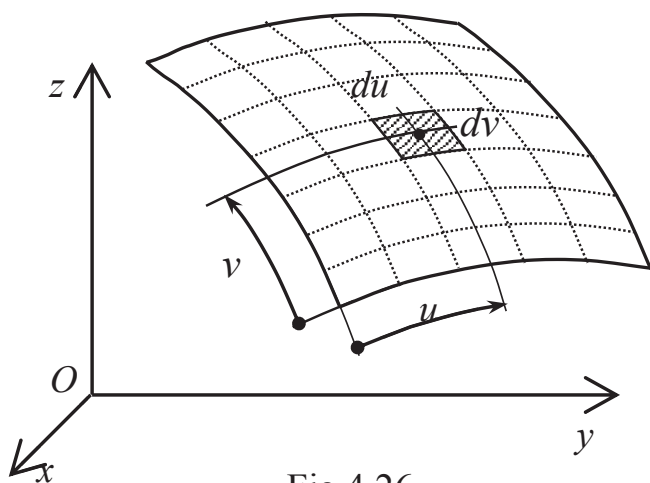


Fig.4.26

Din teoria suprafețelor se știe că o suprafață în spațiu poate fi divizată în arii elementare prin linii curbe de caroiaj rezultate din intersecția acestora cu plane care urmează o anumită distribuție (fig. 4.26). În general aceste plane se aleg paralele sau concurente cu o axă. În cazul unei suprafețe în spațiu continuă liniile de caroiaj sunt reciproc perpendiculare iar ariile elementare rezultate pot fi considerate dreptunghiulare.

Centrul de masă al unei arii elementare se poziționează pe suprafața respectivă prin coordonatele curbilinii  $u$  și  $v$  față de niște curbe de caroiaj de referință. La rândul lor coordonate curbilinii se pot exprima în funcție de parametrii poziționali specifici sistemului de coordonate spațiale utilizat (carteziene, cilindrice sau sferice).

Aria elementară dreptunghiulară amintită mai sus este dată de relația

$$dA = du dv \quad (4.76)$$

în care arcele elementare  $du$  și  $dv$  se obțin prin diferențierea expresiilor de definiție ale coordonatelor curbilinii  $u$  și  $v$ .

Soluții analitice pentru poziția centrului de masă se pot găsi mai ușor la suprafețele de rotație, obținute prin rotirea unei curbe plane în jurul unei axe.

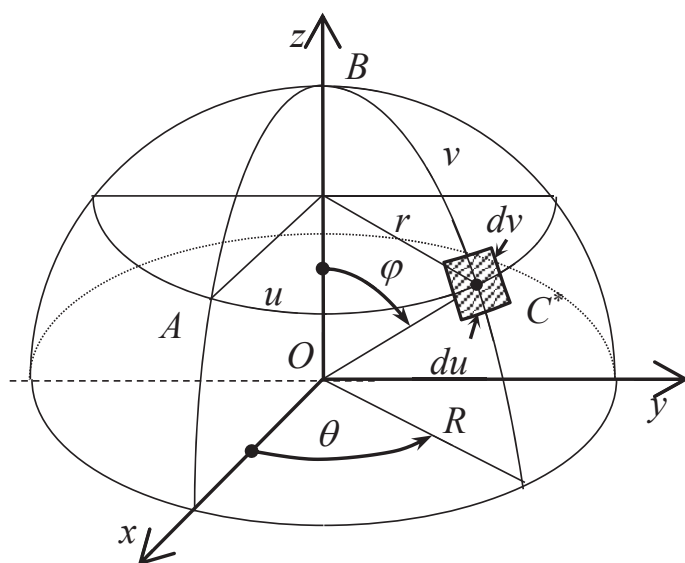


Fig.4.27

Exemplul 1 : Pentru calota sferică de rază  $R$  din fig. 4.27 centrul de masă se află pe axa de rotație, în cazul de față  $Oz$ . Prin intersecția suprafeței calotei cu plane paralele cu  $xOy$  se obțin liniile de caroiaj orizontale care sunt cercuri de rază variabilă  $r = R \sin \varphi$  cu centrul pe axa  $Oz$ . Liniile de caroiaj verticale se obțin prin intersecția calotei cu plane verticale trecând prin  $Oz$  poziționate prin unghiul  $\theta$  față de planul  $xOz$ ; ele sunt semicercuri de rază  $R$  cu centrul în centrul geometric  $O$  al calotei.

Centrul de masă  $C^*$  al ariei elementare  $dA$  are coordonatele curbilinii:

$$\begin{cases} u = AC^* = r\theta = R\theta \sin \varphi \\ v = BC^* = R\varphi \end{cases} \quad (4.77)$$

Parametrii poziționali sunt unghiurile  $\theta$  și  $\varphi$  astfel că prin diferențierea acestor relații se obține:

$$\begin{cases} du = R \sin \varphi d\theta + R\theta \cos \varphi d\varphi \\ dv = R d\varphi \end{cases} \quad (4.78)$$

Aria elementară va fi

$$dA = du dv = R^2 [\sin \varphi d\varphi d\theta + \theta \cos \varphi (d\varphi)^2] = R^2 \sin \varphi d\varphi d\theta \quad (4.79)$$

unde se neglijează termenul care conține  $(d\varphi)^2$ . Coordonatele carteziene ale ariei elementare sunt:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta = R \sin \varphi \cos \theta \\ y = r \sin \theta = R \sin \varphi \sin \theta \\ z = R \cos \varphi \end{cases} \quad (4.80)$$

Se fac înlocuirile în rel (4.75) și se calculează în continuare:

$$\left\{ \begin{aligned} A &= \iint_{(u,v)} du dv = R^2 \int_0^{\pi/2} \sin \varphi d\varphi \int_0^\pi d\theta = 2\pi R^2 \\ x_C &= \frac{1}{A} \iint_{(u,v)} x du dv = \frac{R^3}{A} \int_0^{\pi/2} \sin^2 \varphi d\varphi \int_0^\pi \cos \theta d\theta = 0 \\ y_C &= \frac{1}{A} \iint_{(u,v)} y du dv = \frac{R^3}{A} \int_0^{\pi/2} \sin^2 \varphi d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta = 0 \\ z_C &= \frac{1}{A} \iint_{(u,v)} z du dv = \frac{R^3}{A} \int_0^{\pi/2} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi \int_0^\pi d\theta = \frac{R}{2} \end{aligned} \right. \quad (4.81)$$

Modificând limitele de integrare se pot efectua calculele pentru diferite suprafețe provenite din sferă.

*Exemplul 2* : La suprafața conică din fig. 4.28 se cunosc raza bazei  $R$  și înălțimea  $h$ ; centrul de masă se află pe axa de simetrie a conului, suprapusă axei  $Oz$ . Liniile de caroiaj care se obțin prin intersecția suprafeței conice cu plane horizontale sunt cercuri de rază variabilă  $r$ , cotate prin  $z$  față de planul  $xOy$ . Celelalte linii de caroiaj se obțin prin intersecția suprafeței conice cu plane verticale care trec prin axa  $Oz$ , poziționate prin unghiul  $\theta$  față de planul  $yOz$ . Coordonatele curbilinii sunt:

$$u = AC^* = r\theta = \frac{R}{h} z\theta \quad v = OC^* = \frac{\sqrt{R^2 + h^2}}{h} z = \frac{g}{h} z \quad (4.82)$$

S-a notat prin  $g$  lungimea generatoarei conului.

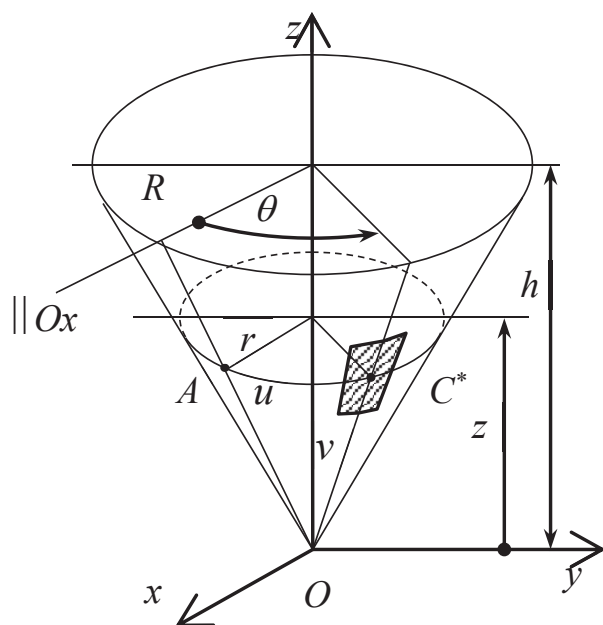


Fig.4.28

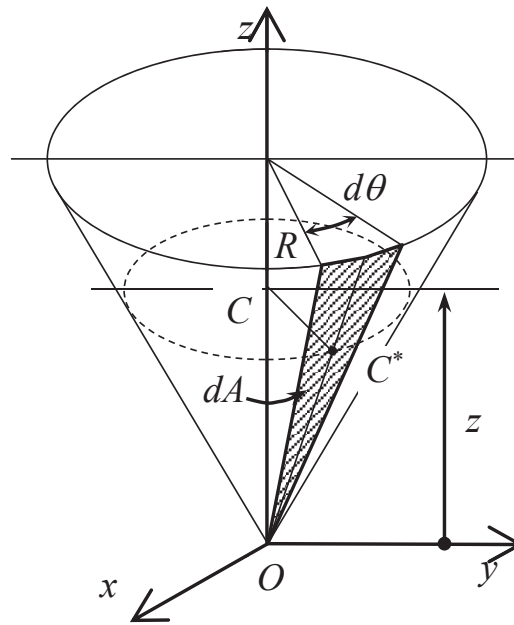


Fig.4.29

Se diferențiază aceste coordonate:

$$du = \frac{R}{h}(z d\theta + \theta dz) \quad dv = \frac{g}{h} dz \quad (4.83)$$

Aria elementara este:

$$dA = du dv = \frac{Rg}{h^2} [z dz d\theta + \theta (dz)^2] = \frac{Rg}{h^2} z dz d\theta \quad (4.84)$$

Se neglijează termenul conținând  $(dz)^2$ . Coordonatele carteziene ale centrului de masă al ariei elementare în funcție de  $z$  și  $\theta$  sunt:

$$x = r \cos\theta = \frac{R}{h} z \cos\theta \quad y = r \sin\theta = \frac{R}{h} z \sin\theta \quad (4.85)$$

Se înlocuiește în (4.75) și se obține:

$$\left\{ \begin{array}{l} A = \iint_{(u,v)} du dv = \frac{Rg}{h^2} \int_0^h z dz \int_0^{2\pi} d\theta = \pi Rg = \pi R \sqrt{R^2 + h^2} \\ x_C = \frac{1}{A} \iint_{(u,v)} x du dv = \frac{1}{A} \frac{R^2 g}{h^3} \int_0^h z^2 dz \int_0^{2\pi} \cos\theta d\theta = 0 \\ y_C = \frac{1}{A} \iint_{(u,v)} y du dv = \frac{1}{A} \frac{R^2 g}{h^3} \int_0^h z^2 dz \int_0^{2\pi} \sin\theta d\theta = 0 \\ z_C = \frac{1}{A} \iint_{(u,v)} z du dv = \frac{1}{A} \frac{Rg}{h^2} \int_0^h z^2 dz \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{2}{3} h \end{array} \right. \quad (4.86)$$

Și în acest caz, prin modificarea limitelor de integrare se pot efectua calculele pentru diferite suprafețe provenite din conul circular drept. În unele aplicații se pot simplifica calculele prin alegerea unei arii elementare având altă formă decât cea dreptunghiulară precum și unele dimensiuni finite.

Astfel, în exemplul de mai sus aria elementară  $dA$  poate fi asimilată unui triunghi isoscel cu lungimea bazei  $Rd\theta$  și înălțimea  $g$  (fig.4.29). Distanța față de vârf a centrului de masă al ariei elementare este  $AC^* = 2g/3$ .

$$dA = \frac{1}{2} g R d\theta \quad z = \frac{2}{3} h \quad (4.87)$$

Se obțin imediat rezultatele din (4.86), respectiv

$$\begin{cases} A = \int_{(A)} dA = \frac{1}{2} g R \int_0^{2\pi} d\theta = \pi R g \\ z_C = \frac{1}{A} \int_{(A)} z dA = \frac{h}{3\pi} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{2}{3} h \end{cases} \quad (4.88)$$

Toate ariile elementare au centrul de masă  $C^*$  la aceeași înălțime și în consecință și centrul de masă  $C$  al suprafeței conice va avea aceeași cotă.

#### 4.4.8 Volume

În cazul unui volum oarecare relațiile generale care definesc poziția centrului de masă sunt:

$$\begin{cases} V = \int_{(V)} dV \\ x_C = \frac{1}{V} \int_{(V)} x dV \quad y_C = \frac{1}{V} \int_{(V)} y dV \quad z_C = \frac{1}{V} \int_{(V)} z dV \end{cases} \quad (4.89)$$

Variabilele  $x, y, z$  reprezintă poziția centrului de masă al volumului elementar  $dV$ . Integralele volumice din membrul drept al acestor relații devin integrale definite triple ale căror limite depind de suprafețele care mărginesc volumul respectiv.

În mod analog celor prezentate în capitolul precedent, pentru un volum se poate adopta un sistem de coordonate curbilini spațiale  $u, v, w$  (fig. 4.30) alcătuit din linii de carioaj rezultate prin intersecția a trei fascicule de suprafețe în spațiu. În orice punct de intersecție tangentele la aceste linii de carioaj sunt reciproc perpendiculare. Un corp oarecare poate fi divizat în volume elementare delimitate de suprafețele menționate. Un volum elementar poate fi asimilat unui paralelipiped, astfel că:

$$dV = du dv dw \quad (4.90)$$

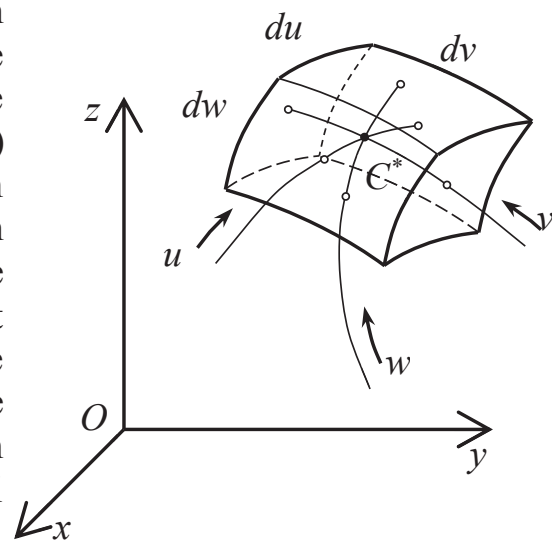


Fig.4.30

Muchiile  $du, dv, dw$  se obțin prin diferențierea relațiilor de definiție ale coordonatelor curbilini respective.

În cazul particular în care suprafețele menționate mai sus sunt plane paralele cu cele ale sistemului  $Oxyz$ , atunci coordonatele curbilinii sunt tocmai coordonatele carteziene ale acestui sistem iar relațiile (4.89) iau forma

$$\left\{ \begin{array}{l} V = \iiint_{(V)} dx dy dz \\ x_C = \frac{1}{V} \iiint_{(V)} x dx dy dz \quad y_C = \frac{1}{V} \iiint_{(V)} y dx dy dz \quad z_C = \frac{1}{V} \iiint_{(V)} z dx dy dz \end{array} \right. \quad (4.91)$$

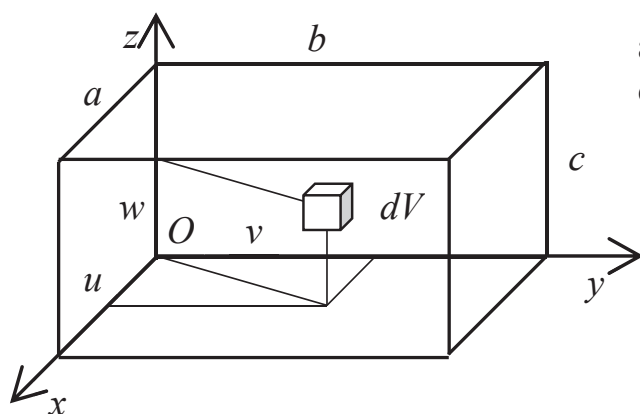


Fig.4.31

*Exemplul 1* : Relațiile de mai sus aplicate în cazul unui paralelipiped dreptunghic (fig. 4.31) indică:

$$\left\{ \begin{array}{l} V = \int_0^a dx \int_0^b dy \int_0^c dz = abc \\ x_C = \frac{1}{V} \int_0^a x dx \int_0^b dy \int_0^c dz = \frac{a}{2} \\ y_C = \frac{1}{V} \int_0^a dx \int_0^b y dy \int_0^c dz = \frac{b}{2} \\ z_C = \frac{1}{V} \int_0^a dx \int_0^b dy \int_0^c z dz = \frac{c}{2} \end{array} \right. \quad (4.92)$$

Rezultatele sunt evidente, corpul admitând trei plane de simetrie care se intersectează în centrul de masă.

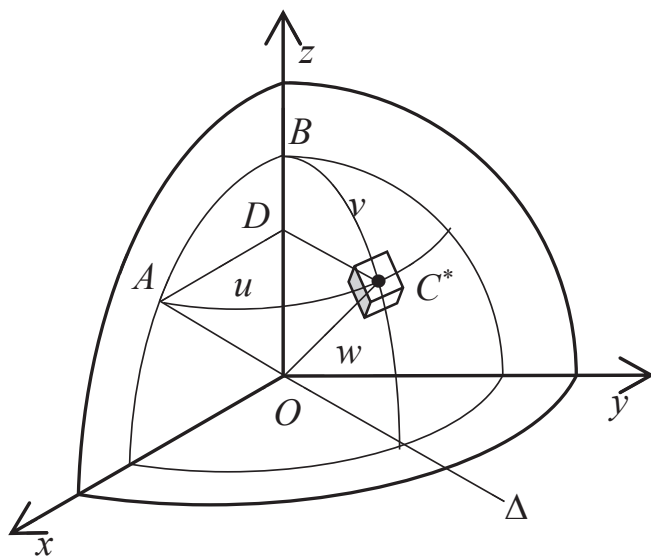


Fig.4.32

*Exemplul 2* : Se consideră o porțiune dintr-o sferă de rază  $R$  limitată de planele de coordonate (fig. 4.32). Centrul de masă  $C^*$  al unui volum elementar are coordonatele curbilinii obținute prin intersecția următoarelor suprafețe: o sferă de rază  $OC^* = r$ , un con cu vârful în  $O$  a cărui generatoare  $OC^*$  face unghiul  $\varphi$  cu axa  $Oz$  și un plan care trece prin  $Oz$  și a cărui urmă  $\Delta$  face unghiul  $\theta$  cu planul  $xOz$ . Detaliile referitoare la poziția și

dimensiunile volumului elementar  $dV$  sunt reprezentate în două secțiuni, verticală și orizontală, trecând prin punctul  $C^*$  (fig.4.33). Se pot defini coordonatele curbilinii în funcție de coordonatele sferice  $r$ ,  $\theta$  și  $\varphi$  prin relațiile:

$$\left\{ \begin{array}{l} u = AC^* = r \sin \varphi \cdot \theta \\ v = BC^* = r \varphi \\ w = OC^* = r \end{array} \right. \quad (4.93)$$

Se diferențiază aceste relații:

$$\begin{cases} du = \theta \sin \varphi dr + r \theta \cos \varphi d\varphi + \\ \quad + r \sin \varphi d\theta \\ dv = \varphi dr + r d\varphi \\ dw = dr \end{cases} \quad (4.94)$$

Volumul elementar va fi:

$$dV = du dv dw = r^2 \sin \varphi dr d\theta d\varphi \quad (4.95)$$

Se neglijează termenii care conțin  $(dr)^2$  și  $(d\varphi)^2$ . Coordonatele carteziene ale punctului  $C^*$  sunt:

$$\begin{cases} x = r \sin \varphi \cos \theta \\ y = r \sin \varphi \sin \theta \\ z = r \cos \varphi \end{cases} \quad (4.96)$$

Centrul de masă al corpului sferic va fi dat de relațiile (4.89). Este de remarcat că pentru acoperirea volumului acestuia variabilele  $r$ ,  $\theta$  și  $\varphi$  sunt independente, fapt care permite separarea integralelor triple ce provin din integrala pe volum:

$$\begin{cases} V = \int_0^R r^2 dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi d\varphi = \frac{\pi R^3}{6} \\ x_C = \frac{1}{V} \int_0^R r^3 dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{3}{8} R \\ y_C = \frac{1}{V} \int_0^R r^3 dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{3}{8} R \\ z_C = \frac{1}{V} \int_0^R r^3 dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi = \frac{3}{8} R \end{cases} \quad (4.97)$$

Egalitatea celor trei coordonate era previzibilă deoarece corpul admite drept axă de simetrie "bisectoarea" triedrului. Prin modificarea limitelor de integrare în relațiile de mai sus se poate determina volumul și poziția centrului de masă la o serie de figuri geometrice care au la bază sfera.

**Exemplul 3** : Pentru sfertul de con cuprins între planele de coordonate (fig.4.34) se cunosc raza bazei  $R$  și înălțimea  $h$ . Calculul se poate simplifica dacă se alege un volum elementar având numai una dintre dimensiuni infinitezimală; în cazul de față acesta are forma unui sfert de disc de rază variabilă  $r$  și de grosime  $dy$ . Ținând cont și de rel.(4.70) se poate scrie pentru acesta :

$$r = \frac{R}{h} y \quad A = \frac{1}{4} \pi r^2 \quad x = z = \frac{4r}{3\pi} \quad (4.98)$$

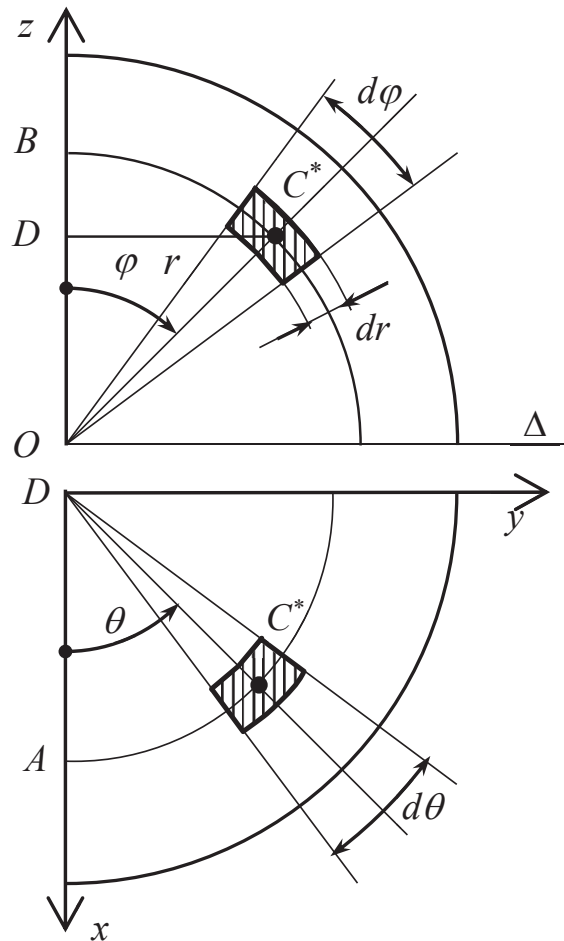


Fig.4.33

Se observă că volumul elementar și coordonatele centrului de masă  $C^*$  al acestuia se pot exprima în funcție de o singură variabilă:

$$\begin{cases} dV = A dy = \frac{\pi R^2}{4h^2} y^2 dy \\ x = z = \frac{4R}{3\pi h} y \end{cases} \quad (4.99)$$

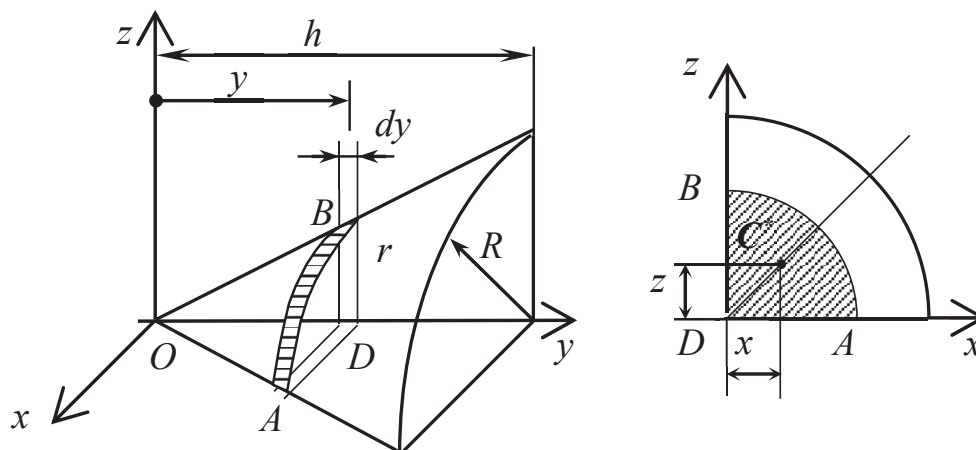


Fig.4.34

Volumul și poziția centrului de masă al corpului sunt:

$$\begin{aligned} V &= \frac{\pi R^2}{4h^2} \int_0^h y^2 dy = \frac{\pi R^2 h}{12} \\ x_C = z_C &= \frac{1}{V} \frac{4R}{3\pi h} \frac{\pi R^2}{4h^2} \int_0^h y^3 dy = \frac{R}{\pi} \\ y_C &= \frac{1}{V} \frac{\pi R^2}{4h^2} \int_0^h y^3 dy = \frac{3}{4} h \end{aligned} \quad (4.100)$$

Examinând aceste rezultate se pot trage câteva concluzii cu caracter de generalitate. Astfel:

– Coordonata  $y_C$  aflată pe înălțimea geometrică a conului nu depinde de suprafața sau forma bazei acestuia. Toate corpurile mărginite de o bază plană și de o suprafață riglată, generată de o dreaptă care trece printr-un vârf fix și se sprijină pe conturul bazei, au centrul de masă situat într-un plan paralel cu baza situat la  $3/4$  din lungimea perpendicularei coborâte din vârful respectiv pe această bază. Corpurile cele mai uzuale din această categorie sunt conurile și piramidele, drepte sau oblice.

– Coordonatele  $x_C$  și  $z_C$  calculate mai sus reprezintă  $3/4$  din aceleași coordonate calculate pentru baza corpului (respectiv  $4R/3\pi$ ), aflându-se în același raport cu distanța față de vârful a planului menționat în observația precedentă. Centrul de masă al corpului se află deci pe dreapta care unește vârful cu centrul de masă al bazei plane.

**Exemplul 4** : Corpul din fig. 4.35 este format prin secționarea unui sfert de cilindru de rază  $R$  și având  $Oz$  ca axă, cu un plan oblic care face unghiul  $\alpha$  cu  $xOy$  (se recunoaște o jumătate din figura geometrică numită uneori “copită cilindrică”). Se alege un volum elementar  $ABD$  de formă triunghiulară poziționat prin  $x = OA$ , cu grosimea infinitezimală  $dx$ , pentru care

$$AB = \sqrt{R^2 - x^2} \quad BD = AB \operatorname{tg} \alpha = AB \cdot \frac{h}{R} \quad (4.101)$$

Volumul elementar și coordonatele centrului său de masă sunt:

$$\begin{cases} dV = \frac{1}{2} AB \cdot BD \cdot dx \\ x = OA \quad y = \frac{2}{3} AB \quad z = \frac{1}{3} BD \end{cases} \quad (4.102)$$

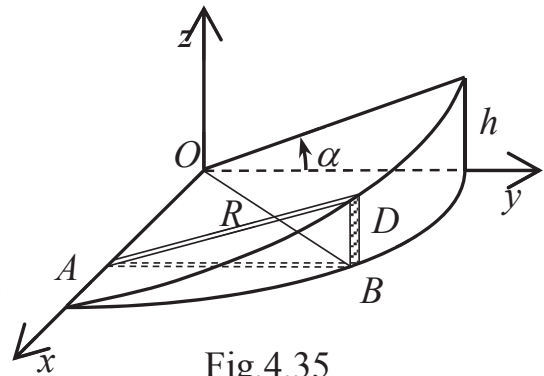


Fig.4.35

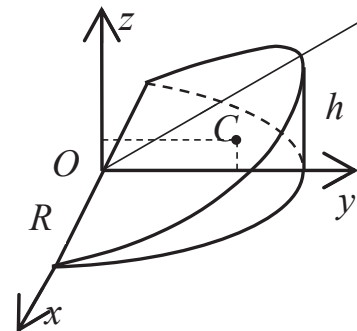


Fig.4.36

Cu aceste date se determină volumul și poziția centrului de masă al corpului după cum urmează:

$$\begin{cases} V = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha \int_0^R (R^2 - x^2) dx = \frac{1}{3} R^3 \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3} R^2 h \\ x_C = \frac{1}{V} \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha \int_0^R x (R^2 - x^2) dx = \frac{3}{8} R \\ y_C = \frac{1}{V} \frac{1}{3} \operatorname{tg} \alpha \int_0^R \sqrt{(R^2 - x^2)^3} dx = \frac{3}{16} \pi R \\ z_C = \frac{1}{V} \frac{1}{6} \operatorname{tg}^2 \alpha \int_0^R \sqrt{(R^2 - x^2)^3} dx = \frac{3}{32} \pi R \operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{32} \pi h \end{cases} \quad (4.103)$$

Pentru “copita cilindrică” întreagă (fig.4.36) se modifică limitele integralelor de mai sus de la  $-R$  la  $R$ , rezultând:

$$V = \frac{2}{3} R^2 h \quad x_C = 0 \quad y_C = \frac{3}{16} \pi R \quad z_C = \frac{3}{32} \pi h \quad (4.104)$$

Rezultatele erau previzibile întrucât corpul se poate considera format prin alipirea corpului analizat mai sus cu simetricul său.

## 4.5 Corpuri compuse

Marea majoritate a corpurilor întâlnite în practică au forme geometrice neregulate. Dacă acestea pot fi descompuse în corpuri geometrice simple, la care se cunoaște poziția centrului de masă, se poate stabili o procedură de calcul.

Se consideră un corp oarecare (fig.4.37) care poate fi descompus în  $n$  corpuri geometrice simple.



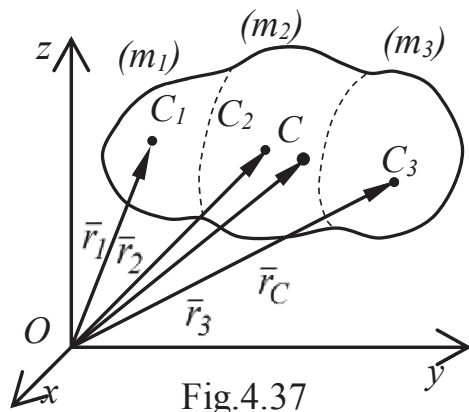


Fig.4.37

Pentru fiecare din acestea, în baza teoremei momentelor statice și a relației (4.13), se poate scrie

$$m_i \bar{r}_i = \int_{(m_i)} \bar{r} dm \quad (4.105)$$

Pentru corpul compus domeniul de integrare este masa totală

$$m = m_1 + m_2 + m_3 + \dots = \sum_{i=1}^n m_i \quad (4.106)$$

Integrala pe un domeniu se poate înlocui cu suma integralelor pe domeniile componente. Relația generală pentru calculul poziției centrului de masă va fi:

$$\bar{r}_C = \frac{1}{m} \int_{(m)} \bar{r} dm = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n \left( \int_{(m_i)} \bar{r} dm \right) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i \bar{r}_i \quad (4.107)$$

Este de remarcat că un corp compus se poate constitui atât prin alăturarea cât și prin decuparea unor corpuri simple. Pentru corpurile care se decupează din altele, în relațiile de mai sus masele se vor lua negative.

Relația (4.107) este identică cu cea de la un sistem de puncte materiale, respectiv (4.6), sistem echivalent care s-ar obține concentrând masa fiecărui corp simplu în propriul centru de masă.

Dacă corpurile simple componente diferă între ele ca model (bare, plăci, volume) sau nu sunt omogene (sunt, de exemplu, din materiale diferite) relațiile de mai sus se aplică întocmai.

În cazul în care aceste corpuri simple sunt modele omogene din aceeași categorie, prin simplificarea densității liniare, superficiale sau volumice, poziția centrului de masă al corpului compus va depinde numai de formă și dimensiuni. Relațiile de calcul pentru fiecare model sunt concentrate în tabelul 4.1.

Tabelul 4.1

BARE	PLĂCI	VOLUME
$l = \sum_{i=1}^n l_i$	$A = \sum_{i=1}^n A_i$	$V = \sum_{i=1}^n V_i$
$\bar{r}_C = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^n l_i \bar{r}_i$	$\bar{r}_C = \frac{1}{A} \sum_{i=1}^n A_i \bar{r}_i$	$\bar{r}_C = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^n V_i \bar{r}_i$
$x_C = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^n l_i x_i$	$x_C = \frac{1}{A} \sum_{i=1}^n A_i x_i$	$x_C = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^n V_i x_i$
$y_C = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^n l_i y_i$	$y_C = \frac{1}{A} \sum_{i=1}^n A_i y_i$	$y_C = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^n V_i y_i$
$z_C = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^n l_i z_i$	$z_C = \frac{1}{A} \sum_{i=1}^n A_i z_i$	$z_C = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^n V_i z_i$

În cazul componentelor care se decupează, situație care se întâlnește la plăci și corpuri tridimensionale, ariile și volumele respective se introduc în calcule cu semnul minus. Mai trebuie făcută și precizarea că valorile coordonatelor centrelor de masă ale componentelor se referă la sistemul de axe global la care se raportează corpul compus și nu la cele locale în care s-a făcut studiul în capitolele precedente.

**Problema 4.1** Să se calculeze poziția centrului de masă la corpul din fig.4.38, compus din trei bare de grosime identică:

- sfertul de cerc  $AO$  de rază  $a$  (rel.4.44),
- bara rectilinie  $OB$  de lungime  $2a$ ,
- semicercul  $BD$  de rază  $a$  (rel.4.45).

Calculul se poate sistematiza sub formă tabelară după cum urmează:

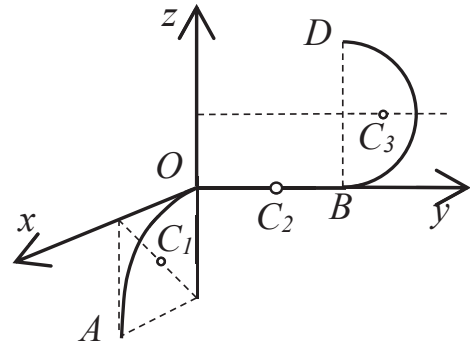


Fig.4.38

Tabelul 4.2

Corp	$l_i$	$x_i$	$y_i$	$z_i$	$l_i x_i$	$l_i y_i$	$l_i z_i$
$AO$	$\frac{\pi a}{4}$	$\frac{2a}{\pi}$	$0$	$-a + \frac{2a}{\pi}$	$\frac{a^2}{3}$	$0$	$-\frac{\pi a^2}{4} + \frac{a^2}{2}$
$OB$	$2a$	$0$	$a$	$0$	$0$	$2a^2$	$0$
$BD$	$\frac{\pi a}{2}$	$0$	$2a + \frac{2a}{\pi}$	$a$	$0$	$\pi a^2 + a^2$	$\frac{\pi a^2}{2}$
$\Sigma$	$2a + \frac{3\pi a}{4}$	–	–	–	$\frac{a^2}{3}$	$\pi a^2 + 3a^2$	$\frac{\pi a^2}{4} + \frac{a^2}{2}$

Cu rezultatele din ultima linie se fac înlocuirile în relațiile din prima coloană a tab.4.1 (bare) și se obțin coordonatele centrului de masă ale corpului compus din cele trei segmente:

$$\begin{aligned}
 x_C &= \frac{2}{8+3\pi} a \cong 0.115a \\
 y_C &= \frac{4(\pi+3)}{8+3\pi} a \cong 1.410a \\
 z_C &= \frac{\pi+2}{8+3\pi} a \cong 0.295a
 \end{aligned} \tag{4.108}$$

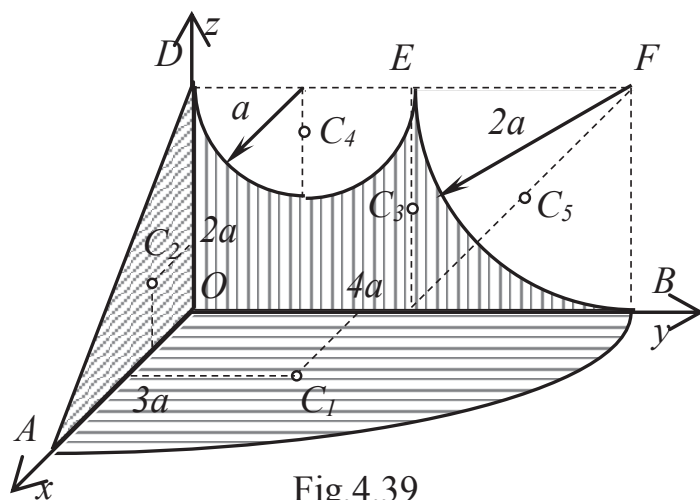


Fig.4.39

**Problema 4.2**

Corpul din figura 4.39 conține plăci de aceeași grosime situate în plane diferite. El se poate considera format din 5 componente, după cum urmează:

1) un sfert de elipsă cu semiaxele  $OA = 3a$  și  $OB = 4a$  (rel.4.62);

2) un triunghi dreptunghic cu catetele  $OA = 3a$  și  $OD = 2a$  (fig.4.20);

3) un dreptunghi cu laturile  $OB = 4a$  și  $OD = 2a$  (rel.4.56);

4) un semidisc de rază  $a$  decupat din dreptunghi (rel.4.69);

5) un sfert de disc de rază  $2a$  decupat din dreptunghi (rel.4.70).

Calculul poziției centrului de masă la acest corp este prezentat în tab.4.3.

**Tabelul 4.3**

Corp	$A_i$	$x_i$	$y_i$	$z_i$	$A_i x_i$	$A_i y_i$	$A_i z_i$
	$3\pi a^2$	$\frac{4a}{\pi}$	$\frac{16a}{3\pi}$	0	$12a^3$	$16a^3$	0
	$3a^2$	$a$	0	$\frac{2a}{3}$	$3a^3$	0	$2a^3$
	$8a^2$	0	$2a$	$a$	0	$16a^3$	$8a^3$
	$-\frac{\pi a^2}{2}$	0	$a$	$2a - \frac{4a}{3\pi}$	0	$-\frac{\pi a^3}{2}$	$-\pi a^3 + \frac{2a^3}{3}$
	$-\pi a^2$	0	$4a - \frac{8a}{3\pi}$	$2a - \frac{8a}{3\pi}$	0	$-4\pi a^3 + \frac{8a^3}{3}$	$-2\pi a^3 + \frac{8a^3}{3}$
$\Sigma$	$11a^2 + \frac{3}{2}\pi a^2$	-	-	-	$15a^3$	$\frac{104}{3}a^3 - \frac{9}{2}\pi a^3$	$\frac{40}{3}a^3 - 3\pi a^3$

În ultima linie se obțin sumele care se înlocuiesc în relațiile din coloana a doua (plăci) din tabelul 4.1. Rezultatele finale sunt date de relațiile următoare:

$$\begin{cases} x_C = \frac{30}{22+3\pi}a \cong 0.955a \\ y_C = \frac{208-27\pi}{3(22+3\pi)}a \cong 1.307a \\ z_C = \frac{2(40-9\pi)}{3(22+3\pi)}a \cong 0.248a \end{cases} \quad (4.109)$$

**Problema 4.3** : Placa plană din fig.4.40 are un contur format din trei arce de cerc având aceeași rază  $a$  dar cu centre geometrice diferite. Se cere poziția centrului de masă al plăcii în sistemul de axe indicat.

Suprafața plăcii se poate considera compusă prin combinarea a trei segmente de disc iar fiecare din acestea apare ca diferența între un sector circular (rel.4.68) și un triunghi isoscel (rel.4.66). Calculele sunt prezentate în tabelul 4.4 care are o formă mai simplă întrucât toate elementele plăcii se găsesc în același plan.

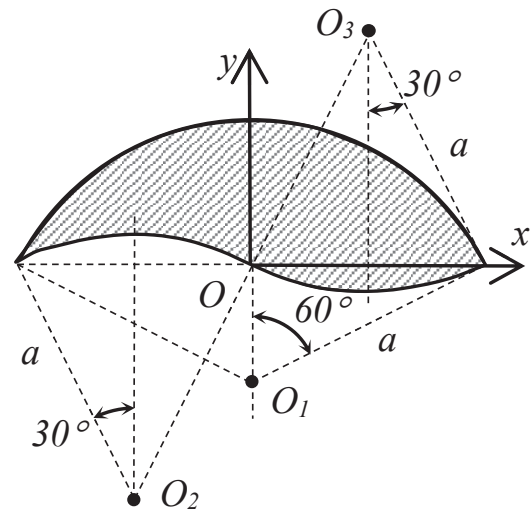


Fig.4.40

Tabelul 4.4

Corp	$A_i$	$x_i$	$y_i$	$A_i x_i$	$A_i y_i$
	$\frac{\pi a^2}{3}$	0	$-\frac{a}{2} + \frac{a\sqrt{3}}{\pi}$	0	$-\frac{\pi a^3}{6} + \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$
	$-\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$	0	$-\frac{a}{6}$	0	$\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$
	$\frac{\pi a^2}{6}$	$\frac{a}{2}$	$\frac{a\sqrt{3}}{2} - \frac{2a}{\pi}$	$\frac{\pi a^3}{12}$	$\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{12} - \frac{a^3}{3}$
	$-\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$	$\frac{a\sqrt{3}}{4}$	$\frac{a\sqrt{3}}{6}$	$-\frac{3a^3}{16}$	$-\frac{a^3}{8}$
	$-\frac{\pi a^2}{6}$	$-\frac{a}{2}$	$-\frac{a\sqrt{3}}{2} + \frac{2a}{\pi}$	$\frac{\pi a^3}{12}$	$\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{12} - \frac{a^3}{3}$
	$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$	$-\frac{a\sqrt{3}}{4}$	$-\frac{a\sqrt{3}}{6}$	$-\frac{3a^3}{16}$	$-\frac{a^3}{8}$

Din motive de spațiu se calculează separat sumele necesare în relațiile din tab.4.1 (plăci):

$$\Sigma A_i = \frac{\pi a^2}{3} - \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cong 0,614 a^2$$

$$\Sigma A_i x_i = \frac{\pi a^3}{6} - \frac{3a^3}{8} \cong 0,148 a^3$$

$$\Sigma A_i y_i = \frac{\pi a^3}{6} (\sqrt{3} - 1) + \frac{a^3}{24} (9\sqrt{3} - 22) \cong 0,116 a^3$$

Rezultă coordonatele centrului de masă al plăcii date:

$$x_C = 0,241a \quad y_C = 0,189a \quad (4.110)$$

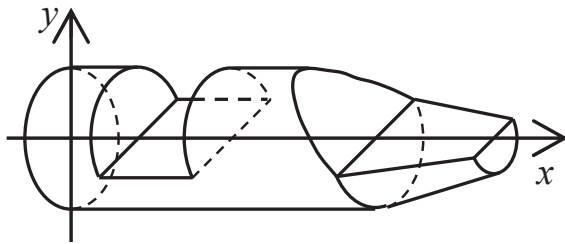


Fig.4.41

**Problema 4.4** În fig. 4.41 este prezentat un corp compus din categoria volumelor ale cărui detalii dimensionale sunt date în secțiunea longitudinală din fig.4.42. Datorită simetriei centrul de masă se va găsi în această secțiune care conține și sistemul de coordonate.

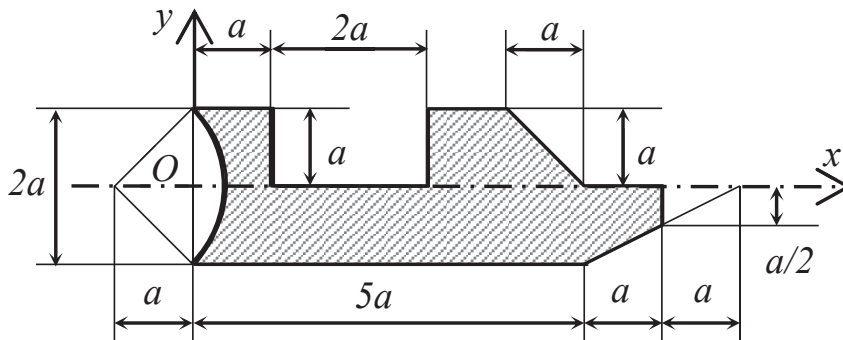


Fig.4.42

Corpurile simple din care se poate considera compus corpul dat sunt următoarele:

- un cilindru cu raza bazei  $a$  și înălțimea  $5a$ , al cărui centru de masă se află la jumătatea înălțimii;
- un semicilindru de rază  $a$  și înălțime  $2a$  decupat din cilindrul de bază; centrul său de masă este poziționat ca la un semidisc (rel.4.69);
- o “copită cilindrică” rezultată prin teșirea la  $45^\circ$  a extremității cilindrului de bază (rel.4.104);
- o jumătate dintr-un con de rază  $a$  și înălțime  $2a$  adăugată cilindrului de bază; elementele necesare sunt descrise prin rel.4.100 adaptate corespunzător;
- o jumătate de con de rază  $a/2$  și înălțimea decupată din semiconul descris mai sus;

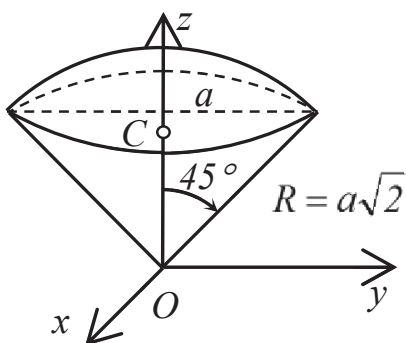


Fig.4.43

- un con complet având raza bazei și înălțimea egale cu  $a$  care se adaugă la stânga cilindrului de bază;

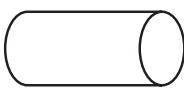
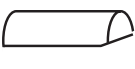

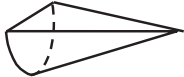
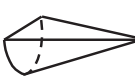

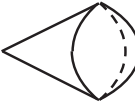
- un sector sferic de rază  $a\sqrt{2}$  având centrul în vârful conului de mai sus, care se decupează din figura rezultată prin alipirea conului la cilindru. Pentru calculul elementelor acestui corp simplu (fig.4.43) trebuie adaptate rel.4.97 prin modificarea limitele de integrare, după cum urmează:

$$\left\{ \begin{array}{l} V = \int_0^{a\sqrt{2}} r^2 dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \varphi d\varphi = \frac{4(\sqrt{2}-1)\pi}{3} a^3 \\ OC = z_C = \frac{1}{V} \int_0^{a\sqrt{2}} r^3 dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi = \frac{3}{8(\sqrt{2}-1)} a \end{array} \right. \quad (4.111)$$

Aceste relații se adaptează poziției în care se află sectorul sferic în cadrul corpului compus dat.

Calculul poziției centrului de masă pentru corpul compus este concentrat în tabelul 4.5.

**Tabelul 4.5**

Corp	$V_i$	$x_i$	$y_i$	$V_i x_i$	$V_i y_i$
	$5\pi a^3$	$\frac{5}{2}a$	0	$\frac{25}{2}\pi a^4$	0
	$-\pi a^3$	2a	$\frac{4a}{3\pi}$	$-2\pi a^4$	$-\frac{4}{3}a^4$
	$-\frac{2}{3}a^3$	$5a - \frac{3\pi}{32}a$	$\frac{3\pi}{16}a$	$-\frac{10}{3}a^4 + \frac{\pi}{16}a^4$	$-\frac{1}{8}\pi a^4$
	$\frac{1}{3}\pi a^3$	$\frac{11}{2}a$	$-\frac{a}{\pi}$	$\frac{11}{6}\pi a^4$	$-\frac{1}{3}a^4$
	$-\frac{1}{24}\pi a^3$	$\frac{25}{4}a$	$-\frac{a}{2\pi}$	$-\frac{25}{96}\pi a^4$	$\frac{1}{48}a^4$
	$\frac{1}{3}\pi a^3$	$-\frac{a}{4}$	0	$-\frac{1}{12}\pi a^4$	0
	$-\frac{4(\sqrt{2}-1)\pi}{3}a^3$	$-a + \frac{3}{8(\sqrt{2}-1)}a$	0	$\frac{4(\sqrt{2}-1)\pi}{3}a^4 - \frac{1}{2}a^4$	0

Sumele necesare în relațiile din tab.4.1 (volum) sunt:

$$\begin{aligned} \Sigma V_i &= \frac{143-32\sqrt{2}}{24}\pi a^3 - \frac{2}{3}a^3 = 12.128a^3 \\ \Sigma V_i x_i &= \frac{1029+128\sqrt{2}}{96}\pi a^4 - \frac{23}{6}a^4 = 35.764a^4 \\ \Sigma V_i y_i &= -\frac{1}{8}\pi a^4 - \frac{85}{48}a^4 = -2.164a^4 \end{aligned} \quad (4.112)$$

Rezultă coordonatele centrului de masă ale corpului compus:

$$x_C = 2.949a \quad y_C = -0.178a \quad (4.113)$$

## 4.6 Corpuri de rotație

Strict legat de calculul poziției centrului de masă se pot descrie două aplicații importante referitoare la corpurile care se pot genera prin rotirea completă sau parțială a unei curbe sau a unei suprafețe în jurul unei axe. Aceste aplicații sunt cunoscute în Mecanică sub numele de *teoremele Pappus-Guldin*.

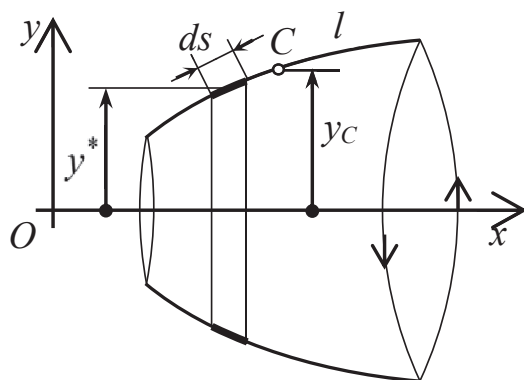


Fig.4.44

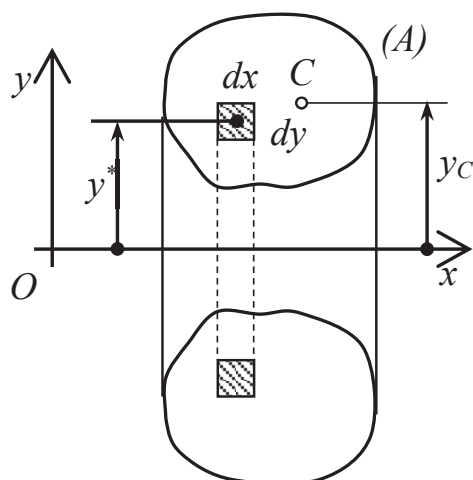


Fig.4.45

Prin rotirea unui arc de curbă plană de lungime  $l$  în jurul axei  $Ox$  (fig.4.44) ia naștere o suprafață în spațiu. Un segment elementar va genera o suprafață de dimensiuni elementare, asimilabilă unui cilindru de rază  $y^*$  și înălțime  $ds$  cu aria laterală:

$$dA = 2\pi y^* ds \quad (4.114)$$

Aria totală a suprafeței generate de arcul dat, ținând cont de rel.(4.18), va fi:

$$A = \int_{(A)} dA = 2\pi \int_{(l)} y^* ds = 2\pi y_C \cdot l \quad (4.115)$$

**Teorema I :** Aria suprafeței generate prin rotirea completă sau parțială a unei curbe plane în jurul unei axe cu care este coplanară este egală cu produsul dintre lungimea curbei și lungimea cercului descris de centrul de masă al acesteia.

Rotind o suprafață de arie  $A$  (fig.4.45) în jurul unei axe din planul ei se obține un corp de rotație. Suprafața elementară de arie:

$$dA = dx dy \quad (4.116)$$

va genera prin rotire un volum elementar  $dV$ .

Acesta poate fi evaluat ca diferență între volumele a doi cilindri coaxiali:

$$dV = dV_1 - dV_2 = \pi \left(y^* + \frac{1}{2} dy\right)^2 dx - \pi \left(y^* - \frac{1}{2} dy\right)^2 dx = 2\pi y^* dx dy = 2\pi y^* dA \quad (4.117)$$

În această relație  $y^*$  este ordonata centrului de masă al ariei elementare  $dA$ ; s-au neglijat înfîniiții mici de ordin superior. Volumul total al corpului generat de suprafața dată, ținând cont și de rel.(4.20), este:

$$V = \int_{(V)} dV = 2\pi \int_{(A)} y^* dA = 2\pi y_C \cdot A \quad (4.118)$$

**Teorema II :** Volumul generat prin rotirea completă sau parțială a unei suprafețe plane în jurul unei axe coplanară cu ea, care nu intersectează suprafața, este egal cu produsul dintre aria suprafeței și lungimea cercului descris de centrul de masă al acesteia.

Atât curbele cât și suprafețele menționate în cele doua teoreme de mai sus pot fi compuse din elemente simple. Pentru poziția centrului lor de masă relațiile generale sunt date în tabelul 4.1. Relațiile (4.115) și (4.118) se modifică:

$$A = 2\pi \left( \frac{1}{l} \sum l_i y_i \right) \cdot l = 2\pi \cdot \sum l_i y_i \quad (4.119)$$

$$V = 2\pi \left( \frac{1}{A} \sum A_i y_i \right) \cdot A = 2\pi \cdot \sum A_i y_i \quad (4.120)$$

**Problema 4.5:** Să se calculeze suprafața laterală și volumul interior al corpului din fig.4.46., obținut prin rotirea completă a unei curbe plane în jurul unei axe verticale.

**Rezolvare :** Suprafața laterală este generată de o linie compusă din două semicercuri de rază  $a$  și o porțiune rectilinie având lungime  $2a$ . Pentru volumul interior suprafața generatoare este compusă dintr-un dreptunghi cu laturile  $2a$  și  $4a$  la care se adaugă un semidisc de rază  $a$  și se scade un al doilea semidisc tot de rază  $a$ . Calculele pentru determinarea celor două necunoscute sunt grupate în tabelul 4.6.

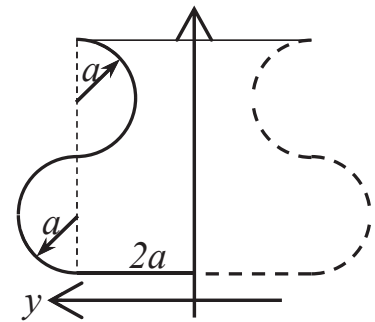


Fig.4.46

Tabelul 4.6

Corp	$l_i$	$y_i$	$l_i y_i$	Corp	$A_i$	$y_i$	$A_i y_i$
	$\pi a$	$2a - \frac{2a}{\pi}$	$2\pi a^2 - 2a^2$		$8a^2$	$a$	$8a^3$
	$\pi a$	$2a + \frac{2a}{\pi}$	$2\pi a^2 + 2a^2$		$\frac{1}{2} \pi a^2$	$2a + \frac{4a}{3\pi}$	$\pi a^3 + \frac{2a^3}{3}$
	$2a$	$a$	$2a^2$		$-\frac{1}{2} \pi a^2$	$2a - \frac{4a}{3\pi}$	$-\pi a^3 + \frac{2a^3}{3}$

Rezultă sumele necesare în relațiile (4.119) și (4.120):

$$\sum l_i y_i = 4\pi a^2 + 2a^2 \quad \sum A_i y_i = \frac{28}{3} a^3 \quad (4.121)$$

și, în continuare, aria laterală și volumul interior solicitate:

$$A = 4\pi(\pi + 1)a^2 \cong 52a^2 \quad V = \frac{56}{3} \pi a^3 \cong 58,64 a^3 \quad (4.122)$$

#### 4.7 Metode speciale de calcul

Relațiile pentru calcul poziției centrului de masă, prezentate în capitolele precedente, se referă la corpuri omogene cu forme geometrice regulate, descrise prin ecuații analitice bine definite iar integralele din aceste relații au primitive exacte.



În practică se întâlnesc însă multe situații în care corpurile au o formă neregulată sau integrarea pe cale analitică este fie dificilă, fie imposibil de efectuat. În aceste cazuri se poate recurge la integrarea pe cale numerică.

*Metoda elementului finit* constă în divizarea corpului dat în segmente foarte mici, având în general aceeași formă, și efectuarea calculelor în modul descris pentru corpurile compuse. Cu cât aceste segmente sunt mai mici cu atât vor aproxima mai bine corpul și precizia determinării va fi mai mare. Metoda elementului finit este dezvoltată în tehnică pentru efectuarea unor calcule complexe de rezistența materialelor care au drept scop principal determinarea tensiunilor interne. Din punctul de vedere al Mecanicii metoda se poate aplica la calculul poziției centrelor de masă și, cum se va arăta ulterior, la calcularea momentelor de inerție. Volumul de calcule numerice relativ mare presupune realizarea unor algoritme de calcul programabile.

Notațiile pentru elementele finite sunt:  $\Delta s$  pentru lungimi,  $\Delta A$  pentru suprafețe și  $\Delta V$  pentru volume. Prin  $x^*$ ,  $y^*$  și  $z^*$  se notează coordonatele centrului de masă al elementului finit respectiv. Relațiile de calcul se pot obține modificând corespunzător pe cele din tab.4.1. Acestea sunt grupate în tabelul 4.7.

**Tabelul 4.7**

<i>BARE</i>	<i>PLĂCI</i>	<i>VOLUME</i>
$l = \sum_{i=1}^n \Delta s_i$	$A = \sum_{i=1}^n \Delta A_i$	$V = \sum_{i=1}^n \Delta V_i$
$x_C = \frac{l}{l} \sum_{i=1}^n x_i^* \Delta s_i$	$x_C = \frac{l}{A} \sum_{i=1}^n x_i^* \Delta A_i$	$x_C = \frac{l}{V} \sum_{i=1}^n x_i^* \Delta V_i$
$y_C = \frac{l}{l} \sum_{i=1}^n y_i^* \Delta s_i$	$y_C = \frac{l}{A} \sum_{i=1}^n y_i^* \Delta A_i$	$y_C = \frac{l}{V} \sum_{i=1}^n y_i^* \Delta V_i$
$z_C = \frac{l}{l} \sum_{i=1}^n z_i^* \Delta s_i$	$z_C = \frac{l}{A} \sum_{i=1}^n z_i^* \Delta A_i$	$z_C = \frac{l}{V} \sum_{i=1}^n z_i^* \Delta V_i$

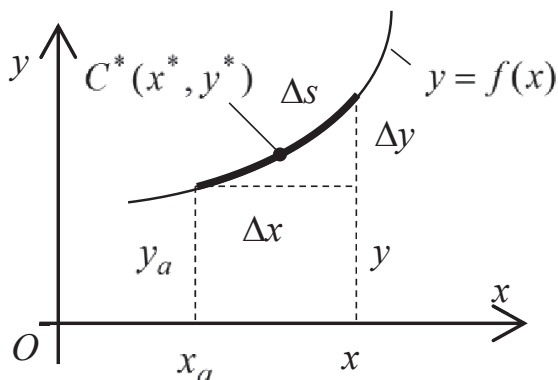


Fig.4.47

Se exemplifică metoda pentru o bară omogenă descrisă printr-o curbă plană (fig.4.47) având ecuația analitică  $y = f(x)$ . Se alege abscisa  $x$  drept varia-bilă independentă cu valori discrete în intervalul  $(x_0, x_{max})$  și se alege un pas de variație  $\Delta x = h = const.$  în acest interval. Arcele de curbă elementare  $\Delta s$  vor avea lungimi diferite; fiecare dintre ele se aproximează prin ipotenuza unui triunghi dreptunghic cu catetele  $\Delta x$  și  $\Delta y$ .

Se admite ipoteza că centrul de masă al segmentului  $\Delta s$  se află la jumătatea intervalului  $\Delta x$  chiar pe arcul de curbă.

Se alcătuiește în continuare algoritmul care conține relațiile de calcul în ordinea efectuării lor, prezentat în tabelul 4.8.

**Tabelul 4.8**

Inițializări		Iterații		Finale	
1	$x_a = x_0$	7	$x = x_a + \Delta x$	13	$l \leftarrow l + \Delta s$
2	$y_a = f(x_a)$	8	$y = f(x)$	14	$\Sigma_x \leftarrow \Sigma_x + x^* \Delta s$
3	$\Delta x = h$	9	$x^* = x_a + \frac{\Delta x}{2}$	15	$\Sigma_y \leftarrow \Sigma_y + y^* \Delta s$
4	$l = 0$	10	$y^* = f(x^*)$	16	$x_a \leftarrow x$
5	$\Sigma_x = 0$	11	$\Delta y = y - y_a$	17	$y_a \leftarrow y$
6	$\Sigma_y = 0$	12	$\Delta s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$	18	$x_a \leq x_{max} ?$

În algoritmul de mai sus notațiile  $\Sigma_x$  și  $\Sigma_y$  reprezintă sumele care apar în prima coloană din tabelul 4.7. Semnul  $\leftarrow$  indică atribuirea valorii expresiei din dreapta sa către variabila din stânga. Secvența iterativă se repetă până la acoperirea întregului interval de variație pentru  $x$ .

Algoritmul de mai sus poate fi programat pe calculator utilizând oricare din limbajele de programare uzuale. Fără a intra în detalii privind programarea se prezintă mai jos o secvență de calcul corespunzătoare acestui algoritm, scrisă în Turbo Pascal, împreună cu o aplicație.

**Problema 4.6** : Să se calculeze poziția centrului de masă la un sfert de elipsă având semiaxele  $a$  și  $b$  (fig.4.48).

**Rezolvare:** Efectuarea calculului în modul arătat în cap.4.4.4 pentru curbele plane, conduce la introducerea în relațiile (4.34) a unor integrale numite chiar “eliptice” care nu au soluție analitică. Menționăm în acest context că pentru calcularea lungimii elipsei, de exemplu, nu există relații de calcul exacte ci numai aproximative, stabilite empiric. Pentru rezolvarea pe cale numerică se programează funcția:

$$y = f(x) = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \quad (4.123)$$

obținută prin explicitarea ecuației de definiție a unei elipse, necesară în algoritmul din tabelul 4.8.

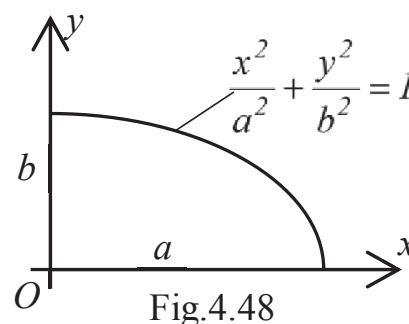


Fig.4.48

Se prezintă alăturat un program simplu scris în Turbo Pascal prin intermediul căruia se poate face calculul pentru orice combinație de semiaxe. S-a luat  $x_{max} = a$  și pasul de variație  $h = a/100$ . Procedura de calcul realizată pe baza algoritmului din tab.4.8 se inserează în acest program.

```

program elipsa;
uses dos, crt;
var a,b:real;
    h,x0,xmax,l,
    xc,yc:real;
function
  func(x :real):real;
begin
  func:=sqrt(a*a-x*x)*b/a;
end;

procedure centrul_maselor;
var x,y,xa,ya,xs,ys:real;
    dx,dy,xs,ys,sx,sy:real;
begin
  {Initializari}
  xa:=x0;ya:=func(xa);
  dx:=h;l:=0;sx:=0;sy:=0;
  {Iteratii}
  repeat
    x:=xa+dx;
    if x>xmax then x:=xmax;
    y:=func(x);
    xs:=xa+dx/2;
    ys:=func(xs);
    dy:=y-ya;
    ds:=sqrt(dx*dx+dy*dy);
    l:=l+ds;
    sx:=sx+xs*ds;
    sy:=sy+ys*ds;
    xa:=x;
    ya:=y;
  until x=xmax;

```

```

{Final}
  xc:=sx/l;
  yc:=sy/l;
end;

begin
  write ('semiaxa mare:');
  readln(a);
  write ('semiaxa mica:');
  readln(b);
  x0:=0;
  xmax:=a;
  h:=a/100.;
  centrul_maselor;
  writeln ('lungimea:',l);
  writeln ('xc = ',xc);
  writeln ('yc = ',yc);
end.

```

Algoritmul prezentat în tab.4.8 pentru corpuri reductibile la curbe plane se poate adapta relativ ușor pentru suprafețe și volume, principiul de calcul fiind același. Trebuie menționat că pentru corpuri având structuri geometrice complexe, plane sau spațiale, există programe de calculator specializate în cadrul cărora divizarea corpului în elemente finite se face automat.

Legat de utilizarea calculatoarelor electronice se poate pune în evidență o metodă foarte simplă pentru calculul ariei și poziției centrului de masă la suprafețele plane, utilă în special pentru cazul unor forme compuse, care nu pot fi descompuse în forme simple. Se știe că pe ecranele monitoarelor imaginile sunt constituite din puncte echidistante de dimensiuni extrem de mici (pixeli) dispuse matriceal care, fiind foarte apropiate, creează impresia de continuitate. Numărul de pixeli pe orizontală și verticală depinde de rezoluția monitorului respectiv. Poziția unui pixel este definită într-un sistem de coordonate  $(x, y)$  cu originea în colțul din stânga sus al ecranului și axa  $y$  verticală în jos (fig.4.49).

Fiecărui pixel îi este rezervată în memoria video o locație în care este înregistrat un număr reprezentând codul său de culoare. Figura de studiat poate fi dimensionată în pixeli și poate fi desenată pe ecran cu o culoare diferită de culoarea de fond. Ea va fi alcătuită astfel dintr-o mulțime de pixeli de aceeași culoare care alcătuiesc în fapt un sistem de elemente finite identice. Notând prin  $\Delta A$  aria corespunzătoare unui pixel se pot adapta în mod corespunzător relațiile din tabelul 4.7 după cum urmează:

$$A = n \cdot \Delta A$$

$$x_C = \frac{1}{A} \sum_{i=1}^n x_i \cdot \Delta A = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (4.124)$$

$$y_C = \frac{1}{A} \sum_{i=1}^n y_i \cdot \Delta A = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$$

După cum se observă aria corespunzătoare unui pixel se simplifică și poziția centrului de masă al figurii va depinde numai de numărul total al pixelilor și de coordonatele lor. Trebuie menționat că este suficient să se investigheze numai zona de ecran care conține figura de studiat. Pornind de la aceste observații se poate programa și în acest caz o secvență de calcul în Turbo Pascal<sup>\*)</sup>. Fără a intra în detalii de programare, se presupune că în programul care include această secvență a fost inițializat modul grafic și s-au definit corect tipurile de variabile. Funcția de sistem *getbkcolor* determină codul de culoare al fondului ecranului iar funcția de sistem *getpixel* determină codul de culoare al pixelului având pe ecran coordonatele  $x, y$ . Dacă acesta aparține figurii, culoarea lui va fi diferită de cea a fondului și în acest caz se execută secvența de calcul corespunzătoare relațiilor (4.124), respectiv majorarea lui  $n$  și a sumelor  $sx$  și  $sy$  ale coordonatelor. După explorarea întregii suprafețe limitată de valorile  $(x_{min}, x_{max})$  și respectiv  $(y_{min}, y_{max})$ , se calculează coordonatele  $x_C$  și  $y_C$  ale centrului de masă al figurii și se marchează acest punct pe ecran printr-un cerc mic de altă culoare.

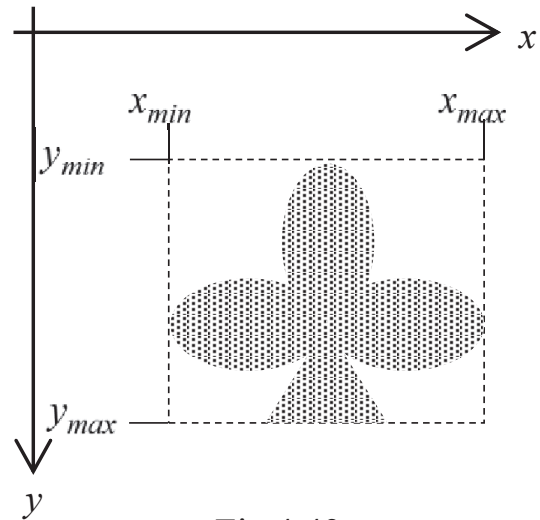


Fig.4.49

```

..
fond:=getbkcolor;
n:=0;
sx:=0;
sy:=0;
for y:=ymin to ymax do
for x:=xmin to xmax do
begin
culoare:=getpixel(x,y);
if culoare <> fond then
begin
n:=n+1;
sx:=sx+x;
sy:=sy+y;
end;{if}
end;{for x}
end;{for y}
xc:=sx div n;
yc:=sy div n;
setcolor(red);
circle (xc,yc,2);
..

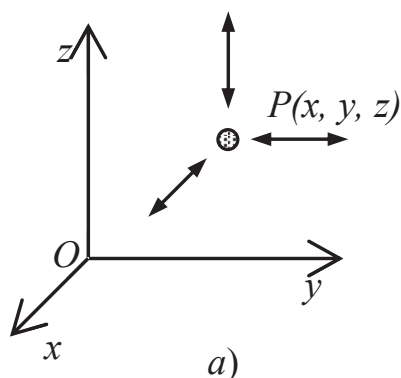
```

<sup>\*)</sup> Poate fi utilizat oricare alt mediu de programare care are funcții de sistem analoge.

## 5. STATICA PUNCTULUI MATERIAL

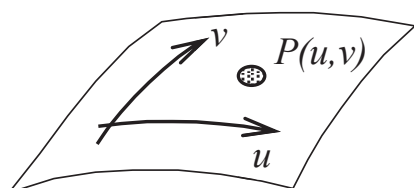
### 5.1 Generalități

Poziția unui punct material în spațiul euclidian tridimensional poate fi indicată printr-un număr de trei *parametri poziționali* a căror definiție și notare depinde de sistemul de coordonate utilizat. Dacă acest sistem este cel cartezian acești parametri sunt coordonatele  $x$ ,  $y$  și  $z$ .



Dacă cei trei parametri pot varia independent, fără niciun fel de relație de legătură între ei, avem de a face cu un *punct material liber* care poate să ocupe orice poziție în spațiu (fig.5.1, a). Se spune că un punct material liber are *trei grade de libertate* (numite uneori și grade de mobilitate) corespunzătoare translațiilor în lungul axelor de coordonate.

În cazul apariției unor restricții geometrice avem un *punct material supus la legături*. Aceste legături reduc numărul gradelor de libertate.



Dacă punctul material este obligat să rămână tot timpul pe o suprafață, atunci coordonatele sale trebuie să satisfacă ecuația acestei suprafețe, având forma generală  $f(x, y, z) = 0$ . Această relație indică o legătură între coordonate, numai două dintre ele putând să fie independente. Punctul material aflat pe o suprafață va avea deci două grade de libertate. Într-un sistem de coordonate curbilini  $(u, v)$  pe suprafață, cele două grade de libertate corespund translațiilor în lungul acestora (fig.5.1, b).

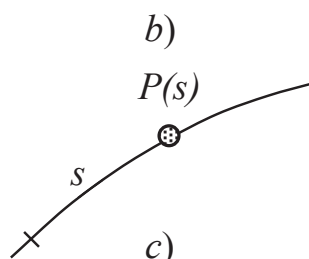


Fig.5.1

Coordonatele unui punct aflat pe o curbă în spațiu vor trebui să satisfacă simultan ecuațiile  $f_1(x, y, z) = 0$  și  $f_2(x, y, z) = 0$  ale celor două suprafețe prin intersecția cărora se definește curba respectivă. Existând astfel două ecuații de legătură între coordonate, numai una dintre ele poate varia independent. Punctul material obligat să rămână pe o curbă are în consecință un singur grad de libertate. Acesta corespunde translației după coordonata intrinsecă  $s$  în lungul acestei curbe (fig.5.1, c).

### 5.2 Legăturile punctului material

Restricțiile geometrice impuse de legături punctului material se manifestă prin aplicarea către acesta a unor *forțe de legătură (reacțiuni)*. Legat de acest aspect se enunță *axioma legăturilor: orice legătură poate fi suprimată și înlocuită prin forțe corespunzătoare.*

Printr-un punct al unei suprafețe continue ( $S$ ) se poate construi un plan tangent ( $T$ ) și o dreaptă normală  $(n)$ - $(n)$  (fig.5.2). Legătura impune o restricție de deplasare după direcția acestei drepte iar forța care o realizează este *reacțiunea normală*  $\bar{N}$ . Direcția reacțiunii este în consecință bine precizată. Dacă există o rezistență la deplasarea unui punct pe o suprafață ea se va materializa printr-o forță  $\bar{T}$  care acționează în planul tangent la aceasta, pe o direcție variabilă corespunzătoare tendinței de mișcare și în sens invers acesteia.

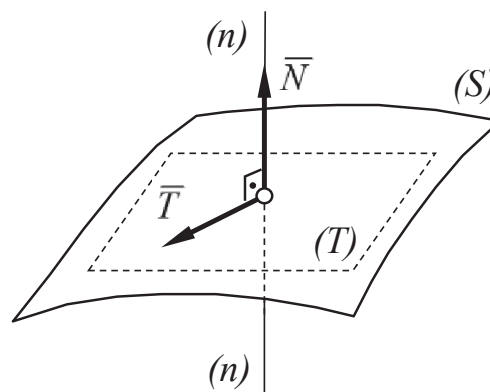


Fig.5.2

Printr-un punct al unei curbe continue ( $C$ ) se poate construi o singură dreaptă tangentă  $(t)$ - $(t)$  la curbă și un plan normal  $(N)$  (fig.5.3). La o astfel de legătură restricția de mișcare după orice direcție conținută în acest plan este realizată tot de o *reacțiune normală*  $\bar{N}$ ; direcția ei este variabilă.

Rezistența opusă unui punct material la deplasarea pe o curbă, notată tot prin  $\bar{T}$ , va acționa după direcția unică a tangentei la curbă, în sens invers tendinței de mișcare.

În cazul în care ambele tipuri de legături introduc numai reacțiuni normale, fără a opune rezistență deplasărilor permise, ele se numesc legături *lucii* sau *ideale*. Rezistențele tangențiale se datoresc în general frecării dintre punctul material și suprafața sau curba respectivă.

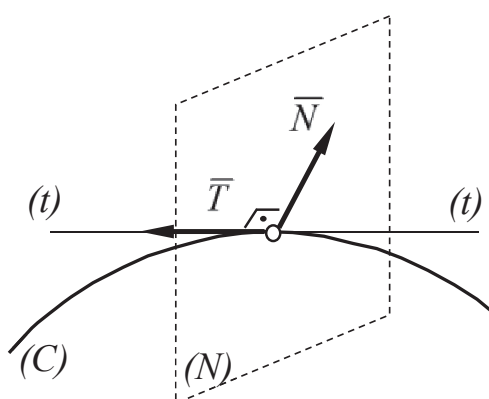


Fig.5.3

Dacă legătura poate să înceteze prin simpla desprindere a punctului de suprafața sau curba respectivă ea se numește *unilaterală*. Dacă este realizată constructiv în așa fel încât punctul să nu poată părăsi contactul, se spune că legătura este *bilaterală* (fig.5.4).



Fig.5.4

Un caz special îl constituie legătura prin care punctul material este prins la extremitatea unui fir întins și tensionat (fig.5.5). O astfel de legătură suprimă posibilitatea deplasării punctului după direcția firului. Forța de legătură specifică este egală cu tensiunea din fir, are direcția acestuia și sensul în concordanță cu efectul de tracțiune aplicat punctului material (se reamintește că în Mecanică firul este considerat flexibil și inextensibil).

Notăția acestei reacțiuni este  $\bar{T}$  sau  $\bar{S}$ . În lucrarea de față, pentru evitarea confuziei cu forța de frecare, va fi preferată cea de a doua variantă.

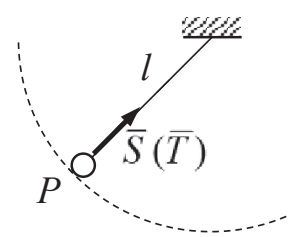


Fig.5.5

Se poate face o analogie între acest tip de legătură și simpla așezare a punctului material pe suprafața unei sfere având raza egală cu lungimea firului și centrul în punctul lui de suspendare. Tensiunea din fir este astfel echivalentă reacțiunii normale din partea acestei suprafețe virtuale.

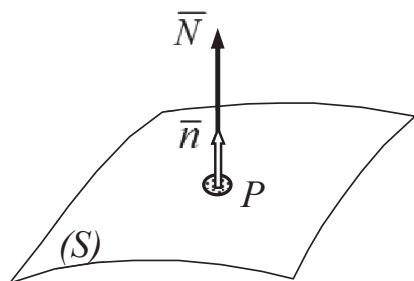


Fig.5.6

### 5.3 Legături definite analitic

În cazul în care suprafața sau curba de legătură sunt definite prin ecuații analitice în sistemul de referință cartezian, se pot exprima analitic și reacțiunile normale.

Într-un punct al unei suprafețe  $f(x, y, z) = 0$  (fig.5.6) versorul normalei se definește prin relația:

$$\bar{n} = \frac{\partial f}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \bar{k} \quad (5.1)$$

Reacțiunea normală este coliniară cu acest versor, putându-se scrie:

$$\bar{N} = \lambda \bar{n} = \left( \lambda \frac{\partial f}{\partial x} \right) \bar{i} + \left( \lambda \frac{\partial f}{\partial y} \right) \bar{j} + \left( \lambda \frac{\partial f}{\partial z} \right) \bar{k} = N_x \bar{i} + N_y \bar{j} + N_z \bar{k} \quad (5.2)$$

În relațiile corespunzătoare proiecțiilor pe axe ale reacțiunii normale, respectiv:

$$N_x = \lambda \frac{\partial f}{\partial x} \quad N_y = \lambda \frac{\partial f}{\partial y} \quad N_z = \lambda \frac{\partial f}{\partial z} \quad (5.3)$$

se atribuie variabilelor  $x, y, z$  valorile coordonatelor punctului în care acționează reacțiunea. Factorul de proporționalitate  $\lambda$  rezultă din calcul.

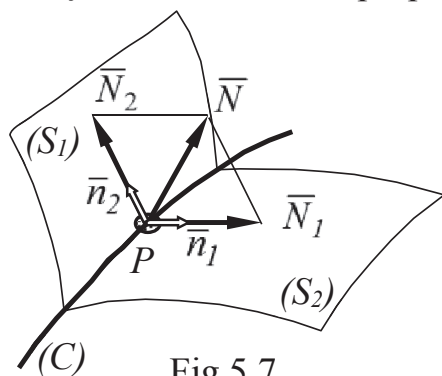


Fig.5.7

O curbă în spațiu (fig.5.7) se definește analitic ca intersecție a două suprafețe  $f_1(x, y, z) = 0$  și  $f_2(x, y, z) = 0$ . Într-un punct al curbei există două direcții normale având versorii:

$$\bar{n}_1 = \frac{\partial f_1}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial f_1}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial f_1}{\partial z} \bar{k} \quad (5.4)$$

$$\bar{n}_2 = \frac{\partial f_2}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial f_2}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial f_2}{\partial z} \bar{k}$$

Reacțiunea normală din partea curbei se poate considera ca rezultanta a două componente după aceste direcții:

$$\bar{N} = \bar{N}_1 + \bar{N}_2 = \lambda_1 \bar{n}_1 + \lambda_2 \bar{n}_2 = \left( \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x} \right) \bar{i} + \left( \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y} \right) \bar{j} + \left( \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z} \right) \bar{k} \quad (5.5)$$

Ca și în cazul precedent, în expresiile derivatelor parțiale se înlocuiesc valorile coordonatelor punctului de pe curbă unde acționează reacțiunea. Factorii de proporționalitate  $\lambda_1$  și  $\lambda_2$  și valorile reacțiunilor rezultă din calcul.

## 5.4 Legături cu frecare

Apariția frecării între corpuri se explică în general prin calitatea suprafețelor acestora aflate în contact nemijlocit. Microdenivelările în relief ale suprafețelor datorate stării fizice a acestora sau rugozității, în cazul corpurilor prelucrate mecanic, se întrepătrund și, atunci când apare o tendință de alunecare reciprocă, opun o rezistență la deplasare.

Dacă asupra unui punct material aflat pe o suprafață se aplică o forță de tracțiune  $\vec{F}$  a cărei valoare crește progresiv pornind de la zero, pe suprafața de contact apare o forță de frecare  $\vec{T}$  egală și de sens contrar (fig.5.8, a), fără a avea loc vre-o deplasare a punctului.

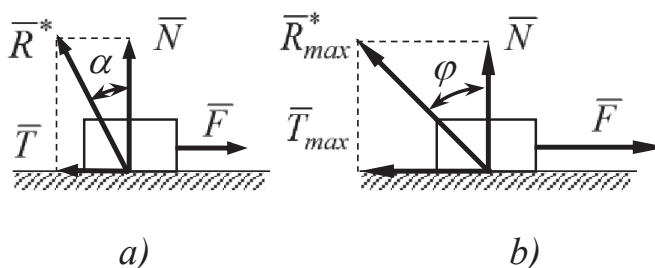


Fig.5.8

Reacțiunea totală  $\vec{R}^* = \vec{N} + \vec{T}$  face unghiul  $\alpha$  cu normala. La un moment dat rezistența suprafeței este depășită și corpul se pune în mișcare (fig.5.8, b). Forța de frecare  $\vec{T}_{max}$  din momentul ruperii echilibrului se păstrează în continuare la această valoare pe parcursul mișcării iar surplusul forței  $\vec{F}$ , conform celui de al doilea principiu fundamental, determină apariția unei accelerații. Reacțiunea totală capătă valoarea  $\vec{R}_{max}^*$  și face un unghi  $\alpha_{max} = \varphi$  cu normala. Din fig.5.7 se deduce:

$$|\vec{T}| = |\vec{N}| \operatorname{tg} \alpha \quad |\vec{T}_{max}| = |\vec{N}| \operatorname{tg} \varphi \quad (5.6)$$

Înainte de ruperea echilibrului  $|\vec{T}| \leq |\vec{T}_{max}|$  și în consecință se poate scrie că la echilibru:

$$|\vec{T}| \leq |\vec{N}| \operatorname{tg} \varphi \quad (5.7)$$

Studiul clasic al frecării efectuat de C. Coulomb în cazul unei frecări uscate a pus în evidență următoarele proprietăți:

- forța de frecare maximă este proporțională cu apăsarea normală dintre suprafețe;
- forța de frecare depinde de natura corpurilor aflate în contact și de starea suprafețelor lor;
- forța de frecare nu depinde de viteza relativă dintre corpuri și nici de mărimea suprafețelor în contact.

Proportionalitatea amintită mai sus se exprimă sub forma:

$$|\vec{T}_{max}| = \mu |\vec{N}| \quad (5.8)$$

Factorul de proporționalitate  $\mu$  poartă numele de *coeficient de frecare de alunecare* și este o mărime adimensională. Comparând relațiile (5.6) și (5.8) reiese echivalența  $\mu = \operatorname{tg} \varphi$  (unghiul  $\varphi$  se numește și *unghi de frecare*).



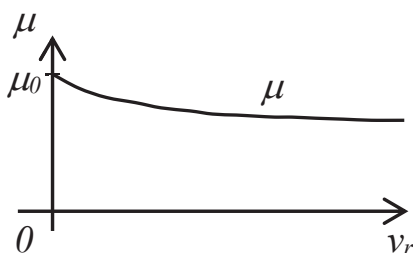


Fig.5.9

Proprietăților enunțate mai sus li se pot aduce unele corective:

– coeficientul de frecare de alunecare  $\mu$  scade odată cu creșterea vitezei relative dintre suprafețele în contact (fig.5.9); aceasta înseamnă că forța de frecare din momentul ruperii echilibrului este mai mare decât cea din timpul mișcării iar până la ruperea echilibrului se utilizează un coeficient de

frecare  $\mu_0$  (pentru oțel/oțel  $\mu_0 = 0,15$  iar  $\mu = 0,07 \div 0,15$ );

– dacă apăsarea normală este foarte mare forța de frecare nu mai variază proporțional cu aceasta; forțele mari concentrate pe suprafețe de contact mici produc deformarea locală a suprafețelor și se manifestă fenomenul de “zgâriere”;

– la lustruirea foarte avansată a suprafețelor forțele de frecare nu scad ci, dimpotrivă, cresc datorită intervenției forțelor de atracție moleculare; deplasarea, de exemplu, a unui geam de sticlă peste altul necesită forțe foarte mari, fiind aproape imposibilă;

– lubrifianții reduc considerabil forțele de frecare; stratul de lubrifiant dintre două suprafețe supus presiunii dintre acestea creează o portanță care împiedică întrepătrunderea microdenivelărilor.

Dacă în aplicații direcția și sensul forței de frecare sunt bine determinate, se pot utiliza următoarele relații:

$$\text{– la echilibru:} \quad T \leq \mu N \quad (5.9)$$

$$\text{– în mișcare:} \quad T = \mu N \quad (5.10)$$

Dacă direcția și sensul de mișcare nu se cunosc, forța de frecare poate fi exprimată vectorial folosindu-se versorul vitezei, definit ca raportul între vectorul vitezei și modulul său:

$$\vec{T} = -\mu \left| \vec{N} \right| \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \quad (5.11)$$

## 5.5 Echilibrul punctului material

Asupra unui punct material liber acționează numai forțele date, direct aplicate. Acestea alcătuiesc un sistem de forțe concurente care, așa cum s-a arătat în cap.3.2, se pot reduce la o forță rezultantă. *Condiția necesară și suficientă pentru ca un punct material liber să se afle în echilibru este ca rezultanta sa fie nulă.* Într-un sistem de referință cartezian, relația

$$\vec{R} = \sum \vec{F}_i = X \vec{i} + Y \vec{j} + Z \vec{k} = 0 \quad (5.12)$$

presupune ca proiecțiile pe axe ale rezultantei să fie nule, respectiv:

$$X = \sum F_{ix} = 0 \quad Y = \sum F_{iy} = 0 \quad Z = \sum F_{iz} = 0 \quad (5.13)$$

Aceste relații reprezintă un sistem de trei ecuații scalare de echilibru. Este de remarcat corespondența între numărul gradelor de libertate și numărul ecuațiilor de echilibru; se spune că fiecare ecuație de echilibru răpește punctului câte un grad de libertate.

Dacă punctul material este supus la legături, pe lângă forțele date, asupra acestuia acționează și reacțiunile descrise în capitolul precedent iar condiția de echilibru devine:

$$\bar{R} = \sum \bar{F}_i + \bar{N} + \bar{T} = 0 \quad (5.14)$$

Cele trei ecuații scalare de echilibru vor avea în acest caz forma generală:

$$\sum F_{ix} + N_x + T_x = 0 \quad \sum F_{iy} + N_y + T_y = 0 \quad \sum F_{iz} + N_z + T_z = 0 \quad (5.15)$$

Printr-o alegere convenabilă a sistemului de referință aceste ecuații pot fi simplificate în așa fel încât reacțiunile  $\bar{N}$  și  $\bar{T}$  să se proiecteze pe axe în adevărată mărime, mai ales că ele sunt și perpendiculare una pe cealaltă. Dacă legăturile sunt lucii, respectiv fără frecare, în aceste ecuații nu intervine  $\bar{T}$ .

Numărul de ecuații scalare de echilibru se reduce dacă asupra punctului acționează sisteme particulare de forțe. Astfel, dacă toate forțele sunt coplanare sunt suficiente numai două ecuații iar dacă sunt coliniare numai o singură ecuație.

**Problema 5.1:** Pe un plan înclinat cu unghiul  $\gamma$  față de orizontală se află un punct material  $P$  de greutate  $G$  suspendat de doua fire care fac unghiurile  $\alpha$  și  $\beta$  cu o dreaptă perpendiculară pe muchia planului (fig.5.10, a). Să se calculeze reacțiunea din partea planului și tensiunile din fire.

**Rezolvare:** Firele se înlocuiesc fiecare cu câte o forță dirijată după direcția și în sensul lor de acțiune și egală cu tensiunea din fir. Planul înclinat introduce doar o reacțiune normală, neexistând vreo tendință de mișcare a punctului material. Se alege un sistem de referință cu axa  $Ox$  pe muchia planului,  $Oy$  perpendiculară pe muchie și trecând prin  $P$  și  $Oz$  perpendiculară pe plan (fig.5.10, b).

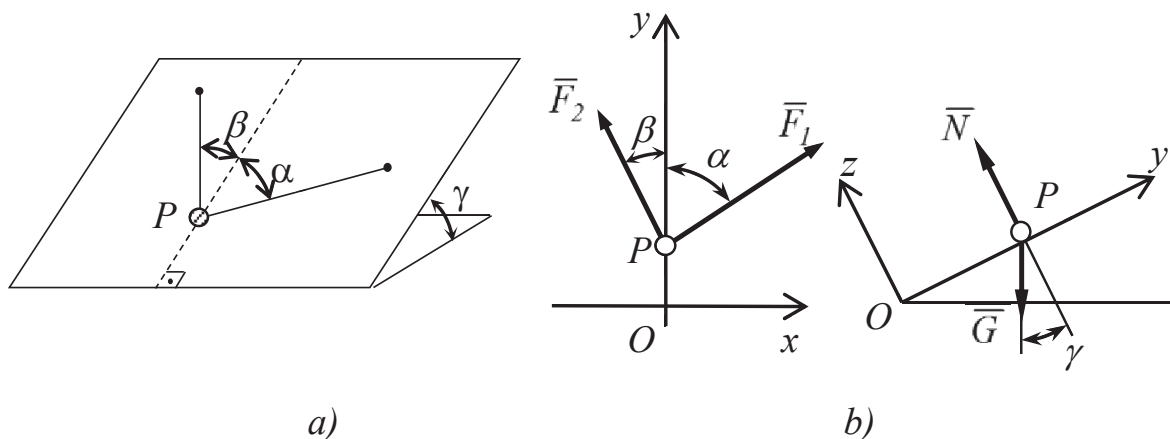


Fig.5.10

Se proiectează forțele pe axele acestui sistem:

$$\begin{aligned} (\sum F_x = 0) \quad F_1 \sin \alpha - F_2 \sin \beta &= 0 \\ (\sum F_y = 0) \quad F_2 \cos \alpha + F_2 \cos \beta - G \sin \gamma &= 0 \\ (\sum F_z = 0) \quad N - G \cos \gamma &= 0 \end{aligned} \quad (5.16)$$

Se obțin următoarele rezultate pentru cele trei necunoscute:

$$N = G \cos \alpha \quad F_1 = \frac{G \sin \beta \sin \gamma}{\sin(\alpha + \beta)} \quad F_2 = \frac{G \sin \alpha \sin \gamma}{\sin(\alpha + \beta)} \quad (5.17)$$

**Problema 5.2** Pe suprafața unui paraboloid de rotație având ecuația  $x^2 + y^2 + 9az = 0$  se reazemă fără frecare un punct material de greutate  $G$  suspendat printr-un fir de lungime  $MP = 5a$  de un punct aflat la cota  $OM = 3a$  pe axa de simetrie (fig.5.11). Să se afle reacțiunea normală din partea suprafeței paraboloidului precum și tensiunea din fir.

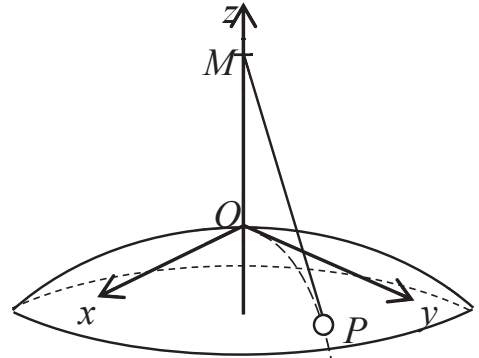


Fig.5.11

**Rezolvare:** Suprafața fiind simetrică față de axa  $Oz$  se alege axa  $Oy$  coplanară cu firul. Coordonatele punctului  $P$  se pot determina observând că acesta se află la intersecția a trei suprafețe:

- paraboloidul dat:

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 9az = 0 \quad (5.18)$$

- sfera cu centrul în  $M(0, 0, 3a)$  de rază  $MP = 5a$  pe care se află punctul suspendat de fir:

$$x^2 + y^2 + (z - 3a)^2 = (5a)^2 \quad (5.19)$$

- planul  $yOz$  cu ecuația:

$$x = 0 \quad (5.20)$$

Rezolvarea sistemului format din ecuațiile celor trei suprafețe are două soluții reale, existând în consecință două puncte de intersecție; cel care corespunde poziției din fig.5.11 are coordonatele:

$$x_P = 0 \quad y_P = 3a \quad z_P = -a \quad (5.21)$$

Forțele care acționează asupra punctului material sunt coplanare în planul  $Oyz$  (fig.5.12). Greutatea punctului material are proiecție numai pe  $Oz$  și în consecință:

$$G_x = G_y = 0 \quad G_z = -G \quad (5.22)$$

Tensiunea din fir are direcția acestuia, determinată de coordonatele punctelor  $M$  și  $P$ .

În baza relației (3.4) se poate scrie:

$$\frac{|\vec{S}|}{PM} = \frac{S_x}{x_M - x_P} = \frac{S_y}{y_M - y_P} = \frac{S_z}{z_M - z_P} \quad (5.23)$$

Notând  $|\vec{S}| = S$  se obțin proiecțiile

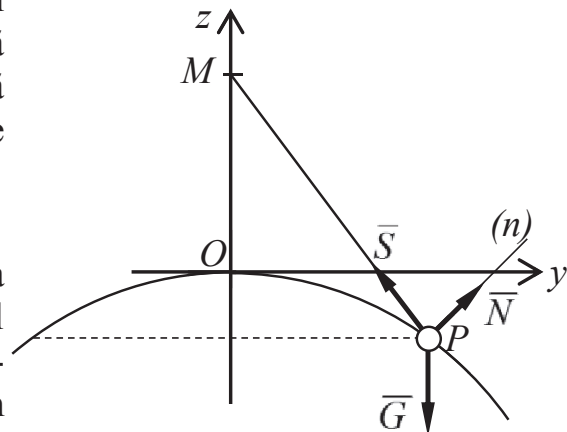


Fig.5.12

$$S_x = 0 \quad S_y = -\frac{3}{5} S \quad S_z = \frac{4}{5} S \quad (5.24)$$

Pentru proiecțiile pe axe ale reacțiunii normale la suprafața paraboloidului se utilizează relațiile (5.3) după cum urmează:

$$N_x = \lambda \frac{\partial f}{\partial x} = 2\lambda x \quad N_y = \lambda \frac{\partial f}{\partial y} = 2\lambda y \quad N_z = \lambda \frac{\partial f}{\partial z} = 9\lambda a \quad (5.25)$$

Se înlocuiesc valorile (5.21) ale coordonatelor punctului P:

$$N_x = 0 \quad N_y = 6\lambda a \quad N_z = 9\lambda a \quad (5.26)$$

Ecuatiile de echilibru au forma:

$$\begin{cases} N_y + S_y = 0 \\ N_z + S_z + G_z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 6\lambda a - \frac{3}{5}S = 0 \\ 9\lambda a + \frac{4}{5}S - G = 0 \end{cases} \quad (5.27)$$

Se obțin soluțiile:

$$S = \frac{10}{17}G \cong 0,588G \quad \lambda = \frac{1}{17} \frac{G}{a} \quad (5.28)$$

Reacțiunea normală are valoarea totală:

$$N = \sqrt{N_x^2 + N_y^2 + N_z^2} = \sqrt{117} \lambda a = \frac{\sqrt{117}}{17} G \cong 0,632G \quad (5.29)$$

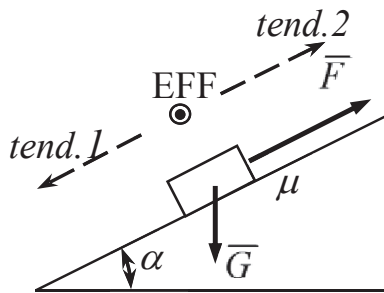


Fig.5.13

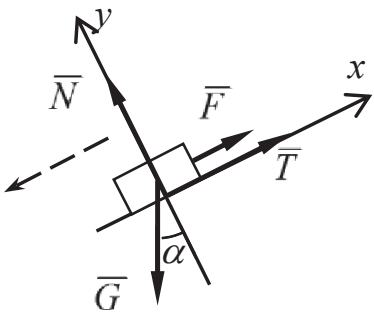
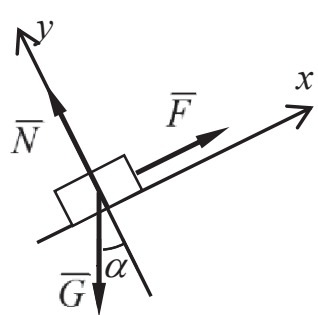
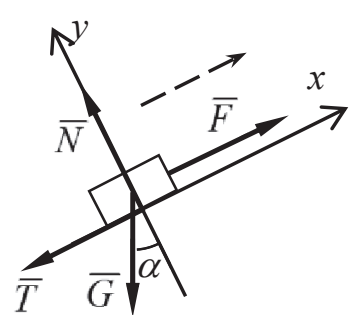
Problema 5.3: Pe un plan înclinat cu unghiul  $\alpha$  față de orizontală se află un punct material de greutate  $G$  (fig.5.13). Asupra lui acționează o forță  $F$  paralelă cu planul înclinat. Coeficientul de frecare dintre punct și plan este  $\mu$ . Să se studieze echilibrul punctului material în funcție de variabila  $F$ .

Rezolvare: În funcție de mărimea forței  $F$  pot exista mai multe situații, după cum urmează:

- o tendință de alunecare în jos pe planul înclinat sub acțiunea greutății proprii, în cazul în care forța de tracțiune este mică;
- un echilibru fără frecare (EFF), în care forța de tracțiune echilibrează componenta greutății pe direcția planului înclinat și nu există nici-o tendință de mișcare;
- o tendință de urcare pe planul înclinat în cazul unei forțe de tracțiune suficient de mare care să depășească acțiunea greutății proprii.

Pentru fiecare din aceste situații forțele care acționează asupra punctului material sunt reprezentate în tabelul 5.1. Forțele fiind coplanare, echilibrul poate fi descris prin două ecuații de echilibru, respectiv de proiecție pe axele de coordonate alese corespunzător, la care se adaugă condiția de echilibru cu frecare (5.9).

Tabelul 5.1

tendința 1-a	echilibru fără frecare	tendința 2-a
		
$\begin{cases} F + T - G \sin \alpha = 0 \\ N - G \cos \alpha = 0 \\ T \leq \mu N \end{cases}$	$\begin{cases} F - G \sin \alpha = 0 \\ N - G \cos \alpha = 0 \\ T = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} F - T - G \sin \alpha = 0 \\ N - G \cos \alpha = 0 \\ T \leq \mu N \end{cases}$
$F \geq \underbrace{G(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}_{F_1}$	$F = G \sin \alpha = F_0$	$F \leq \underbrace{G(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)}_{F_2}$

Cele trei valori distincte calculate pentru forța  $F$  pot fi dispuse în ordine crescătoare pe o axă (fig.5.14). Se constată că echilibrul cu frecare există pentru  $F_1 \leq F \leq F_2$ , respectiv:

$$G(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) \leq F \leq G(\sin \alpha + \mu \cos \alpha) \quad (5.30)$$

Valoarea  $F_0$  pentru echilibru fără frecare se află la mijlocul acestui interval.

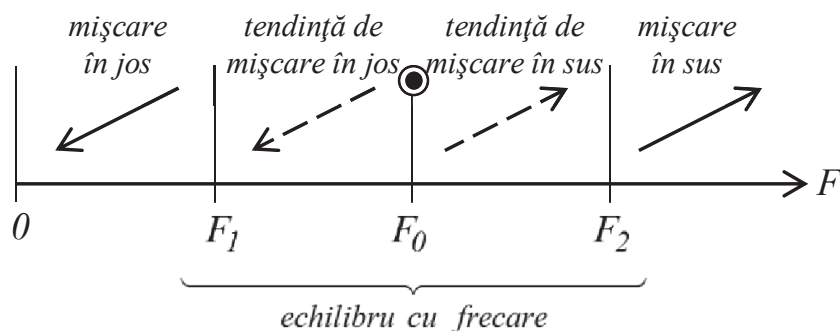


Fig.5.14

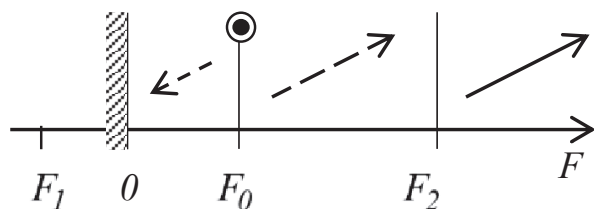


Fig.5.15

Un caz particular poate să apară atunci când  $F_1 \leq 0$  (fig.5.15); această situație este întâlnită în cazul în care unghiul de înclinare al planului este mic sau în cazul când suprafața acestuia prezintă un coeficient de frecare mare.

Dacă tracțiunea lipsește, respectiv dacă  $F = 0$ , intervine fenomenul de *autofrânare*, în care punctul rămâne în echilibru pe planul înclinat susținut numai de forța de frecare.

## 6. STATICA SOLIDULUI RIGID

### 6.1 Generalități

În cazul unui solid rigid liber numărul gradelor de libertate (mobilitate) este de 6. Raportat la un sistem cartezian de referință (fig. 6.1) posibilitățile de mișcare constau din trei translații în lungul axelor de coordonate și din trei rotații în jurul acestor direcții.

Pornind de la observația evidențiată în cap.5.1 că numărul gradelor de libertate este egal cu numărul parametrilor poziționali independenți, pentru un corp se pot lua în considerare coordonatele unui punct al său și unghiurile de rotație în jurul axelor sistemului cartezian. Fără a intra în detalii, pentru necesitățile capitolului de față acești parametri sunt  $x, y, z, \theta_x, \theta_y, \theta_z$ .

În cazul frecvent al unui corp obligat să se afle tot timpul într-un plan, de exemplu în  $xOy$  (fig.6.2), vor exista pentru acesta numai trei grade de libertate, respectiv două translații în lungul axelor din plan și o rotație în jurul unei axe perpendiculare pe plan. Parametrii poziționali independenți corespunzători acestui caz sunt  $x, y, \theta \equiv \theta_z$ .

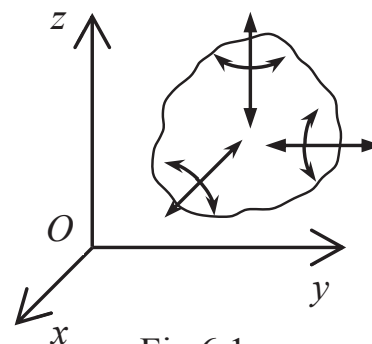


Fig.6.1

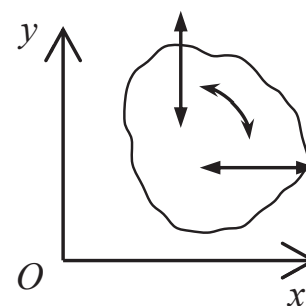


Fig.6.2

### 6.2 Legăturile solidului rigid

Restricțiile geometrice impuse de legăturile pe care un corp dat le poate avea cu o bază fixă sau cu un alt corp, fix sau mobil, determină restrângerea numărului gradelor de libertate ale acestuia. Din punct de vedere constructiv se pot realiza modele de legături (cuple cinematice) cu diferite combinații de grade de libertate suprimate; un studiu mai detaliat al acestora se întâlnește în Teoria Mecanismelor. Prin tradiție, în cadrul Mecanicii sunt studiate numai câteva legături uzuale, respectiv *rezemul simplu*, *articulația*, și *încastrarea*. La acestea se adaugă și *prinderea în fire* pentru care sunt valabile observațiile stabilite în cap.5.2.

*Axioma legăturilor*, enunțată în cazul punctului material (cap.5.1), capătă în acest caz o formulare mai completă, după cum urmează: *orice legătură poate fi suprimată și înlocuită prin forțe și momente de legătură (reacțiuni) corespunzătoare gradelor de libertate suprimate*. Astfel, unei translații anulate îi va corespunde o forță după direcția respectivă iar unei rotații față de o axă un moment în raport cu aceasta.

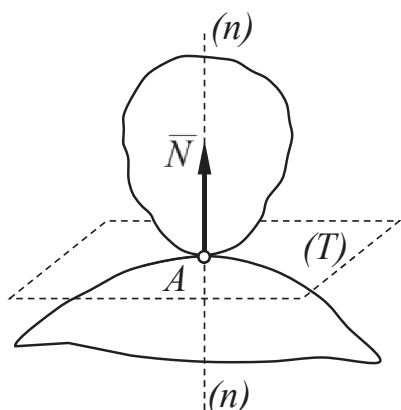


Fig. 6.3

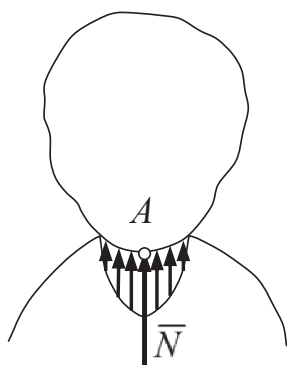


Fig. 6.4

prin forțe distribuite pe zona menționată; admitând ipoteza că aceste forțe sunt paralele, ele pot fi reduse la o rezultantă unică conform celor arătate în cap.3.4.3, aplicată în centrul forțelor paralele.

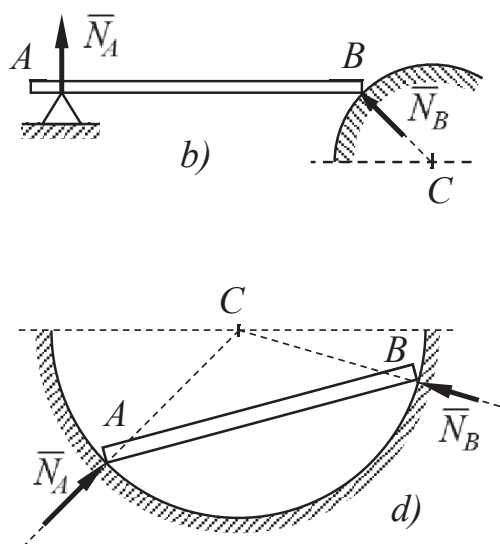
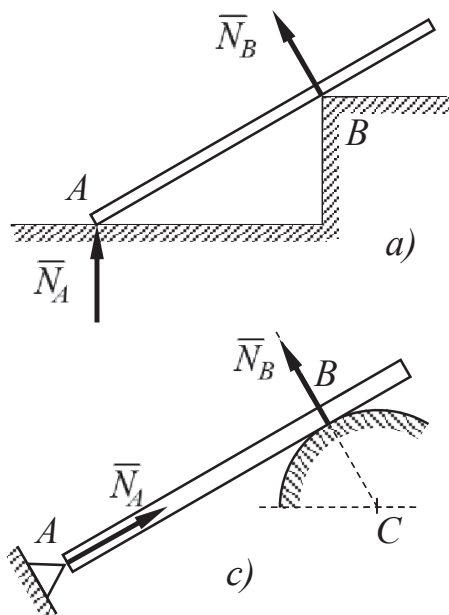


Fig. 6.5

Dacă una dintre cele două suprafețe prezintă un punct singular de contact, reacțiunea  $\bar{N}$  are direcția normalei la cealaltă suprafață. Câteva situații de acest fel sunt exemplificate în fig.6.5. În cazul în care suprafața de sprijin este circulară în secțiune, direcția reacțiunii trece prin centrul geometric  $C$  al acesteia.

*Reazemul simplu* se definește ca legătura prin care un punct al corpului dat se află în contact cu suprafața altui corp. În mișcare, un alt punct al corpului se poate afla în această situație.

Dacă cele două suprafețe sunt continue, fără puncte singulare, atunci în punctul de contact  $A$  există un plan tangent  $(T)$  și o singură dreaptă normală  $(n)$ - $(n)$  la ambele suprafețe (fig.6.3). Legătura suprimă corpului un singur grad de libertate din cele șase menționate mai înainte, respectiv translația după direcția acestei normale.

Conform axiomei legăturilor, reazemul simplu se înlocuiește printr-o singură forță – reacțiunea normală  $\bar{N}$ , al cărei sens este bine definit de acțiunea corpului de legătură asupra corpului analizat.

În mod practic, din motive constructive sau datorită deformărilor, în cadrul rezemării legătura dintre cele două corpuri poate avea loc după o zonă de contact extinsă – linie sau, după caz, suprafață (fig.6.4). Interacțiunea dintre corpuri se manifestă

În reprezentările grafice simplificate ale legăturilor se utilizează de obicei simboluri ale reazemului simplu; cele mai utilizate sunt reprezentate în fig.6.6. Simbolurile din detaliile *c)* și *d)* indică un reazem care permite constructiv mici deplasări laterale, fără rezistențe datorate frecării.

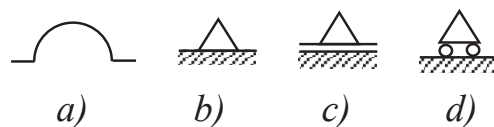


Fig.6.6

Articulația este legătura prin care unul și același punct al corpului dat rămâne permanent într-un punct fix din spațiu sau într-un punct aparținând unui corp mobil.

Cea mai frecventă reprezentare a acestui tip de legătură este prin două sfere concentrice (fig.6.7), punctul comun fiind centrul lor geometric  $O$ . Din acest motiv articulația în spațiu se mai numește și *articulație sferică*. Legătura suprimă cele trei translații ale corpului, lăsându-i cele trei rotații.

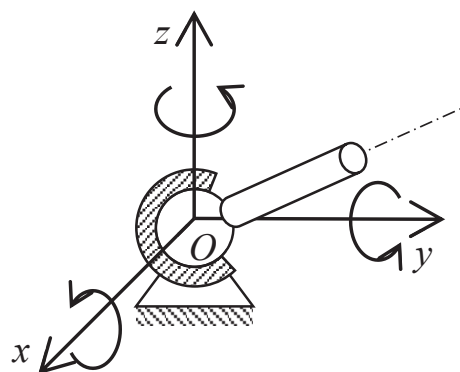


Fig.6.7

Conform axiomei legăturilor și corespunzător celor trei translații suprimate, articulația sferică introduce trei reacțiuni perpendiculare una pe cealaltă, după niște direcții convenabil alese.

Dacă cele trei direcții sunt axele de coordonate, reacțiunile se notează  $R_x, R_y, R_z$  și constituie necunoscute ale calculului. În unele aplicații, în locul acestora se ia în considerare rezultanta lor care introduce tot trei necunoscute – modulul reacțiunii și două unghiuri de poziție pentru direcția acesteia (cap.3.1.2).

Dacă corpul dat se poate deplasa numai într-un plan, legătura se realizează prin intermediul a doi cilindri coaxiali – cel al lagărului la exterior și cel al axului la interior; axa comună este perpendiculară pe plan în punctul respectiv (fig.6.9). Articulația plană se mai numește și *articulație cilindrică*. Din cele trei grade de libertate pe care le are un corp liber în plan, articulația cilindrică suprimă cele două translații, lăsându-i numai rotația (fig.6.10).

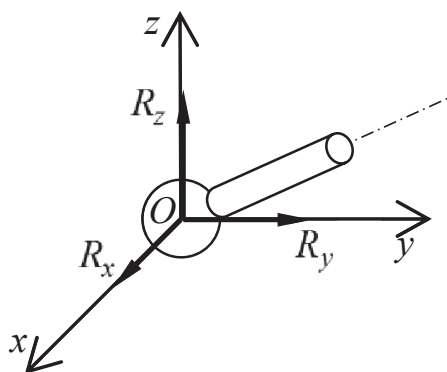


Fig.6.8

Corespunzător translațiilor suprimate, conform axiomei legăturilor, o articulație cilindrică va introduce două reacțiuni, perpendiculare una pe cealaltă, după direcții convenabil alese. Pentru cele două reacțiuni coexistă două moduri de notație echivalente:  $R_x, R_y$  conforme axelor de coordonate din plan, precum și  $H, V$  preluate din statica construcțiilor, cu semnificația de reacțiune orizontală și respectiv verticală. Prin tradiție această ultimă notație se păstrează în Mecanica tehnică și în cazul când direcțiile lor sunt altele decât cele menționate.



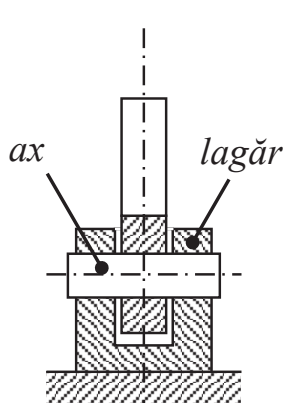


Fig.6.9

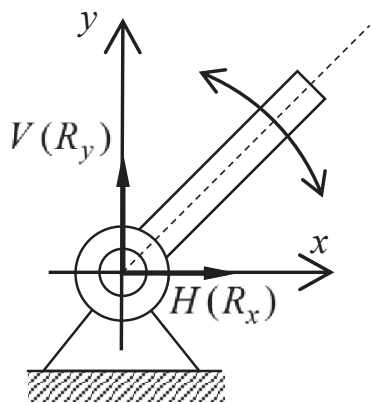


Fig.6.10

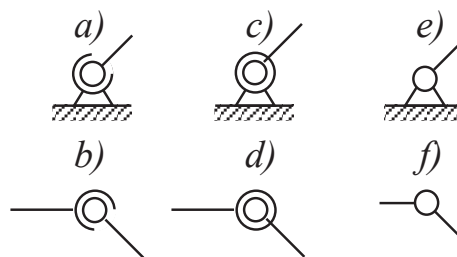


Fig.6.11

Simbolurile utilizate pentru articulații sunt reprezentate în fig.6.11 după cum urmează: a) articulația sferică fixă, b) articulația sferică mobilă, c) articulația cilindrică fixă, d) articulația cilindrică mobilă; e), f) – reprezentări simplificate ale articulației cilindrice.

Încăstrarea este legătura prin care un corp este astfel fixat încât nu mai are nici-o posibilitate de mișcare. Cea mai frecventă reprezentare a unei încăstrări corespunde fixării unei bare într-un perete. O încăstrare în spațiu răspunde solicitării barei printr-un sistem de forțe oarecare iar o încăstrare plană unui sistem de forțe coplanare.

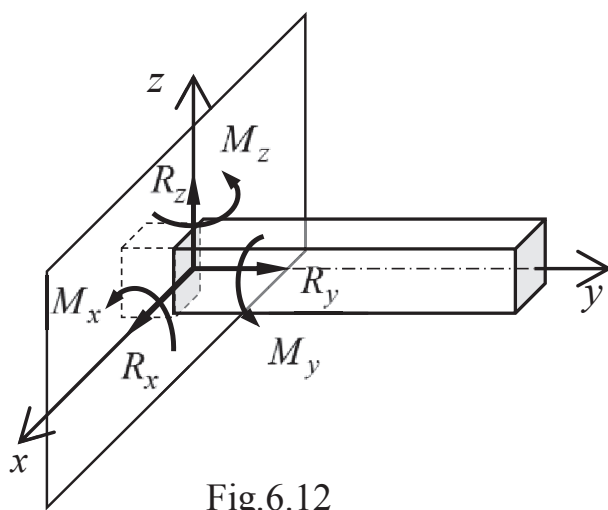


Fig.6.12

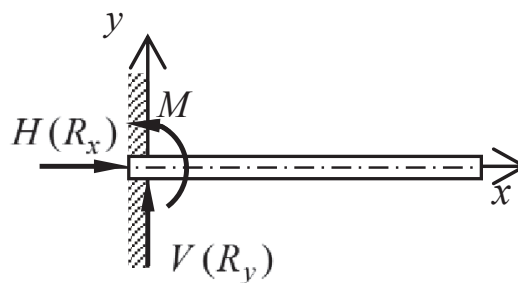


Fig.6.13

Încăstrarea în spațiu răpește corpului toate cele 6 grade de libertate. Conform axiomei legăturilor, în locul celor trei translații suprimate se vor introduce trei forțe perpendiculare una pe cealaltă, după direcții convenabil alese, iar în locul celor trei rotații se vor introduce trei momente față de aceste direcții (fig. 6.12).

Încăstrarea în plan suprimă cele trei grade de libertate specifice. În locul celor două translații se introduc două forțe perpendiculare una pe cealaltă, după direcții convenabil alese, și un moment față de punctul de încăstrare (fig.6.13).

De obicei bara este perpendiculară pe peretele respectiv și este convenabil ca direcțiile după care se introduc reacțiunile să fie în lungul barei și respectiv perpendicular pe aceasta. Pentru notațiile reacțiunilor sunt valabile observațiile

de la articulație. Simbolizarea unei încastrări corespunde în general desenelor din fig.6.12 și 6.13 în care bara se înlocuiește printr-o simplă linie.

Atât la articulație cât și la încastrare sensurile reacțiunilor se pot alege arbitrar. Dacă din calcule rezultă pentru acestea valori negative, sensul real este contrar celui considerat inițial.

### 6.3 Echilibrul solidului rigid

Dacă un solid rigid liber este acționat de un sistem oarecare de forțe, *condiția necesară și suficientă pentru ca el să se afle în echilibru este ca torsorul sistemului să fie nul în orice punct s-ar face reducerea*. Într-un punct oarecare  $O$  torsorul de reducere va fi

$$\tau_O \begin{cases} \bar{R} = \sum \bar{F}_i = 0 \\ \bar{M}_O = \sum \bar{M}_O(\bar{F}_i) = 0 \end{cases} \quad (6.1)$$

Pornind de la cele două ecuații vectoriale de echilibru, pe baza relațiilor (3.36) și (3.39) se poate scrie:

$$\begin{cases} \sum F_{ix} = 0 \\ \sum F_{iy} = 0 \\ \sum F_{iz} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \sum M_{ix} = 0 \\ \sum M_{iy} = 0 \\ \sum M_{iz} = 0 \end{cases} \quad (6.2)$$

Acestea reprezintă 6 ecuații scalare de echilibru. Se remarcă egalitatea dintre numărul acestor ecuații și cel al gradelor de libertate ale corpului liber.

Dacă corpul este acționat de un sistem de forțe coplanare, atunci ecuațiile de echilibru sunt:

$$\sum F_{ix} = 0 \quad \sum F_{iy} = 0 \quad \sum M_{iz} \equiv \sum M_O = 0 \quad (6.3)$$

Și în acest caz numărul ecuațiilor este egal cu cel al gradelor de libertate ale corpului constrâns să se afle în planul respectiv.

Asupra unui corp având una sau mai multe legături, pe lângă forțele date acționează și reacțiunile specifice. Pentru acestea se poate calcula un torsor separat în raport cu același punct de reducere:

$$\tau_O^* \begin{cases} \bar{R}^* = \sum \bar{F}_{leg} \\ \bar{M}_O^* = \sum \bar{M}_O(\bar{F}_{leg}) \end{cases} \quad (6.4)$$

Corpul supus acțiunii celor două sisteme de forțe, date și de legătură, se va afla în echilibru dacă torsorul general de reducere este nul:

$$\tau_O + \tau_O^* \begin{cases} \bar{R} + \bar{R}^* = \sum \bar{F}_i + \sum \bar{F}_{leg} = 0 \\ \bar{M}_O + \bar{M}_O^* = \sum \bar{M}_O(\bar{F}_i) + \sum \bar{M}_O(\bar{F}_{leg}) = 0 \end{cases} \quad (6.5)$$

Aceste ecuații vectoriale de echilibru conduc la ecuații scalare de forma (6.2) sau (6.3) în care însă, pe lângă forțele date se vor introduce și reacțiunile.

În problemele de statica solidului rigid reacțiunile din legături sunt necunoscute ce trebuie calculate. Corpul, luat individual, este *static determinat* dacă numărul necunoscutelor este mai mic sau cel mult egal cu numărul ecuațiilor scalare de echilibru care se pot scrie corespunzător sistemului de forțe care îl acționează. În caz contrar se spune că este *static nedeterminat* și calculul reacțiunilor se poate face numai dacă se renunță la ipoteza rigidității corpului luată în considerare în Mecanică (metodele aparțin disciplinei Rezistența Materialelor).

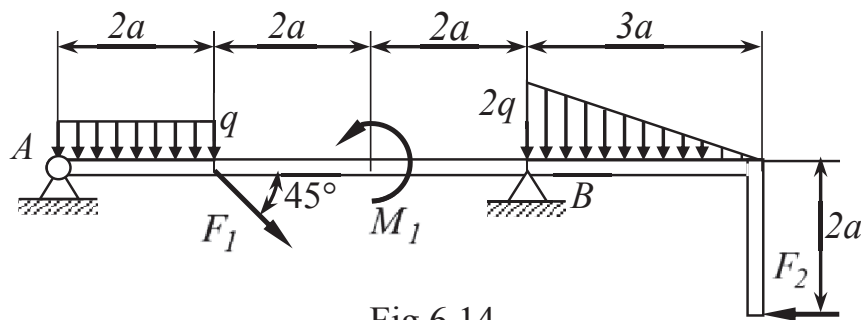


Fig.6.14

**Problema 6.1** Bara plană din fig.6.14 este supusă acțiunii unui sistem de forțe coplanare compus din forțele  $F_1 = P\sqrt{2}$ ,  $F_2 = 2P$ , momentul  $M_1 = Pa$ , și două forțe distribuite la care se cunoaște  $q = P/a$ . Se cere să se calculeze reacțiunile în legăturile din punctele A și B.

**Rezolvare.** Pe o reprezentare grafică simplificată a barei (fig.6.15) se refigurează forțele date și se introduc reacțiunile specifice articulației cilindrice din A și reazemului simplu din B.

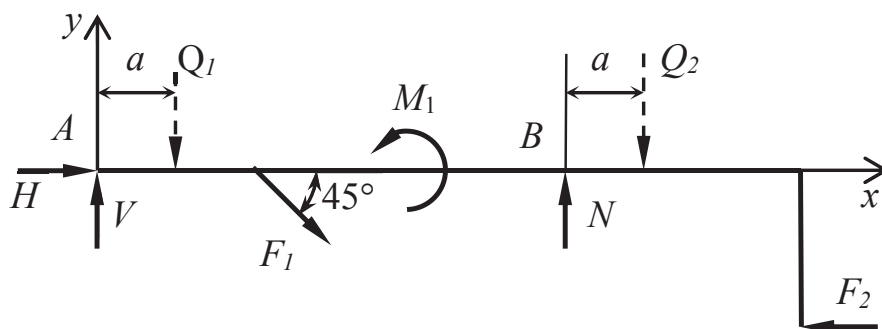


Fig.6.15

Forțele distribuite se înlocuiesc prin rezultantele lor (cf.cap.3.4.3):

$$\begin{aligned} Q_1 &= q \cdot 2a = 2P \\ Q_2 &= \frac{1}{2} \cdot 2q \cdot 3a = 3P \end{aligned} \quad (6.6)$$

Se alege un sistem de referință cu originea în articulația din punctul A și cu axa Ax suprapusă barei. Pe baza relațiilor generale (6.3) ecuațiile scalare de echilibru sunt:

$$\begin{aligned} (\sum F_{ix} = 0) \quad & H + F_1 \cos 45^\circ - F_2 = 0 \\ (\sum F_{iy} = 0) \quad & V + N - Q_1 - Q_2 - F_1 \sin 45^\circ = 0 \\ (\sum M_A = 0) \quad & M_1 + N \cdot 6a - Q_1 \cdot a - Q_2 \cdot 7a - F_1 \sin 45^\circ \cdot 2a - F_2 \cdot 2a = 0 \end{aligned} \quad (6.7)$$

După efectuarea calculelor rezultă reacțiunile:

$$N = \frac{14}{3}P \quad H = P \quad V = \frac{4}{3}P \quad (6.8)$$

Este de remarcat că poziția pe bară a momentului  $M_I$  (considerat ca momentul unui cuplu) nu influențează valorile reacțiunilor.

**Problema 6.2** Bara din fig.6.16, formată din trei segmente perpendiculare unul pe celălalt de lungime  $a$ ,  $b$  și  $c$ , este încastrată la o extremitate; asupra ei sunt aplicate forțele  $F$ ,  $P$  și  $Q$  ale căror direcții sunt paralele cu segmentele barei. Să se scrie ecuațiile scalare pentru calculul reacțiunilor din încastrare.

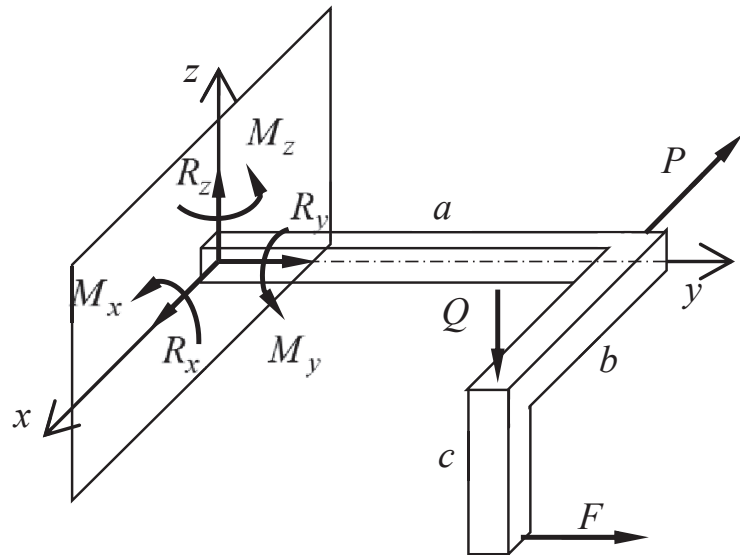


Fig. 6.16

**Rezolvare:** Sistemul de forțe este dispus tridimensional și în consecință se utilizează ecuațiile scalare de forma (6.2):

$$\begin{cases} R_x - P = 0 \\ R_y + F = 0 \\ R_z - Q = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} M_x - Qa + Fc = 0 \\ M_y + Qb = 0 \\ M_z + Pa + Fb = 0 \end{cases} \quad (6.9)$$

**Problema 6.3** Placa din fig.6.17 de greutate  $G$  are forma unui segment de cerc de rază  $R$ , cu unghiul la centru de  $120^\circ$ ; placa este articulată în punctul  $A$  și simplu rezemată în  $B$  pe un perete vertical. Se cere să se calculeze reacțiunile în aceste legături.

**Rezolvare:** Segmentul de cerc este o figură compusă obținută prin diferența dintre un sector circular (1) și un triunghi isoscel (2), figuri simple care au centrele de masă pe axa de simetrie comună. Pentru poziția centrului de masă al plăcii se fac următoarele calcule:

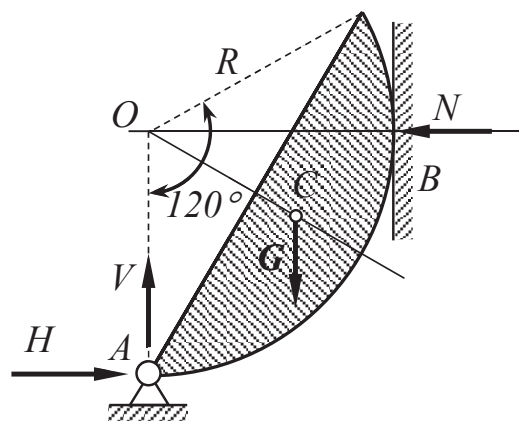


Fig.6.17

$$\begin{cases} A_1 = \frac{1}{3}\pi R^2 & OC_1 = \frac{R\sqrt{3}}{\pi} & A_2 = \frac{R^2\sqrt{3}}{4} & OC_2 = \frac{R}{3} \\ OC = \frac{A_1 \cdot OC_1 - A_2 \cdot OC_2}{A_1 - A_2} = \frac{9}{4\pi\sqrt{3} - 9} R \approx 0,705R \end{cases} \quad (6.10)$$

Pentru ecuațiile de proiecție se aleg direcțiile orizontală și verticală iar ecuația de momente se scrie față de articulația din  $A$ . Se obține:

$$\begin{cases} H - N = 0 \\ V - G = 0 \\ N \cdot R - G \cdot OC \sin 60^\circ = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} V = G \\ H = N = \frac{9}{2(4\pi - 3\sqrt{3})} G \cong 0,610G \end{cases} \quad (6.11)$$

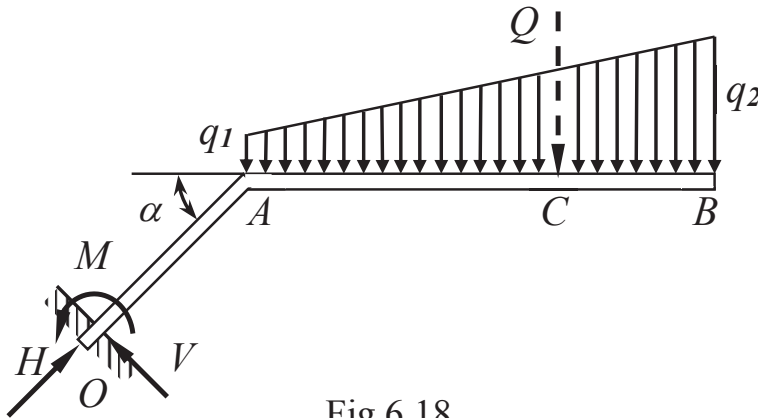


Fig.6.18

**Problema 6.4** Bara din fig.6.18 este încastrată la extremitatea  $O$  și este încărcată cu o sarcină distribuită trapezoidală cu valorile  $q_1 = q$  și  $q_2 = 3q$ . Se dau dimensiunile  $AB = 2l$ ,  $OA = l$ ,  $\alpha = 45^\circ$ . Să se calculeze reacțiunile din încastrare.

**Rezolvare:** Sarcina trapezoidală se înlocuiește prin forța concentrată (rel.3.83):

$$Q = \frac{l}{2}(q_1 + q_2) \cdot AB = 4ql \quad AC = \frac{q_1 + 2q_2}{3(q_1 + q_2)} \cdot AB = \frac{7}{6}l \quad (6.12)$$

Ecuațiile de echilibru și valorile reacțiunilor sunt:

$$\begin{cases} H - Q \sin \alpha = 0 \\ V - Q \cos \alpha = 0 \\ M - Q(OA \cos \alpha + AC) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} H = V = 2\sqrt{2} ql \cong 2,83 ql \\ M = \frac{2(3\sqrt{2} + 7)}{3} ql^2 \cong 7,5 ql^2 \end{cases} \quad (6.13)$$

#### 6.4 Frecarea în legăturile solidului rigid

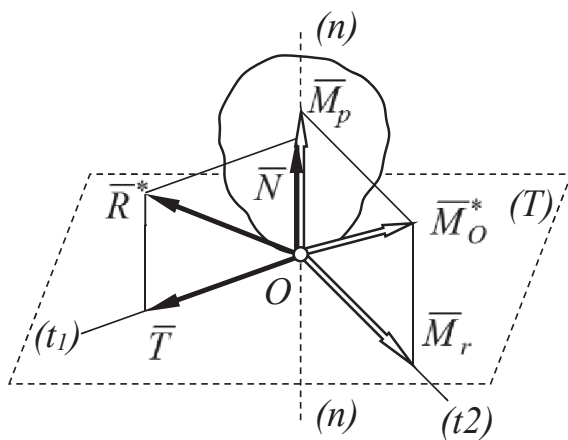


Fig.6.19

În legăturile mobile, în afară de reacțiunile specifice, în sens contrar tendințelor de mișcare apar și rezistențele datorate frecării S-a arătat în capitolul precedent că, în general, pentru forțele de legătură se poate calcula un torsor de reducere în punctul teoretic de contact  $O$  (rel.6.4). Elementele acestui torsor, respectiv rezultanta  $\bar{R}^*$  și momentul resultant  $\bar{M}_O^*$  se pot descompune la reazemul simplu, de exemplu, după direcția normalei comune  $(n)-(n)$  la suprafețele în contact și după câte o direcție conținută în planul  $(T)$  tangent la aceste suprafețe, respectiv  $O-(t_1)$  și  $O-(t_2)$  (fig.6.19).

$$\tau_O^* \begin{cases} \bar{R}^* = \bar{N} + \bar{T} \\ \bar{M}_O^* = \bar{M}_p + \bar{M}_r \end{cases} \quad (6.14)$$

Componentele de mai sus au următoarea semnificație:

$\bar{N}$  – reacțiunea normală specifică reazemului simplu;

$\bar{T}$  – forța de frecare de alunecare, opusă tendinței de deplasare în planul tangent ( $T$ );

$\bar{M}_p$  – momentul de frecare de pivotare, opus rotației în jurul normalei ( $n$ )-( $n$ );

$\bar{M}_r$  – momentul de frecare de rostogolire, opus rotației peste planul tangent în jurul dreptei  $O$ -( $t_2$ ).

Pentru fiecare din frecările menționate, ca și pentru cele care nu apar mai sus, se face un studiu distinct, evidențiindu-se valorile specifice mișcării cât și condițiile de echilibru cu frecare.

### 6.4.1 Frecarea de alunecare

Un corp aflat într-o legătură de tip reazem cu un alt corp întâmpină în timpul mișcării o rezistență concretizată printr-o forță de frecare aplicată în punctul de contact. Această forță este conținută în planul tangent la cele două suprafețe și este îndreptată în sens invers tendinței de mișcare (fig.6.20). Pentru cazul unei frecări uscate își păstrează valabilitatea discuția făcută în cap.5.4 referitor la legăturile cu frecare ale punctului material. Relațiile specifice frecării de alunecare sunt:

$$\text{– în mișcare: } T = \mu N \quad (6.15)$$

$$\text{– la echilibru: } T \leq \mu N \quad (6.16)$$

S-a arătat la analiza reazemului simplu că există situații în care contactul între suprafețe nu are loc într-un singur punct ci pe o suprafață și că reacțiunea normală, distribuită pe suprafața sau linia de contact, se poate reduce la o rezultantă. Dacă legătura este cu frecare atunci și forța de frecare este distribuită și poate fi redusă la o rezultantă aplicată de regulă în același punct ca și reacțiunea normală.

### 6.4.2 Frecarea de rostogolire

Acest gen de frecare intervine frecvent în cazul unei roți care se rostogolește peste o suprafață deformabilă. Astfel, în cazul unei roți de greutate  $G$  aflată în repaus pe o suprafață nedeformabilă reacțiunea normală  $N$  este concentrată în punctul teoretic de contact  $A$ , respectiv în punctul de tangență dintre suprafețe (fig.6.21,  $a$ ).

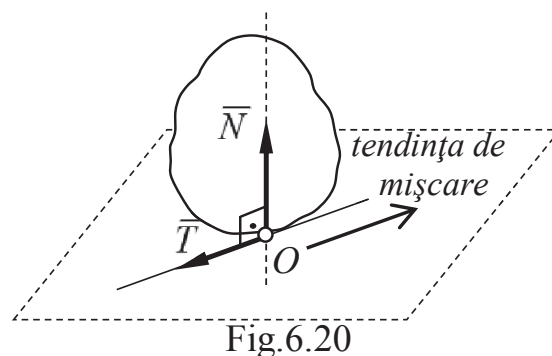


Fig.6.20

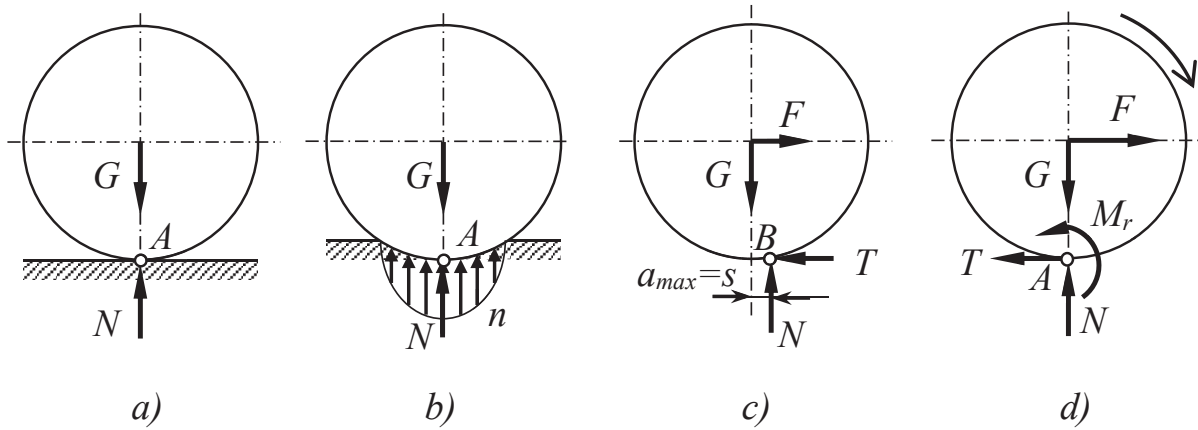


Fig.6.21

Dacă suprafața de rezemare este deformabilă, apare o reacțiune distribuită  $n$  care se reduce la o rezultantă  $N$  aplicată în același punct  $A$  (fig.6.21,  $b$ ).

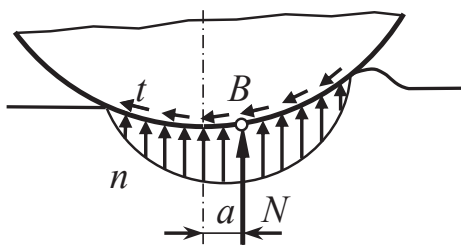


Fig.6.22

Dacă se aplică în centrul roții o forță de tracțiune  $F$ , a cărei valoare crește progresiv pornind de la 0, are loc o deformare locală a suprafeței de contact în sensul în care acționează aceasta (fig.6.22). Datorită asimetriei, rezultanta  $N$  va fi deplasată într-un punct  $B$ , la distanța  $a$  față de axa roții. Această dezaxare crește odată

cu majorarea forței de tracțiune până la valoarea  $s = a_{\max}$  în momentul ruperii echilibrului (fig.6.21,  $c$ ); în mișcare ea rămâne cu această valoare.

Pe suprafața de contact, în sens opus tendinței de mișcare, asupra roții se exercită și o forță de frecare distribuită  $t$  care poate fi redusă și ea la o rezultantă  $T$ , în același punct  $B$ ; suprafața de contact este foarte mică și se poate considera că forța  $T$  are direcția tangentei la roată. Pentru comoditatea tratării forțele de legătură din punctul  $B$  se reduc în punctul teoretic de contact  $A$ . Momentul forței  $T$  față de  $A$  este practic neglijabil astfel că torsorul de reducere va conține:

$$\tau_A^* \begin{cases} \bar{N} + \bar{T} \\ M_r = M_A(\bar{N}) = N a \end{cases} \quad (6.17)$$

Forța de frecare  $T$  crește odată cu forța de tracțiune  $F$  până la ruperea echilibrului după care rămâne constantă, conform celor arătate în capitolul precedent. Aceste forțe, fiind paralele, egale și de sens contrar, formează un cuplu al cărui moment imprimă roții o tendință de rostogolire peste suprafața de rezemare. Acestei tendințe i se opune momentul  $M_r$  - *momentul de frecare de rostogolire*. La limită:

$$M_r = M_{r,\max} = N a_{\max} = s N \quad (6.18)$$

valoare care se păstrează și în timpul mișcării. După ruperea echilibrului, surplusul forței  $F$  peste forța de frecare maximă va determina apariția unei accelerații a roții. Și pentru frecarea de rostogolire se pot scrie relațiile:

$$\text{– în mișcare: } M_r = s N \quad (6.19)$$

$$\text{– la echilibru: } M_r \leq s N \quad (6.20)$$

în care lungimea  $s$  este *coeficientul de frecare de rostogolire*.

**Problema 6.1:** (Roata trasă). Pe un plan înclinat cu un unghi  $\alpha$  față de orizontală se află o roată de rază  $R$  și greutate  $G$  (fig.6.23). Așupra roții acționează o forță  $F$  paralelă cu planul. Între roată și plan există atât frecare de alunecare cât și de rostogolire, cu coeficienții  $\mu$  și  $s$ . Să se determine valorile forței  $F$  pentru echilibru.

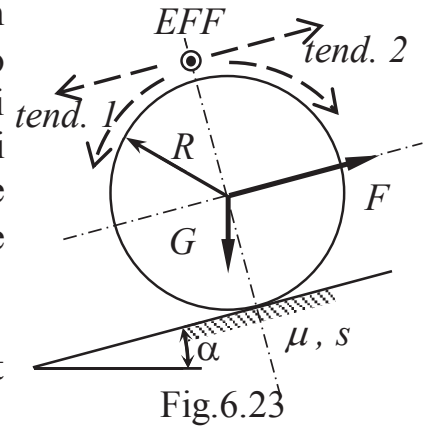


Fig.6.23

**Rezolvare:** În funcție de mărimea forței  $F$  pot exista:

- o tendință de alunecare și rostogolire în jos pe planul înclinat, în cazul în care forța de tracțiune este mică;
- un echilibru fără frecare (EFF), în care nu există nici-o tendință de mișcare;
- o tendință de alunecare și rostogolire în sus pe planul înclinat în cazul unei forțe de tracțiune suficient de mare.

Forțele aplicate roții și ecuațiile de echilibru pentru fiecare caz sunt date în tabelul 6.1.

Tabelul 6.1

<i>tendința 1-a</i>	<i>echilibru fără frecare</i>	<i>tendința 2-a</i>
$\begin{cases} F + T - G \sin \alpha = 0 \\ N - G \cos \alpha = 0 \\ GR \sin \alpha - FR - M_r = 0 \\ T \leq \mu N \\ M_r \leq sN \end{cases}$	$\begin{cases} F - G \sin \alpha = 0 \\ N - G \cos \alpha = 0 \\ GR \sin \alpha - FR = 0 \\ T = 0 \\ M_r = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} F - T - G \sin \alpha = 0 \\ N - G \cos \alpha = 0 \\ GR \sin \alpha - FR + M_r = 0 \\ T \leq \mu N \\ M_r \leq sN \end{cases}$
$F \geq \underbrace{G(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}_{F_{1a}}$ $F \geq \underbrace{G\left(\sin \alpha - \frac{s}{R} \cos \alpha\right)}_{F_{1r}}$	$F = G \sin \alpha = F_0$	$F \leq \underbrace{G(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)}_{F_{2a}}$ $F \leq \underbrace{G\left(\sin \alpha + \frac{s}{R} \cos \alpha\right)}_{F_{2r}}$



În ultima linie a tabelului sunt prezentate condițiile pe care trebuie să le îndeplinească forța  $F$  pentru ca roata să nu alunece și să nu se rostogolească. Trebuie precizat că de regulă  $s/R \ll \mu$ , astfel încât cele cinci valori de referință calculate pot fi ordonate într-o succesiune crescătoare (fig.6.24).

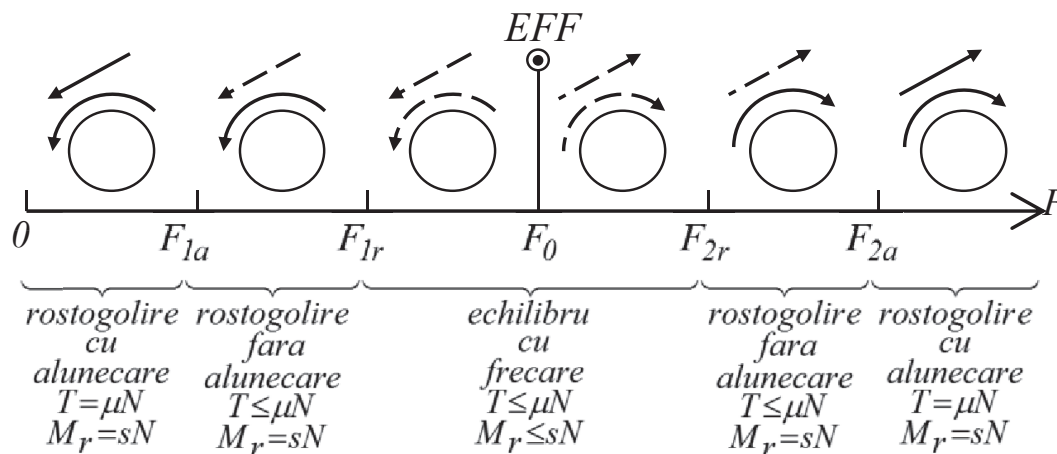


Fig.6.24

Echilibrul roții este asigurat pentru valori ale forței  $F$  cu prinse între  $F_{1r}$  și  $F_{2r}$ , respectiv:

$$G(\sin \alpha - \frac{s}{R} \cos \alpha) \leq F \leq G(\sin \alpha + \frac{s}{R} \cos \alpha) \quad (6.21)$$

La ruperea echilibrului, într-un sens sau în celălalt, punerea în mișcare a roții începe prin rostogolire.

**Problema 6.2:** (Roata motoare). Roata din fig. 6.25, aflată pe un plan plan înclinat cu un unghi  $\alpha$  față de orizontală, are raza  $R$  și greutate  $G$ . Asupra roții acționează un cuplu motor  $M$  precum și o forță rezistentă  $F$  paralelă cu planul. Coeficienții de frecare dintre roată și plan sunt  $\mu$  și  $s$ . Să se determine valorile momentului  $M$  și ale forței  $F$  pentru care roata se află în echilibru.

**Rezolvare:** În funcție de mărimea cuplului motor  $M$  roata se poate afla în următoarele situații:

- o rostogolire în jos pe planul înclinat, în cazul în care cuplul motor  $M$  este mic;
- absența rostogolirii (AR);
- o rostogolire în sus pe planul înclinat, în cazul unui cuplu motor  $M$  suficient de mare.

Forța rezistentă  $F$  impune o tendință unică de alunecare către partea inferioară a planului înclinat.

Forțele care acționează roata motoare în fiecare din situațiile menționate precum și ecuațiile care descriu echilibrul sunt date în tabelul 6.2.

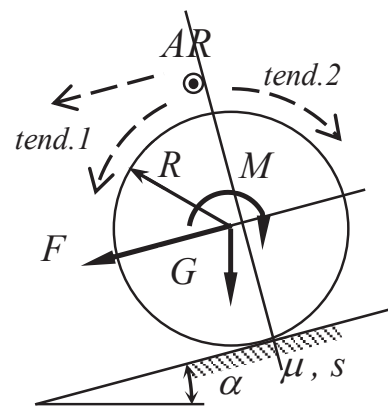
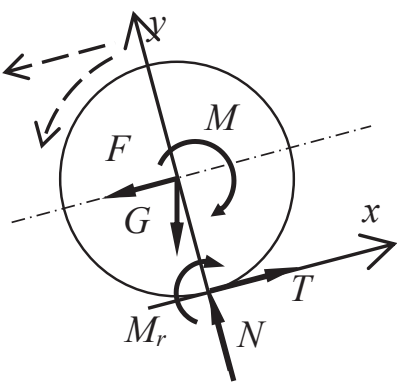
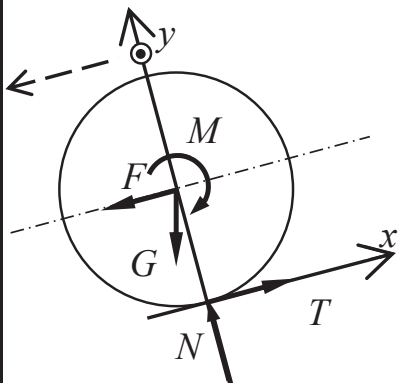
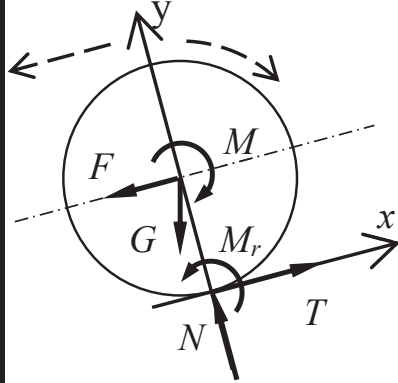


Fig.6.25

Tabelul 6.2

tendința 1-a	absența rostogolirii	tendința 2-a
		
$\begin{cases} T - F - G \sin \alpha = 0 \\ N - G \cos \alpha = 0 \\ GR \sin \alpha + FR - M - \\ \quad - M_r = 0 \\ T \leq \mu N \\ M_r \leq sN \end{cases}$	$\begin{cases} T - F - G \sin \alpha = 0 \\ N - G \cos \alpha = 0 \\ GR \sin \alpha + FR - M = 0 \\ T \leq 0 \\ M_r = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} T - F - G \sin \alpha = 0 \\ N - G \cos \alpha = 0 \\ GR \sin \alpha + FR - M + \\ \quad + M_r = 0 \\ T \leq \mu N \\ M_r \leq sN \end{cases}$
$F \leq G(\mu \cos \alpha - \sin \alpha) = F_a$		
$M \geq R[F + G(\sin \alpha - \frac{s}{R} \cos \alpha)] = M_1$	$M = R(F + G \sin \alpha) = M_0$	$M \leq R[F + G(\sin \alpha + \frac{s}{R} \cos \alpha)] = M_2$

Se observă că există o singură valoare de interes pentru forța rezistentă  $F$  și trei valori distincte pentru cuplul motor  $M$ . O discuție asupra acestui rezultat este prezentată în fig.6.26.

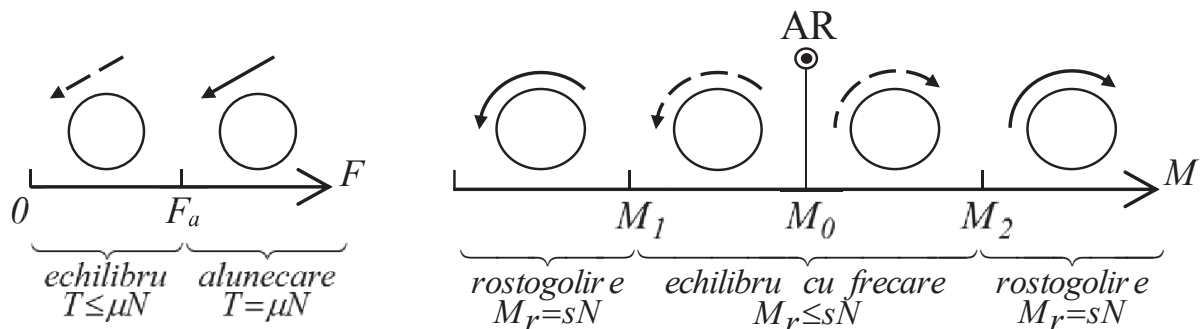


Fig.6.26

Echilibrul roții motoare este asigurat pentru  $F \leq F_a$  și  $M_1 \leq M \leq M_2$ , respectiv  $F \leq G(\mu \cos \alpha - \sin \alpha)$

$$R[F + G(\sin \alpha - \frac{s}{R} \cos \alpha)] \leq M \leq R[F + G(\sin \alpha + \frac{s}{R} \cos \alpha)] \quad (6.22)$$

### 6.4.3 Frecarea de pivotare

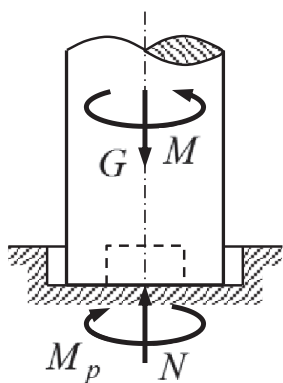


Fig.6.27

Acest tip de frecare intervine în cazul unui corp rezemat pe o suprafață și supus unei acțiuni de rotire în jurul normalei comune la cele două suprafețe în contact. Cazul frecvent analizat este cel al unui arbore rezemat la un capăt pe o suprafață de sprijin plană (fig.6.27). Pe lângă forța axială, în exemplul de față greutatea  $G$ , arborele mai este supus unui cuplu motor  $M$  care tinde să îl rotească în jurul axei sale. Acestor solicitări li se opune torsorul forțelor de legătură compus din reacțiunea normală  $N$  și momentul de frecare de pivotare  $M_p$ .

Pentru generalitate se consideră că arborele are o scobitură la capătul de sprijin astfel că suprafața de contact este inelară. Cu notațiile din fig.6.28, presiunea pe suprafață este:

$$p = \frac{G}{A} = \frac{G}{\pi(R_2^2 - R_1^2)} \quad (6.23)$$

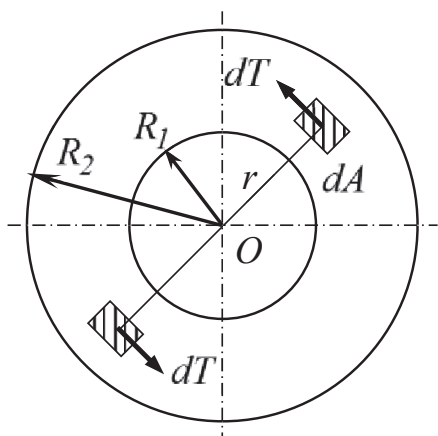


Fig.6.28

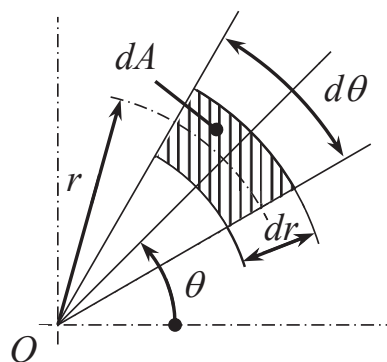


Fig.6.29

Reacțiunea normală este distribuită pe întreaga suprafață de contact. Pe o arie elementară  $dA$  va acțiunea o reacțiune normală elementară:

$$dN = p dA \quad (6.24)$$

În mișcare, pe suprafața  $dA$  ia naștere o forță de frecare

$$dT = \mu dN \quad (6.25)$$

Împreună cu forța simetrică aceasta formează un cuplu, astfel că pe întreaga suprafață de contact torsorul de reducere al forțelor de frecare va consta numai dintr-un moment resultant  $M_p$ :

$$M_p = \int_{(A)} dM_p = \int_{(A)} r dT \quad (6.26)$$

Aria elementară  $dA$  este definită dimensional în fig.6.29; făcând toate înlocuirile se obține:

$$M_p = \mu p \iint_{(A)} r^2 dr d\theta = \mu p \int_{R_1}^{R_2} r^2 dr \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{2}{3} \mu \frac{R_2^3 - R_1^3}{R_2^2 - R_1^2} G \quad (6.27)$$

Uneori, pentru compatibilitate cu relațiile similare de la frecarea de alunecare și cea de rostogolire, se adoptă notația:

$$v = \frac{2}{3} \mu \frac{R_2^3 - R_1^3}{R_2^2 - R_1^2} \quad (6.28)$$

în care  $v$  (niu) este *coeficientul de frecare de pivotare* și are dimensiunea unei lungimi. Pentru cazul în care capătul axului nu are scobitură,  $R_2 = R$  și  $R_1 = 0$ , se obține:

$$v = \frac{2}{3} \mu R \quad (6.29)$$

Se constată însă că acest coeficient depinde atât de combinația de materiale utilizată, prin coeficientul de frecare de alunecare  $\mu$  specificat, cât și de forma și dimensiunile capătului pivotului.

În analiza de mai sus (rel.6.25) s-a considerat că pivotul se află în mișcare de rotație și în consecință momentul de frecare de pivotare  $M_p$  ia valoarea sa maximă. Recapitulând se poate scrie:

$$\text{– în mișcare: } M_p = M_{p.\max} = vG \quad (6.30)$$

$$\text{– la echilibru: } M_p \leq vG \quad (6.31)$$

Tipul de frecare analizat în acest capitol poate fi extins și la o serie de aplicații cum sunt cuplajele prin fricțiune, ambreiajele sau unele dispozitive de frânare.

**Problema 6.3:** Între doi arbori se transmite un cuplu motor de moment  $M$  printr-un cuplaj cu fricțiune realizat din două discuri având suprafețele de contact inelare cu diametrul  $D$  la exterior și  $d$  la interior (fig.6.30). Coeficientul de frecare dintre cele două discuri este  $\mu$ . Să se calculeze forța axială  $F$  pe care ar trebui să o exercite un arc spiral asupra discurilor pentru ca transmisia să poată avea loc.

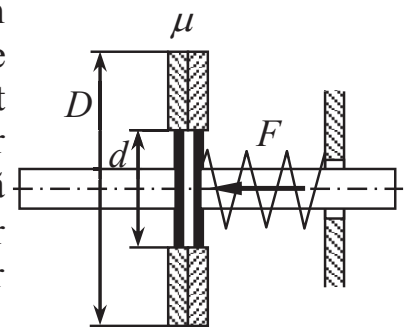


Fig.6.30

**Rezolvare:** Transmiterea integrală a cuplului are loc

atunci când discurile nu alunecă unul în raport cu celălalt; momentul dat de forțele de frecare dintre ele, analog momentului de frecare de pivotare analizat mai înainte, este egal cu momentul de transmis iar forța axială care realizează presiunea între discuri este echivalenta greutateii pivotului din relația (6.31). Astfel,

$$M = M_p \leq vF \quad (6.32)$$

Coeficientul  $v$  se calculează în funcție de diametrele discurilor:

$$v = \frac{2}{3} \mu \frac{(D/2)^3 - (d/2)^3}{(D/2)^2 - (d/2)^2} = \frac{1}{3} \mu \frac{D^3 - d^3}{D^2 - d^2} \quad (6.33)$$

Pentru realizarea transmisiei forța axială trebuie să îndeplinească condiția:

$$F \geq \frac{3M}{\mu} \frac{D^2 - d^2}{D^3 - d^3} \quad (6.34)$$

#### 6.4.4 Frecarea în articulații

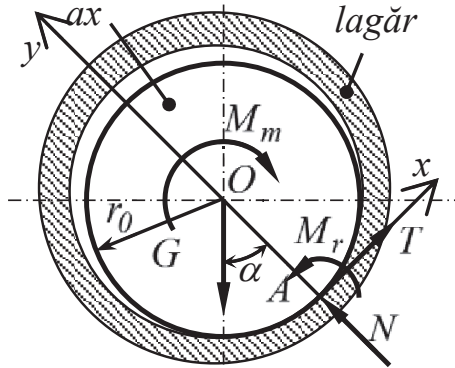


Fig.6.31

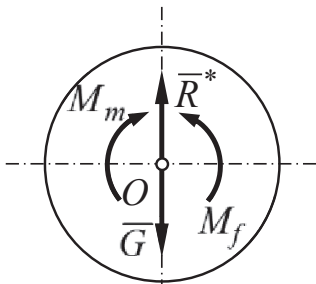


Fig.6.32

Elementele de bază ale unei articulații sunt lagărul și axul (fig.6.31). Se face ipoteza că îmbinarea dintre ele este cu joc. Torsorul de reducere în punctul  $O$  al forțelor exterioare aplicate axului este:

$$\tau_O \begin{cases} \bar{G} \\ M_m \end{cases} \quad (6.35)$$

Dacă ar acționa numai greutatea  $G$ , punctul teoretic de contact dintre cele două suprafețe s-ar găsi pe direcția acesteia. Datorită frecării de alunecare dintre cele două suprafețe, cuplul  $M_m$  produce o “urcare” a axului pe lagăr iar contactul are loc în punctul  $A$ . Luând în considerare și o frecare de rostogolire, în acest punct de contact acționează torsorul forțelor de legătură:

$$\tau_A^* \begin{cases} \bar{R}^* = \bar{N} + \bar{T} \\ M_r \end{cases} \rightarrow \tau_O^* \begin{cases} \bar{R}^* \\ M_f = M_r + Tr_0 \end{cases} \quad (6.36)$$

$\bar{R}^*$  reprezintă reacțiunea totală aplicată axului de către lagăr iar  $M_f$  – *momentul de frecare din articulație* – cumulează efectul frecării de alunecare și al celei de rostogolire. În cazul echilibrului componentele tursorului  $\tau_O$  sunt egale cu cele ale tursorului  $\tau_O^*$  (fig.6.32); ținând cont de faptul că  $\bar{R}^*$  se poate exprima și ca rezultantă a reacțiunilor  $H$  și  $V$ , definite în cap 6.2 pentru cazul unei articulații cilindrice, se poate scrie:

$$G = R^* = \sqrt{H^2 + V^2} \quad M_m = M_f \quad (6.38)$$

Ecuatiile scalare de echilibru corespunzătoare încărcării din fig.6.31 sunt:

$$\begin{cases} N - G \cos \alpha = 0 \\ T - G \sin \alpha = 0 \\ M_r - M_m + G r_0 \sin \alpha = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} T \leq \mu N \\ M_r \leq s N \end{cases} \quad (6.39)$$

Din condiția ca axul să nu alunece se obține  $tg \alpha \leq \mu$ . Ținând cont de valorile uzuale ale coeficientul de frecare  $\mu$ , se deduce că unghiul  $\alpha$  este foarte mic și, în consecință, se pot face aproximațiile  $\sin \alpha \approx tg \alpha \approx \mu$  și  $\cos \alpha \approx 1$ . Din condiția ca axul să nu se rostogolească se obține:

$$M_m \leq Gr_0 \left( \sin \alpha + \frac{s}{r_0} \cos \alpha \right) = Gr_0 \left( \mu + \frac{s}{r_0} \right) = \mu_0 r_0 G \quad (6.40)$$

Prin  $\mu_0$  s-a notat *coeficientul de frecare în articulație*. În general raportul  $s/r_0$  este mic astfel că în aplicații se poate lua  $\mu_0 \approx \mu$ .

În baza echivalențelor din (6.38) se poate scrie în final:

$$- \text{în mișcare } M_f = \mu_0 r_0 \sqrt{H^2 + V^2} \quad (6.41)$$

$$- \text{la echilibru } M_f \leq \mu_0 r_0 \sqrt{H^2 + V^2} \quad (6.42)$$

**Problema 6.4:** Pentru ridicarea unei greutăți  $G$  (fig.6.33) se utilizează un troliu format din discurile de raze  $R_1$  și respectiv  $R_2$ . Între axul troliului, de rază  $r_0$ , și lagărul său există frecare cu coeficientul  $\mu_0$ . Să se studieze starea troliului în funcție de mărimea forței de tracțiune  $F$ .

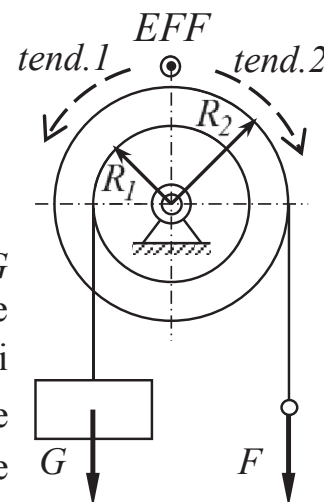


Fig.6.33

**Rezolvare:** În funcție de mărimea forței  $F$  există un echilibru fără frecare (EFF) precum și două tendințe de mișcare, ambele indicate în fig.6.33. Calculele sunt prezentate în tab.6.3 iar discuția în fig.6.34.

**Tabelul 6.3**

tendința 1-a	echilibru fără frecare	tendința 2-a
$\begin{cases} H = 0 \\ V - G - F = 0 \\ GR_1 - FR_2 - M_f = 0 \\ M_f \leq \mu_0 r_0 \sqrt{H^2 + V^2} \end{cases}$	$\begin{cases} H = 0 \\ V - G - F = 0 \\ GR_1 - FR_2 = 0 \\ M_f = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} H = 0 \\ V - G - F = 0 \\ GR_1 - FR_2 + M_f = 0 \\ M_f \leq \mu_0 r_0 \sqrt{H^2 + V^2} \end{cases}$
$F \geq G \frac{R_1 - \mu_0 r_0}{R_2 + \mu_0 r_0} = F_1$	$F = G \frac{R_1}{R_2} = F_0$	$F \leq G \frac{R_1 + \mu_0 r_0}{R_2 - \mu_0 r_0} = F_2$

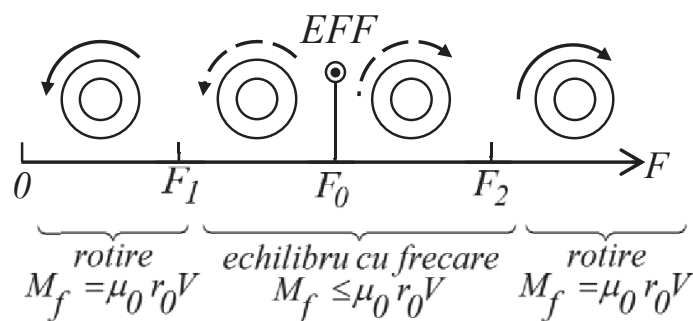


Fig.6.34

### 6.4.5 Frecarea firelor

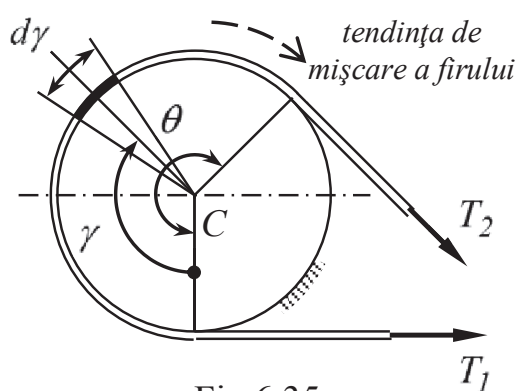


Fig.6.35

Acest tip de frecare se întâlnește în cazul unui fir (sau al unui corp asimilabil acestuia) care este înfășurat pe o roată, între ele existând frecare de alunecare de coeficient  $\mu$ . Unghiul de înfășurare al firului pe roata este  $\theta$ .

Spre deosebire de celelalte tipuri de frecare analizate mai înainte, la care se putea exprima în mod distinct rezistența opusă tendinței de mișcare sub forma unei forțe sau a unui moment de frecare, în cazul de față aceasta se pune în evidență prin relația care există între tensiunile  $T_1$  și  $T_2$  aplicate firului la capete (fig.6.35). Analiza este valabilă atât pentru situația roată fixă – fir mobil cât și pentru cea inversă.

Se examinează în continuare echilibrul unui segment de fir elementar cuprins între două raze care fac între ele un unghi  $d\gamma$ . Forțele care acționează asupra acestuia sunt reprezentate detaliat în fig.6.36.

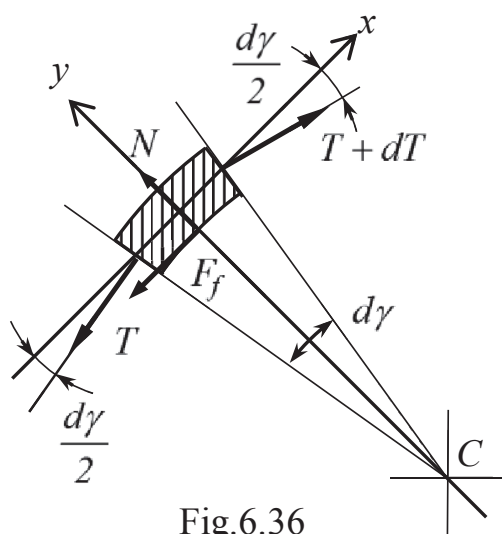


Fig.6.36

Tensiunile pe cele două secțiuni ale segmentului de fir sunt perpendiculare pe acestea. Dacă se consideră că tendința de mișcare a firului în raport cu roata este în sensul de acțiune al forței  $T_2$ , atunci pe secțiunea corespunzătoare a segmentului de fir va exista un surplus de tensiune  $dT$ .

Forțele de legătură dintre fir și roată sunt distribuite în lungul arcului de contact; numai pentru segmentul de fir studiat ele pot fi reduse la o reacțiune normală și la o forță de frecare  $F_f$  (notată astfel pentru evitarea confuziilor).

Într-un sistem local de axe ecuațiile scalare de echilibru ale segmentului de fir sunt următoarele:

$$\begin{cases} (T + dT) \cos \frac{d\gamma}{2} - T \cos \frac{d\gamma}{2} - F_f = 0 \\ N - (T + dT) \sin \frac{d\gamma}{2} - T \sin \frac{d\gamma}{2} = 0 \\ F_f \leq \mu N \end{cases} \quad (6.43)$$

Pentru unghiul elementar  $d\gamma$  se pot face aproximațiile  $\cos d\gamma/2 \approx 1$  și  $\sin d\gamma/2 \approx d\gamma/2$ , astfel că primele două relații iau forma:

$$dT - F_f = 0 \quad N - T d\gamma = 0 \quad (6.44)$$

S-a neglijat termenul conținând produsul  $dT d\gamma$ . Prelucrând aceste relații în raport cu condiția de echilibru cu frecare se obține pentru segmentul elementar

$$\frac{dT}{T} \leq \mu d\gamma \quad (6.45)$$

Pentru a acoperi toată porțiunea de fir aflată în contact cu roata se integrează această relație în limitele fiecărei variabile și se obține succesiv:

$$\begin{aligned} \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} \leq \mu \int_0^\theta d\gamma &\rightarrow \ln T_2 - \ln T_1 \leq \mu\theta \rightarrow \ln \frac{T_2}{T_1} \leq \mu\theta \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{T_2}{T_1} \leq e^{\mu\theta} \rightarrow T_2 \leq T_1 e^{\mu\theta} \end{aligned} \quad (6.46)$$

Pentru tendința de mișcare inversă demonstrația se face în mod analog; condiția de echilibru se poate obține inversând între ele cele două tensiuni în (6.46):

$$T_1 \leq T_2 e^{\mu\theta} \rightarrow \frac{T_1}{e^{\mu\theta}} \leq T_2 \rightarrow T_2 \geq T_1 e^{-\mu\theta} \quad (6.47)$$

Echilibrul fără frecare se realizează în absența oricărei tendințe de mișcare, respectiv pentru  $T_2 = T_1$ . În diagrama din fig.6.37 se prezintă starea firului în funcție de variația forței  $T_2$ .

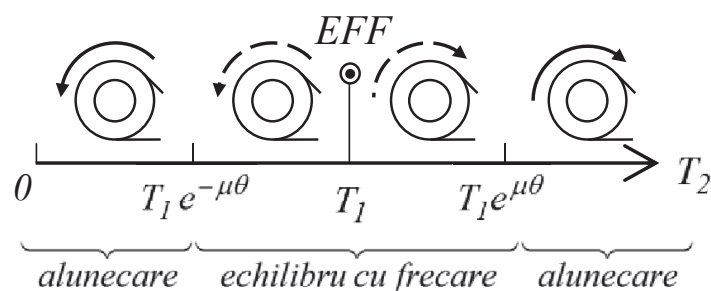


Fig.6.37

Se constată că firul este în echilibru cu frecare pentru:

$$T_1 e^{-\mu\theta} \leq T_2 \leq T_1 e^{\mu\theta} \quad (6.48)$$



După punerea în mișcare a firului într-un sens sau în celălalt, rezistența opusă acestuia de către frecare este cea din momentul ruperii echilibrului; surplusul de tracțiune determină accelerarea mișcării. Pentru mișcarea firului în sensul din fig.6.35:

$$T_2 = T_1 e^{\mu\theta} \quad (6.49)$$

Se remarcă faptul că rezistența opusă prin frecare la deplasarea unui fir pe o roată crește exponențial cu unghiul de înfășurare  $\theta$ . Presupunând, de exemplu, un coeficient de frecare  $\mu = 0,15$ , raportul între cele două tensiuni, corespunzător limitei, este dat în tabelul 6.4 iar diagrama în fig.6.38.

**Tabelul 6.4**

$\frac{\theta}{2\pi}$	$\frac{T_2}{T_1}$
0	1
0,1	1,099
0,5	1,602
1	2,566
2	6,586
4	43,376
6	285,678

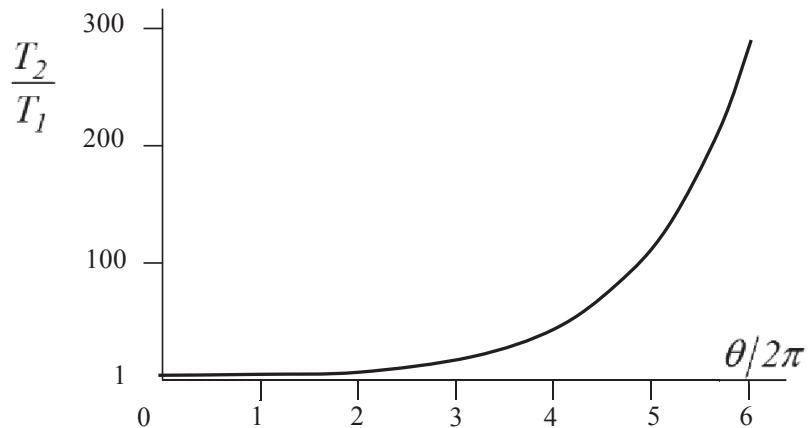


Fig.6.38

Relațiile (6.46) au fost deduse studindu-se echilibrul firului. În aplicațiile practice însă, se utilizează ecuațiile care descriu echilibrul roții asupra căruia acesta acționează. Faptul că nu se evidențiază o forță de frecare distinctă și se pot întrebuința notații diverse pentru tensiuni poate îngreuna stabilirea corectă a condiției de echilibru. În acest sens, pornind de la observația că  $e^{\mu\theta} > 1$  (deoarece  $\mu$  și  $\theta$  sunt argumente pozitive) și ținând cont de sensul frecării aplicate firului de către roată, se compară între ele tensiunile de la capetele acestuia; cea mai mică dintre ele se înmulțește cu  $e^{\mu\theta}$  în inecuația de echilibru.

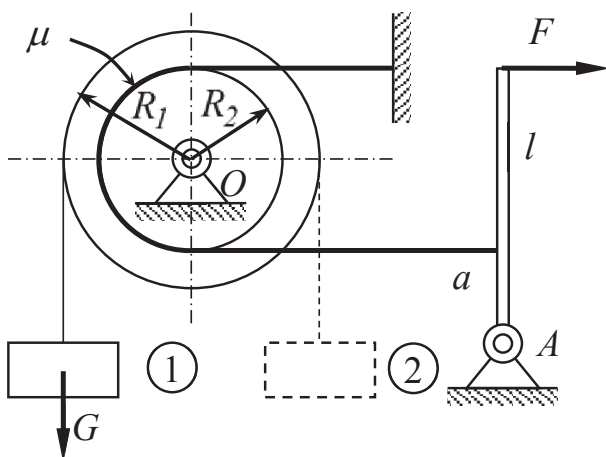


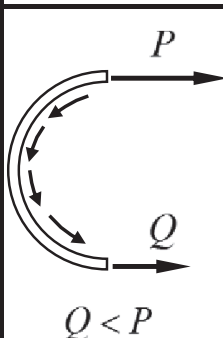
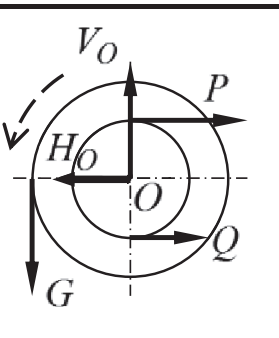
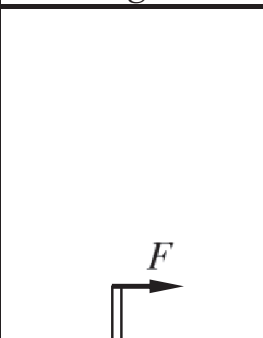
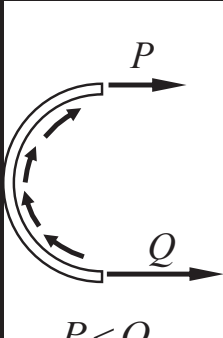
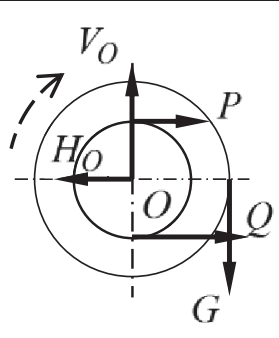
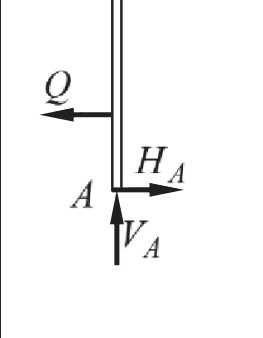
Fig.6.39

Frecarea firelor are multiple aplicații în transmiterea mișcării. Menționăm în acest sens transmisiile prin curele sau benzi, instalațiile de ridicare sau de transport pe cablu. Totodată, forțelor de frecare foarte mari care iau naștere permit realizarea unor dispozitive de frânare a mișcării utilizate, de exemplu, la vehiculele grele pe șenile.

**Problema 6.5:** - (*Frâna cu bandă*). Să se determine forța minimă  $F$  care trebuie aplicată unei pârghii pentru a frâna rotația unui troliu acționat de o greutate  $G$  (fig.6.39). Frânarea se realizează printr-o bandă aplicată pe jumătate din discul interior. Se cunosc razele  $R_1$  și  $R_2$ , lungimile  $l$  și  $a$ , precum și coeficientul de frecare  $\mu$  dintre bandă și disc. Se va face determinarea pentru ambele variante de așezare a greutății  $G$ .

**Rezolvare:** Tensiunea din ramura de fir care face legătura între pârghie și troliu acționează în mod egal asupra acestora dar în sensuri diferite. Pentru determinarea forței  $F$  sunt suficiente numai ecuațiile de momente ale forțelor aplicate fiecărui corp față de punctele  $O$  și respectiv  $A$ . Schemele de încărcare și ecuațiile sunt prezentate în tab.6.5. Sunt puse în evidență frecările aplicate firului de către roată în ambele variante pentru a se putea stabili corect condiția de echilibru, în modul descris mai înainte.

**Tabelul 6.5**

	<i>Fir</i>	<i>Roată</i>	<i>Pârghie</i>	<i>Ecuații</i>
<i>Varianta 1</i>				$\begin{cases} QR_2 - PR_2 + GR_1 = 0 \\ Qa - Fl = 0 \\ P \leq Qe^{\mu\pi} \end{cases}$
<i>Varianta 2</i>				$\begin{cases} QR_2 - PR_2 - GR_1 = 0 \\ Qa - Fl = 0 \\ Q \leq Pe^{\mu\pi} \end{cases}$

Rezolvând sistemul de ecuații pentru prima variantă de montaj rezultă:

$$F \geq G \frac{R_1 l}{R_2 a} \frac{1}{e^{\mu\pi} - 1} = F_{\min 1} \quad (6.50)$$

iar pentru cea de a doua variantă:

$$F \geq G \frac{R_1 l}{R_2 a} \frac{e^{\mu\pi}}{e^{\mu\pi} - 1} = F_{\min 2} = F_{\min 1} \cdot e^{\mu\pi} \quad (6.51)$$

Se constată că în cea de a doua variantă forța minimă necesară pentru realizarea frânării este cu mult mai mare decât cea din prima varianta.

## 7. STATICA SISTEMELOR DE CORPURI

### 7.1 Generalități

Un sistem de corpuri este un ansamblu de solide rigide aflate în interacțiune mecanică, care funcționează în mod unitar; el se poate afla în interacțiune cu corpurile altor sisteme.

Asupra corpurilor componente ale unui sistem pot acționa:

– *forțe exterioare* din partea unor corpuri neconținute în sistemul dat (forțele cu rol tehnologic primite sau transmise, forțele de greutate, reacțiunile în legăturile cu alte sisteme, etc.);

– *forțe interioare* de legătură (reacțiuni) numai între corpurile sistemului.

Conform principiului acțiunii și reacțiunii forțele de legătură dintre două corpuri sunt egale și direct opuse; în consecință acestea se vor nota prin același simbol, vor avea aceeași direcție dar sensurile vor fi contrare.

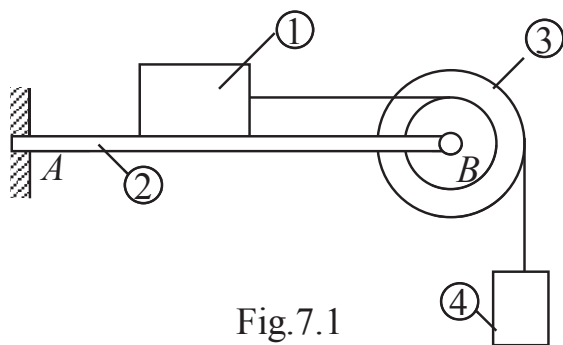


Fig.7.1

Pentru exemplificare se prezintă sistemul din fig.7.1 format din patru corpuri. Un corp având greutatea  $G_1$  se reazemă cu frecare pe o bară de greutate  $G_2$ , care este încastrată la extremitatea A într-un perete vertical. La extremitatea B este fixat printr-o articulație cilindrică un trolieu de greutate  $G_3$ . Pe discul interior al trolieului este înfășurat un fir legat la corpul 1; pe discul exterior este înfășurat un al doilea fir de care este suspendat un corp de greutate  $G_4$ . Forțele aplicate fiecăruia dintre corpuri sunt prezentate în fig.7.2.

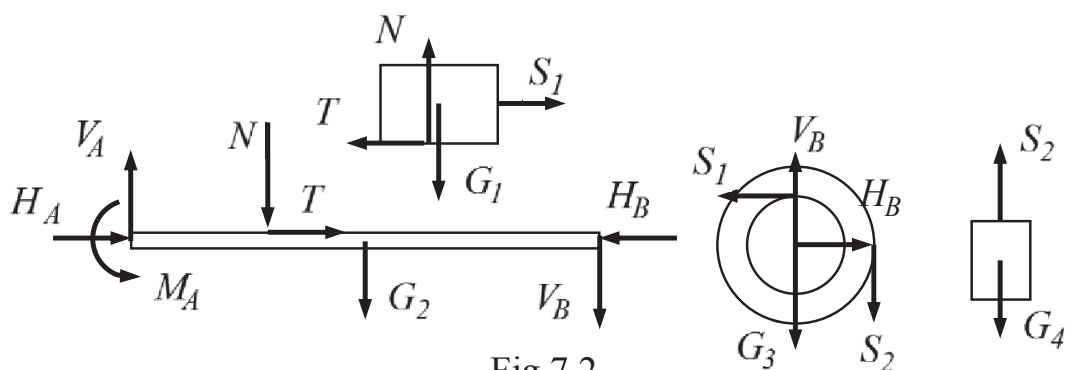


Fig.7.2

Forțele exterioare sunt greutatea  $G_1, G_2, G_3, G_4$  și reacțiunile din încastrarea barei, respectiv  $H_A, V_A, M_A$ . Forțele interioare sunt:

- reacțiunile  $N$  și  $T$  în reazemul simplu cu frecare dintre corpurile 1 și 2;
- reacțiunile  $H_B$  și  $V_B$  în articulația cilindrică dintre corpurile 2 și 3;
- tensiunea  $S_1$  în firul dintre corpurile 1 și 3;
- tensiunea  $S_2$  în firul dintre corpurile 3 și 4.

Se constată că pe diagramele de încărcare ale corpurilor sistemului forțele exterioare apar o singură dată iar forțele interioare de două ori.

Pentru un sistem de corpuri aflat în echilibru se pune în general problema determinării forțelor exterioare sau a condițiilor geometrice care asigură această stare, precum și calcularea tuturor forțelor de legătură, exterioare și interioare. În acest scop se pornește de la ipoteza conform căreia, dacă sistemul se află în echilibru, toate corpurile componente se află deasemenea în echilibru, neexistând mișcări interioare între ele.

Metodele utilizate pentru rezolvarea sistemelor de corpuri aflate în echilibru sunt:

– *metoda izolării corpurilor*, în care se descrie echilibrul fiecărui corp al sistemului sub acțiunea forțelor exterioare și interioare care îi sunt aplicate;

– *metoda echilibrului părților*, în care sistemul dat se divide în două sau mai multe subsisteme, fiecare considerându-se “solidificat”, ca și cum ar fi un singur corp; se descrie echilibrul fiecărui subsistem sub acțiunea forțelor exterioare și de legătură care îi sunt aplicate, ignorându-se forțele de legătură interioare dintre corpurile subsistemului. Metoda se va exemplifica la grinzile cu zăbrele.

În cadrul ambelor metode descrierea stării de echilibru se face printr-un număr de ecuații corespunzător sistemului de forțe aplicat corpului sau subsistemului analizat. Dacă echilibrul este condiționat și de frecare, atunci se adaugă și inecuațiile specifice tipului de frecare, conform celor arătate în capitolul precedent.

Un sistem de corpuri se consideră *static determinat* dacă numărul total de ecuații și inecuații de echilibru este cel puțin egal cu numărul necunoscutelor (sistemul din fig.7.1 îndeplinește această condiție). Dacă numărul ecuațiilor este mai mare decât cel al necunoscutelor, atunci pentru una sau mai multe din acestea vor exista mai multe soluții.

Sistemul se consideră *static nedeterminat* dacă numărul ecuațiilor este inferior numărului de necunoscute. După cum s-a mai arătat, în Mecanică se operează cu modele de corpuri solide rigide. Ridicarea nedeterminării în vederea calculării tuturor necunoscutelor se face renunțând la ipoteza rigidității și considerând corpurile deformabile. Metodele specifice sunt studiate în cadrul disciplinei Rezistența Materialelor.

Un exemplu de sistem static nedeterminat este arătat în fig.7.3. Cele trei bare cu greutatea neglijabilă, situate în același plan, sunt legate între ele prin articulațiile cilindrice din  $B$  și  $C$  și sunt fixate la bază prin încastrările plane din  $A$  și  $D$ . Asupra lor acționează forțele date  $P$  și  $Q$ , coplanare cu barele. Schemele de încărcare arată că barele sunt supuse unor sisteme de forțe coplanare, pentru fiecare putându-se scrie câte trei ecuații de echilibru (două de proiecție și una de momente). Rezultă un total de 9 ecuații scalare, număr mai mic decât cel al reacțiunilor exterioare și interioare, respectiv 10.

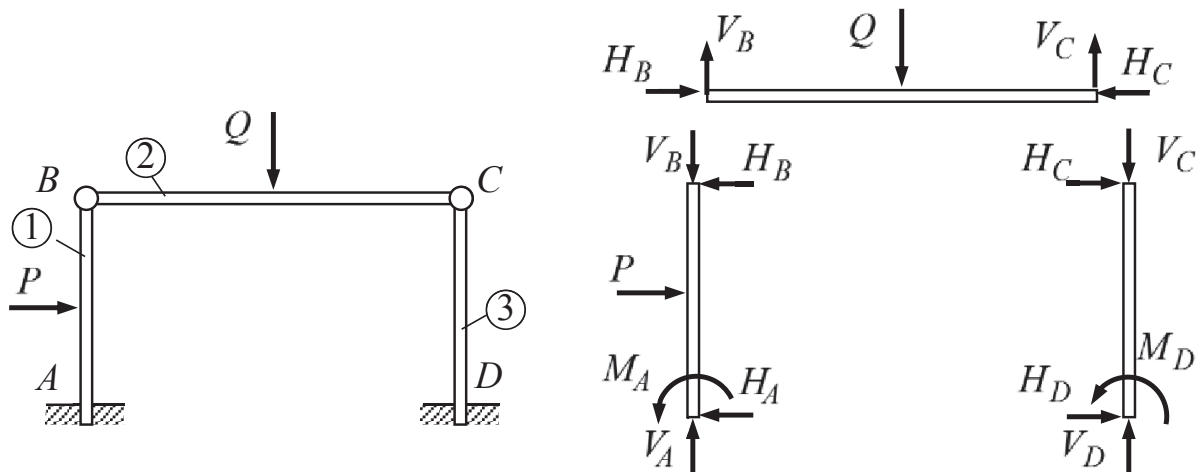


Fig.7.3

## 7.2 Metoda izolării corpurilor

Metoda este deosebit de importantă mai ales prin faptul că modul de lucru specific acesteia, detaliat în continuare pentru rezolvarea problemelor de statica sistemelor de corpuri, se regăsește și în studiul acestora din punct de vedere dinamic.

După cum s-a mai arătat, echilibrul general al unui sistem de corpuri este realizat dacă fiecare corp din componența sa se află în echilibru sub acțiunea forțelor exterioare și interioare care îi sunt aplicate numai lui.

Etapele metodei izolării corpurilor se pot detalia în modul următor:

a) Se desenează separat fiecare dintre corpurile sistemului, redus la elementele grafice esențiale (linii, cercuri, etc). Simbolurile grafice ale legăturilor (reazeme, articulații, încastrări, fire) nu se reprezintă. Se poate renunța, pentru simplificare, la orice corp suspendat prin fir, acționat numai prin greutatea proprie; această forță va fi transmisă în punctul de prindere al firului la corpul de legătură;

b) Se desenează forțele exterioare date ale căror direcții și sensuri de acțiune sunt de regulă cunoscute. În general, simbolizarea alfanumerică pentru aceste forțe conține literele  $F$ ,  $G$ ,  $P$ ,  $Q$  cu indici numerici sau literali;

c) Se desenează forțele de legătură (reacțiunile) exterioare și interioare. Pe ansamblul sistemului reacțiunile exterioare apar o singură dată iar cele interioare de două ori, la corpuri diferite. Simbolurile uzuala ale acestora au fost prezentate în cap. 6.2. Se reamintește că direcțiile și sensurile reacțiunilor din reazemele simple și cele ale tensiunilor din fire sunt bine determinate prin efectul de sprijin și respectiv de tracțiune aplicat corpului asupra căruia acționează. Pentru articulații și încastrări sensurile de acțiune care nu pot fi precizate dinainte se pot alege opțional; dacă din calcul vor rezulta valori pozitive pentru reacțiunile respective, sensurile considerate sunt cele corecte;

d) Se stabilește pentru fiecare corp un sistem de referință cartezian ale cărui direcții, convenabil alese, să permită proiectarea pe cât posibil în adevărată mărime, în special a forțelor care urmează a fi determinate. Desenarea axelor

sistemului este opțională. În unele cazuri simple se poate utiliza un singur sistem de referință global pentru întregul sistem.

e) Pentru fiecare corp se stabilesc ecuațiile de echilibru. Numărul lor depinde de configurația sistemului de forțe respectiv. Astfel, se scriu:

- o singură ecuație de proiecție pentru forțe coliniare;
- două ecuații de proiecție și o ecuație de momente pentru forțe coplanare;
- trei ecuații de proiecție și trei de momente pentru sistemele spațiale.

Numărul de ecuații se poate micșora în cazul corpurilor a căror tendința de mișcare este o translație în plan sau în spațiu; pentru acestea nu sunt necesare ecuațiile de momente;

f) Se adaugă inecuațiile care condiționează echilibrul cu frecare; recapitulând cele analizate în cap. 6.4, forma generală a acestora este:

- frecarea de alunecare:  $T \leq \mu N$ ;
- frecare de rostogolire:  $M_r \leq s N$ ;
- frecarea de pivotare:  $M_p \leq \nu G$ ;
- frecarea în articulații:  $M_f \leq \mu_0 r_0 \sqrt{H^2 + V^2}$ ;
- frecarea firelor:  $T_2 \leq T_1 e^{\mu \theta}$ ;

g) Se stabilește ordinea de rezolvare a sistemului de ecuații, eventual printr-o schemă logică; se determină mai întâi forțele sau momentele care condiționează echilibrul cu frecare folosind inecuațiile respective și având în vedere, în caz că există, tendințele multiple de mișcare;

h) Se rezolvă sistemul în raport cu necunoscutele. Ecuațiile sunt în general liniare și explicitarea necunoscutele este simplă. Relațiile de calcul se dispun sub formă de algoritm, în ordinea logică a efectuării operațiilor, fie în vederea evaluărilor numerice imediate, fie în vederea programării pe calculator. Substituirea literală succesivă se justifică numai dacă se studiază o influență parametrică, respectiv dependența unei necunoscute de variația unui parametru.

**Problema 7.1:** Pentru sistemul de corpuri din fig.7.4 (având aceeași configurație cu cel din fig.7.1) se cere să se determine valoarea greutatei corpului 4 pentru care are loc echilibrul cu frecare. Să se calculeze toate reacțiunile din legături dacă această greutate este egală cu jumătate din valoarea maximă necesară pentru echilibru.

**Date:**  $G_1, G_2, G_3, l, r, R, \mu$ ;

**Cerute:**

- a)  $P = ?$  (pentru echilibru);
- b) Reacțiunile, pentru  $P = P_{\max} / 2$ ;

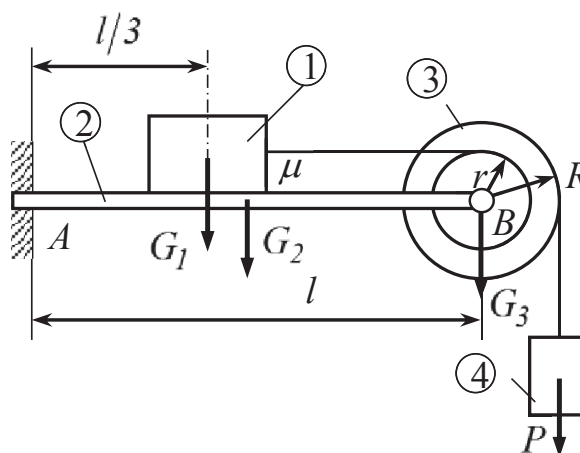
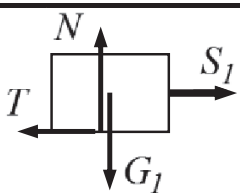
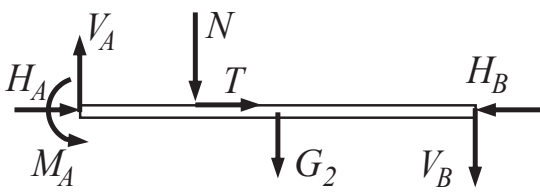
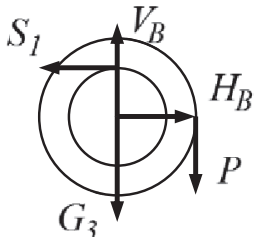


Fig.7.4

**Rezolvare:** Se consideră un sistem de referință global cu direcțiile orizontală și respectiv verticală. Diagramele de încărcare și ecuațiile de echilibru sunt prezentate în tab.7.1. Acestor ecuații li se atribuie un număr de identificare pentru ca să se poată realiza mai ușor schemele logice. Prima dintre acestea servește la determinarea valorii forței  $P$  pentru echilibru iar cea de a doua pentru calculul reacțiunilor corespunzătoare unei valori a acesteia din domeniul de echilibru cu frecare.

**Tabelul 7.1**

Corp Nr.	Diagrama de încărcare	Ecuațiile de echilibru
1		1) $S_1 - T = 0$ 2) $N - G_1 = 0$ 3) $T \leq \mu N$
2		4) $H_A + T - H_B = 0$ 5) $V_A - G_2 - V_B = 0$ 6) $M_A - N \cdot \frac{l}{3} - G_2 \cdot \frac{l}{2} - V_B \cdot l = 0$
3		7) $H_B - S_1 = 0$ 8) $V_B - G_3 - P = 0$ 9) $S_1 \cdot r - P \cdot R = 0$
Schema logică pentru punctul a) $(9) \rightarrow S_1 \rightarrow (1) \rightarrow T$ $(2) \rightarrow N$		Rezultat: $P \leq \mu G_1 \frac{r}{R} = P_{\max}$
Schema logică pentru punctul b) $P \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (9) \rightarrow S_1 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (1) \rightarrow T \\ (7) \rightarrow H_B \end{array} \right\} \rightarrow (4) \rightarrow H_A \\ (8) \rightarrow V_B \rightarrow (5) \rightarrow V_A \\ (2) \rightarrow N \\ V_B \end{array} \right\} \rightarrow (6) \rightarrow M_A$		Calculul reacțiunilor $P = P_{\max} / 2$ 9) $S_1 = PR / r$ 1) $T = S_1$ 7) $H_B = S_1$ 4) $H_A = H_B - T$ 8) $V_B = P + G_3$ 5) $V_A = V_B + G_2$ 2) $N = G_1$ 6) $M_A = l \cdot \left( \frac{N}{3} + \frac{G_2}{2} + V_B \right)$

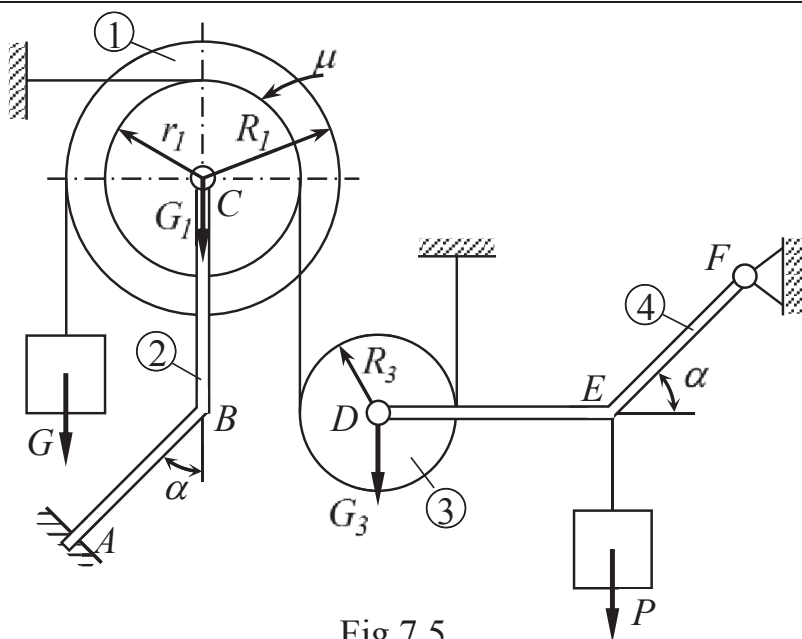


Fig.7.5

**Problema 7.2:** Sistemul din fig.7.5 este format dintr-un troliu 1 articulat la extremitatea superioară a unei console 2, încastrată la cealaltă extremitate. Tendința de mișcare a troliului este impusă de greutatea  $G$  suspendată de un fir înfășurat pe discul exterior; ea este frânată prin frecarea de coeficient  $\mu$  dintre discul interior și un fir fix. Tensiunea necesară în acest scop se

obține cu ajutorul unei greutăți  $P$  suspendată de pârghia 4 și rola 3. Să se calculeze valoarea minimă a acestei greutăți precum și reacțiunile corespunzătoare unei valori duble a acestei greutăți. Se neglijează greutatele proprii ale consolei și pârghiei.

**Date:**  $G_1 = 2G$ ,  $G_3 = 4G$ ,  $\mu = 0,5$

$$R_1 = \frac{7}{4}R, \quad r_1 = \frac{5}{4}R, \quad R_3 = R, \quad AB = EF = 2R\sqrt{2}, \quad BC = DE = 3R$$

**Cerute:** a)  $P = ?$  (pentru echilibru);

b) Reacțiunile, pentru  $P = 2P_{\min}$ ;

**Rezolvare:** Încărcarea corpurilor principale și ecuațiile de echilibru sunt prezentate în tab.7.2.

Tabelul 7.2

Diagrama de încărcare	Ecuațiile de echilibru
	<p><b>Corp 1</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1) <math>H_C - S_1 = 0</math></li> <li>2) <math>V_C - G_1 - G - S_2 = 0</math></li> <li>3) <math>GR_1 + (S_1 - S_2)r_1 = 0</math></li> <li>4) <math>S_2 \leq S_1 e^{\mu\pi/2}</math></li> </ol> <p><b>Corp 2</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>5) <math>H_A \sin \alpha - V_A \cos \alpha - H_C = 0</math></li> <li>6) <math>H_A \cos \alpha + V_A \sin \alpha - V_C = 0</math></li> <li>7) <math>M_A - V_C \cdot AB \sin \alpha + H_C \cdot (BC + AB \cos \alpha) = 0</math></li> </ol>



Tabelul 7.2 (continuare)

<p>The diagram illustrates a mechanical system. On the left, a circular body is shown with forces \$S_2\$ (up), \$S_3\$ (up), \$H_D\$ (right), \$V_D\$ (down), and \$G_3\$ (down). To its right, a frame structure is shown. It consists of a horizontal member on the left with forces \$H_D\$ (left) and \$V_D\$ (up) at its left end, and a downward force \$P\$ at its right end. From this right end, a member extends upwards and to the right at an angle, with forces \$V_F\$ (up) and \$H_F\$ (right) at its top end.</p>	<p><u>Corp 3</u></p> <p>8) <math>H_D = 0</math></p> <p>9) <math>S_2 + S_3 - V_D - G_3 = 0</math></p> <p>10) <math>(S_3 - S_2)R_3 = 0</math></p> <p><u>Corp 4</u></p> <p>11) <math>H_F - H_D = 0</math></p> <p>12) <math>V_F + V_D - P = 0</math></p> <p>13) <math>P \cdot EF \cos \alpha - H_D \cdot EF \sin \alpha - V_D \cdot (DE + EF \cos \alpha) = 0</math></p>
<p><i>Schema logică pentru punctul a)</i></p> <p>(13) <math>\rightarrow V_D \rightarrow</math> (9) <math>\rightarrow S_3</math></p> <p><math>S_3 \rightarrow</math> (10) <math>\rightarrow S_2 \rightarrow</math> (3) <math>\rightarrow S_1</math></p> <p><math>S_1</math> } <math>\rightarrow</math> (4) <math>\rightarrow P</math></p> <p><math>S_2</math> }</p>	<p><i>Rezultat:</i></p> $P \geq \frac{10 - 3e^{\mu\pi/2}}{e^{\mu\pi/2} - 1} G = P_{\min}$ $P_{\min} = 2,866G$
<p><i>Schema logică pentru punctul b)</i></p> <p>(8) <math>\rightarrow H_D \rightarrow</math> (11) <math>\rightarrow H_F</math></p> <p><math>P \rightarrow</math> (13) <math>\rightarrow V_D \rightarrow</math> <math>\begin{cases} (12) \rightarrow V_F \\ (9,10) \rightarrow \begin{cases} S_2 \\ S_3 \end{cases} \end{cases}</math></p> <p><math>S_2 \rightarrow</math> <math>\begin{cases} (2) \rightarrow V_C \\ (3) \rightarrow S_1 \rightarrow (1) \rightarrow H_C \end{cases}</math></p> <p><math>(H_C, V_C) \rightarrow</math> <math>\begin{cases} (5,6) \rightarrow \begin{cases} H_A \\ V_A \end{cases} \\ (7) \rightarrow M_A \end{cases}</math></p>	<p><i>Calculul reacțiunilor:</i></p> $P = 2P_{\min} = 5,732 G$ <p>8) } <math>H_D = H_F = 0</math></p> <p>11) }</p> <p>13) <math>V_D = \frac{P \cdot EF \cos 45^\circ}{DE + EF \cos 45^\circ} = 2.293 G</math></p> <p>12) <math>V_F = P - V_D = 3.439 G</math></p> <p>9) } <math>S_2 = S_3 = \frac{1}{2} (V_D + G_3) = 3.146 G</math></p> <p>10) }</p> <p>2) <math>V_C = S_2 + G + G_1 = 6.146 G</math></p> <p>3) <math>S_1 = S_2 - G \frac{R_1}{r_1} = 1.746 G</math></p> <p>1) <math>H_C = S_1 = 1.746 G</math></p> <p>5,6) <math>\begin{cases} H_A = \frac{V_C + H_C}{2 \cdot \sin 45^\circ} = 5.581 G \\ V_A = \frac{V_C - H_C}{2 \cdot \sin 45^\circ} = 3.111 G \end{cases}</math></p> <p>7) <math>M_A = V_C \sin 45^\circ - H_C (BC + AB \cos 45^\circ) = 3.561 GR</math></p>

### 7.3 Grinzi cu zăbrele

Prin *grindă cu zăbrele* se înțelege un sistem format din bare legate între ele la extremități, alcătuind o construcție rigidă plană sau spațială. Denumirea, atribuită inițial unor construcții la care predominantă este lungimea (poduri, macarale, etc.) se extinde la oricare alt ansamblu astfel realizat. Punctele de legătură între extremitățile barelor se numesc *noduri*. În mod practic aceste îmbinări se realizează prin sudură sau nituire.

Metodele de calcul static pentru grinzi cu zăbrele se referă, în general, la construcțiile plane (fig.7.6, 7.7). Ele pot fi însă extinse și la cele în spațiu (un exemplu simplu este dat în fig.7.8).

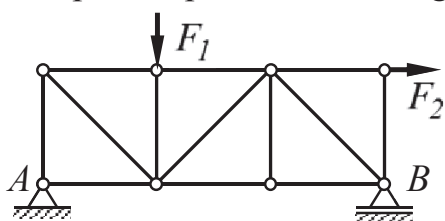


Fig.7.6

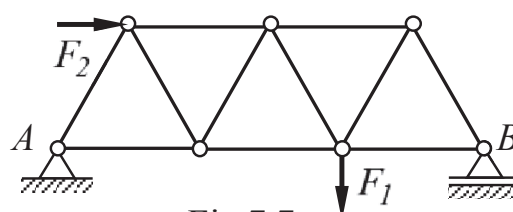


Fig.7.7

În studiul grinzi cu zăbrele plane se fac câteva ipoteze simplificatoare:

- barele sunt rectilinii;
- nodurile sunt articulații cilindrice fără frecare;
- forțele exterioare se aplică numai în noduri și sunt coplanare cu grinda;
- legăturile exterioare ale grinzii se realizează numai prin noduri;
- greutatea proprie a barelor este neglijabilă comparativ cu forțele exterioare.

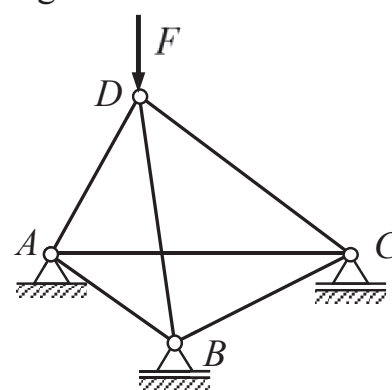


Fig.7.8

În cazul grinzi cu zăbrele spațiale nodurile sunt articulații sferice iar forțele exterioare pot avea orice direcție. În ipoteza menționată mai sus, respectiv că nodurile sunt articulații, în acestea vor acționa numai forțe de legătură, nu și momente. La o bară oarecare  $AB$  (fig.7.9) în fiecare nod acționează câte un sistem de forțe concentrate care se reduce fiecare la câte o rezultantă:

$$\bar{T}_A = \sum \bar{F}_i \quad \bar{T}_B = \sum \bar{F}'_i \quad (7.1)$$

Ecuțiile care descriu echilibrul barei sunt:

$$\begin{cases} \bar{T}_A + \bar{T}_B = 0 \\ \bar{M}_A(\bar{T}_B) = \overline{AB} \times \bar{T}_B = 0 \end{cases} \quad (7.2)$$

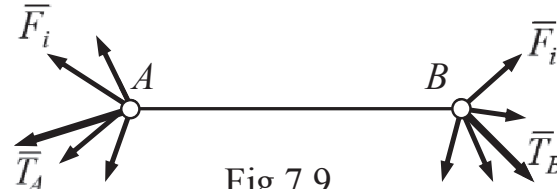


Fig.7.9

Produsul vectorial nul din ecuația de momente indică coliniaritatea forței  $\bar{T}_B$  cu bara  $AB$ . În mod analog se demonstrează și că  $\bar{T}_A$  este coliniar cu  $AB$ . Ținând cont și de prima ecuație se poate scrie:

$$|\bar{T}_A| = |\bar{T}_B| = T \quad (7.3)$$

$T$  reprezintă tensiunea din bară și este coliniară cu aceasta.

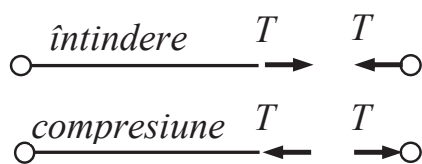


Fig.7.10

În funcție de solicitările exterioare o bară poate fi supusă la întindere sau la compresiune. Efectuând o secționare a barei în imediata vecinătate a unui nod și introducând tensiunea corespunzător solicitării, se observă că în cazul întinderii tensiunea “iese” din nod iar în cazul compresiunii “intră” în nod (fig.7.10).

Pentru grinzile cu zăbrele calculul static include determinarea reacțiilor exterioare precum și a tensiunilor din bare.

În ansamblul ei, datorită modului în care sunt asamblate barele, o grindă cu zăbrele se comportă ca un solid rigid și, în consecință, sunt valabile condițiile generale de echilibru stabilite pentru acesta. Numărul ecuațiilor scalare de echilibru va depinde de configurația sistemului forțelor exterioare care acționează asupra grinzii (maximum 3 pentru forțe exterioare coplanare grinzii și maximum 6 pentru forțe dispuse tridimensional). Numărul reacțiilor necunoscute din legăturile exterioare ale grinzii trebuie să fie mai mic sau cel mult egal cu numărul acestor ecuații.

Pentru calculul tensiunilor din bare se utilizează *metoda izolării nodurilor*. Fiecare din nodurile grinzii cu zăbrele se consideră un punct material acționat de un sistem de forțe concurente, respectiv tensiunile din barele pe care le unește și, după caz, forțele exterioare date și reacțiunile din legăturile exterioare ale grinzii. Echilibrul nodului se descrie printr-un număr de ecuații specific dispunerii acestor forțe (2 pentru forțe coplanare și 3 pentru forțe dispuse tridimensional).

Grinda cu zăbrele este static determinată dacă, aplicând această metodă, se pot calcula toate tensiunile din bare. Verificarea acestei stări se face cu relația generală de forma:

$$b = k_1 n - k_2 \quad (7.4)$$

în care s-a notat prin  $b$  – numărul de bare,  $n$  – numărul de noduri,  $k_1$  – numărul de ecuații de echilibru pentru un nod,  $k_2$  – numărul de ecuații de echilibru pentru grinda în ansamblu. Astfel,

$$\text{– pentru grinda plană} \quad b = 2n - 3 \quad (7.5)$$

$$\text{– pentru grinda în spațiu} \quad b = 3n - 6 \quad (7.6)$$

La demararea calculului se face ipoteza că toate barele din configurația grinzii sunt supuse la întindere; în acest caz, conform celor arătate mai înainte, tensiunile ies din noduri. Valoarea negativă obținută în urma calculului indică faptul că bara respectivă este supusă la compresiune.

**Problema 7.3** Grinda cu zăbrele plană din fig.7.6, având nodurile echidistante pe orizontală și verticală, este legată la bază printr-o articulație cilindrică în nodul  $A$  și printr-un reazem simplu în nodul  $B$ . Grinda este supusă acțiunii forțelor  $F_1$  și  $F_2$ . Să se calculeze reacțiunile exterioare și tensiunile din toate barele.

Date:  $AB = 3l$ ,  $AC = l$

$F_1 = 3P$ ,  $F_2 = 2P$

Cerute: a)  $H_A, V_A, N$

b)  $T_1, \dots, T_{13}$

**Rezolvare:** Grinda este acționată de un sistem de forțe coplanare cu ea (fig.7.11), echilibrul ei fiind descris prin trei ecuații, număr egal cu cel al reacțiunilor exterioare. Condiția ca grinda să fie static determinată, respectiv:

$b = 2n - 3 = 2 \cdot 8 - 3 = 13$ ,  
este verificată. Calculele sunt date în tab.7.3.

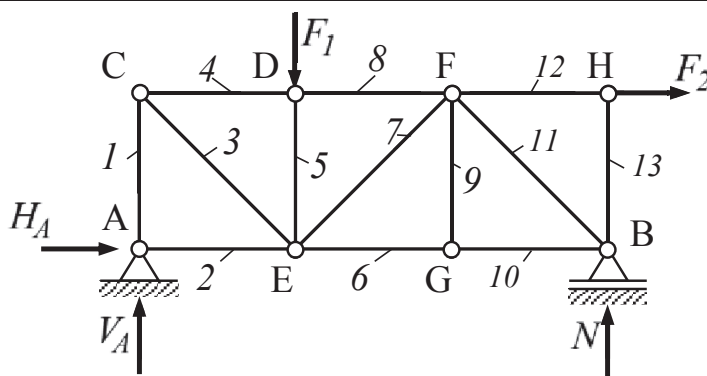
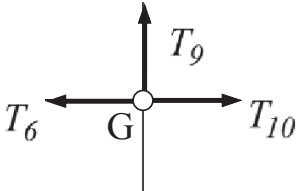
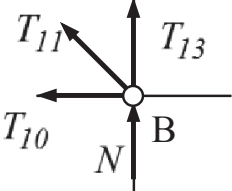


Fig.7.11

Tabelul 7.3

a) Reacțiunile exterioare		
$\begin{cases} H_A + F_2 = 0 \\ V_A + N - F_1 = 0 \\ N \cdot 3l - F_1 \cdot l - F_2 \cdot l = 0 \end{cases}$	$\begin{aligned} H_A &= -F_2 = -2P \\ N &= \frac{1}{3}(F_1 + F_2) = \frac{5}{3}P \\ V_A &= F_1 - N = \frac{4}{3}P \end{aligned}$	
b) Tensiunile în bare		
$\begin{cases} T_4 + T_3 \cos 45^\circ = 0 \\ -T_1 - T_3 \sin 45^\circ = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} T_8 - T_4 = 0 \\ -F_1 - T_5 = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} T_{12} + T_{11} \cos 45^\circ - \\ -T_8 - T_7 \cos 45^\circ = 0 \\ -T_9 - T_{11} \sin 45^\circ - \\ -T_7 \sin 45^\circ = 0 \end{cases}$
$\begin{cases} F_2 - T_{12} = 0 \\ -T_{13} = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} H_A + T_2 = 0 \\ V_A + T_1 = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} T_6 + T_7 \cos 45^\circ - \\ -T_2 - T_3 \cos 45^\circ = 0 \\ T_5 + T_7 \sin 45^\circ + \\ + T_3 \sin 45^\circ = 0 \end{cases}$

**Tabelul 7.3 (continuare)**

		
$\begin{cases} T_{10} - T_6 = 0 \\ T_9 = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} -T_{10} - T_{11} \cos 45^\circ = 0 \\ T_{13} + N + T_{11} \sin 45^\circ = 0 \end{cases}$	
<i>c) Rezultate</i>		
<p><u>nodul A</u></p> $T_2 = -H_A = 2P$ $T_1 = -V_A = -\frac{4}{3}P$ <p><u>nodul C</u></p> $T_3 = -\frac{T_1}{\sin 45^\circ} = \frac{4\sqrt{2}}{3}P$ $T_4 = -T_3 \cos 45^\circ = -\frac{4}{3}P$	<p><u>nodul D</u></p> $T_8 = T_4 = -\frac{4}{3}P$ $T_5 = -F_1 = -3P$ <p><u>nodul E</u></p> $T_7 = -T_3 - \frac{T_5}{\sin 45^\circ} = \frac{5\sqrt{2}}{3}P$ $T_6 = -T_7 \cos 45^\circ + T_2 + T_3 \cos 45^\circ = \frac{3}{3}P$	<p><u>nodul G</u></p> $T_{10} = T_6 = \frac{5}{3}P$ $T_9 = 0$ <p><u>nodul B</u></p> $T_{11} = -\frac{T_{10}}{\cos 45^\circ} = -\frac{5\sqrt{2}}{3}P$ $T_{13} = -N - T_{11} \sin 45^\circ = 0$ <p><u>nodul H</u></p> $T_{12} = F_2 = 2P$

Observații:

- ordinea de rezolvare a nodurilor se alege în așa fel încât ecuațiile aferente să nu conțină mai mult de două tensiuni necunoscute;
- numărul total de ecuații excede pe cel al tensiunilor; ultimul nod, în cazul de față  $F$ , poate fi folosit pentru verificare;
- interpretarea rezultatelor de mai sus arată că barele 2,3,6,7,10,12 sunt supuse la întindere iar barele 1,4,5,8,11 la compresiune; 9 și 13 nu sunt încărcate.

Pentru calcularea selectivă a unor tensiuni în barele unei grinzi cu zăbrele se poate utiliza *metoda secțiunilor*. Aceasta are la bază metoda echilibrului părților amintită în capitolul 7.1. În principiu, metoda constă în secționarea grinzii cu zăbrele după un traseu care conține barele pentru care se face calculul. Aceste bare se suprimă și în nodurile de la extremitățile lor se introduc tensiunile corespunzătoare. Fiecare din părțile grinzii cu zăbrele se va afla în echilibru sub acțiunea forțelor exterioare date, a reacțiilor în legăturile exterioare și a tensiunilor menționate, aplicate părții respective.

**Problema 7.4** La grinda cu zăbrele plană din fig.7.7, având toate barele egale, legătura la bază se face prin articulația cilindrică din nodul  $A$  și prin reazemul simplu din nodul  $B$ . Grinda este supusă acțiunii forțelor  $F_1$  și  $F_2$ . Să se calculeze reacțiunile exterioare și tensiunile din barele 1, 2, 3.

Date:  $a = \text{lungimea barelor}$

$$F_1 = 3P, \quad F_2 = 2P$$

Cerute: a)  $H_A, V_A, N$

b)  $T_1, T_2, T_3$

Rezolvare: Reacțiunile exterioare se calculează la fel ca în ca în problema precedentă. Traseul de secționare al grinzii taie cele trei bare (fig.7.12). Calculele sunt prezentate în tabelul 7.4.

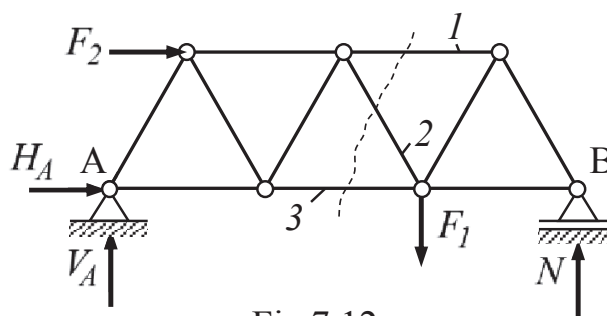


Fig.7.12

**Tabelul 7.4**

a) Calculul reacțiunilor	
$\begin{cases} H_A + F_2 = 0 \\ V_A + N - F_1 = 0 \\ N \cdot 3a - F_1 \cdot 2a - F_2 \cdot a \sin 60^\circ = 0 \end{cases}$	$\begin{aligned} H_A &= -F_2 = -2P \\ N &= \frac{1}{3}(2F_1 + F_2 \sin 60^\circ) = \frac{6+\sqrt{3}}{3}P \\ V_A &= F_1 - N = \frac{3-\sqrt{3}}{3}P \end{aligned}$
b) Calculul tensiunilor	
$\begin{cases} H_A + F_2 + T_1 + T_2 \cos 60^\circ + T_3 = 0 \\ V_A - T_2 \sin 60^\circ = 0 \\ -(T_1 + F_2)a \sin 60^\circ - T_2 \cdot 2a \cdot \sin 60^\circ = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} -T_1 - T_3 - T_2 \sin 60^\circ = 0 \\ N - F_1 + T_2 \cdot \sin 60^\circ = 0 \\ Na + T_1 a \sin 60^\circ = 0 \end{cases}$
$T_2 = \frac{V_A}{\sin 60^\circ} = \frac{2(\sqrt{3}-1)}{3}P$	$T_2 = \frac{F_1 - N}{\sin 60^\circ} = \frac{2(\sqrt{3}-1)}{3}$
$T_1 = -2T_2 - F_2 = -\frac{4\sqrt{3}+2}{3}$	$T_1 = -\frac{N}{\sin 60^\circ} = -\frac{4\sqrt{3}}{3} = 2$
$T_3 = -H_A - F_2 - T_1 - T_2 \cos 60^\circ = \sqrt{3} + 1$	$T_3 = -T_1 - T_2 \sin 60^\circ = \sqrt{3} + 1$

După cum se observă, se obțin aceleași rezultate oricare ar fi partea analizată. Metoda se poate utiliza dacă numărul de bare care se secționează corespunde numărului de ecuații care se pot scrie pentru echilibrul uneia sau alteia dintre părți. În cazul grinzilor coplanare acționate de forțe în planul lor, se pot practica secțiuni care intersectează maximum trei bare iar în cazul unei grinzi spațiale planul de secționare poate intersecta maximum 6 bare.

În cazul grinzilor cu zăbrele plane o celula nedeformabilă este format din 3 bare dispuse triunghiular (fig.7.6, 7.7) iar în cazul unei grinzi cu zăbrele spațiale, are forma unei piramide triunghiulare totalizând 6 bare (fig.7.8). Traseul de secționare al grinzii nu trebuie să intersecteze toate barele aceleiași celule.

## 8. STATICA FIRELOR

### 8.1 Generalități

Firele sunt linii materiale având grosimea neglijabilă în comparație cu lungimea; în Mecanică se admite ipoteza că firele sunt inextensibile, flexibile și torsionabile. Această ipoteză indică faptul că un fir nu opune nicio rezistență atunci când este îndoit sau răsucit, singura forță fiind tensiunea în lungul său.

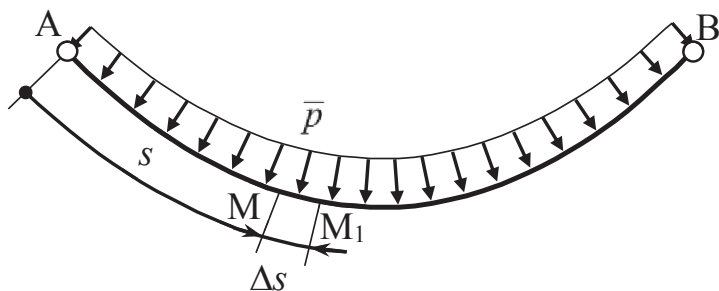


Fig.8.1

Se consideră un fir suspendat la extremități în două puncte fixe  $A$  și  $B$  (fig.8.1). Pentru poziționarea unui punct oarecare  $M$  al său se folosește coordonata intrinsecă  $s = AM$ ; se reamintește că aceasta este o coordonată locală orientată, egală cu lungimea porțiunii de fir măsurată față de o extremitate a acestuia. Asupra firului acționează o forță exterioară distribuită continuu în lungul său după o lege de variație oarecare  $\bar{p} = \bar{p}(s)$ , în care  $|\bar{p}|$  se exprimă în N/m. Obiectul studiului îl constituie determinarea formei pe care o ia firul sub acțiunea acestei forțe precum și a legii de variație a tensiunii în fir, respectiv  $\bar{T} = \bar{T}(s)$ .

Spre deosebire de bare, care pot fi supuse atât la întindere cât și la compresiune, firele pot fi supuse numai la întindere. Dacă se secționează firul într-un punct oarecare, pe cele două fețe ale secțiunii tensiunile, egale și de sens contrar, sunt orientate în modul arătat în fig.8.2; se consideră pozitivă tensiunea care are sensul coordonatei  $s$ .

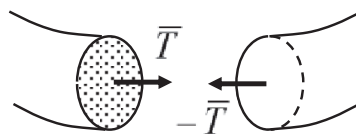


Fig.8.2

### 8.2 Ecuațiile generale de echilibru

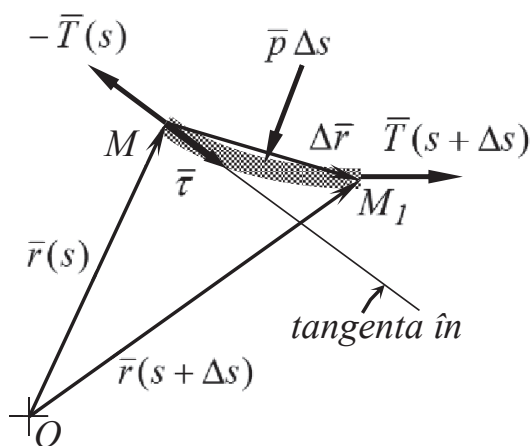


Fig.8.3

Se studiază echilibrul unui segmentului de fir elementar  $MM_1 = \Delta s$  din fig.8.1, detaliat în fig.8.3. Luând ca reper general un punct  $O$ , poziția relativă a punctului  $M_1$  față de  $M$  este definită prin vectorul:

$$\overline{MM_1} = \Delta \bar{r} = \bar{r}(s + \Delta s) - \bar{r}(s) \quad (8.1)$$

Forța exterioară distribuită care acționează asupra segmentului elementar se poate considera constantă pe lungimea acestuia și poate fi redusă la o rezultantă  $\bar{p} \Delta s$  aplicată la mijlocul segmentului. La extremitățile

acestua se introduc tensiunile corespunzătoare secțiunilor respective. Echilibrul segmentului sub acțiunea acestor trei forțe se descrie prin relațiile vectoriale:

$$\tau_M \begin{cases} (\sum \bar{F}_i = 0) & \bar{T}(s + \Delta s) - \bar{T}(s) + \bar{p} \Delta s = 0 \\ (\sum \bar{M}_M = 0) & \Delta \bar{r} \times \bar{T}(s + \Delta s) + \frac{\Delta \bar{r}}{2} \times (\bar{p} \Delta s) = 0 \end{cases} \quad (8.2)$$

Se împarte fiecare relație la  $\Delta s$  și se calculează limitele fiecărui termen atunci când  $\Delta s \rightarrow 0$ .

$$\begin{cases} \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\bar{T}(s + \Delta s) - \bar{T}(s)}{\Delta s} + \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \bar{p} = 0 \\ \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta s} \times \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \bar{T}(s + \Delta s) + \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{r}}{2} \times \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \bar{p} = 0 \end{cases} \quad (8.3)$$

Deoarece forța distribuită  $\bar{p}$  poate fi considerată constantă pe segmentul elementar  $\Delta s$ , se poate scrie:

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \bar{p} = \bar{p} \quad (8.4)$$

Atunci când  $\Delta s \rightarrow 0$  punctul  $M_1$  tinde către  $M$  și deci  $\Delta \bar{r} \rightarrow 0$ ; în consecință:

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{r}}{2} = 0 \quad (8.5)$$

Pentru tensiunea în fir sunt valabile relațiile

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \bar{T}(s + \Delta s) = \bar{T}(s) = \bar{T} \quad (8.6) \quad \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\bar{T}(s + \Delta s) - \bar{T}(s)}{\Delta s} = \frac{d\bar{T}}{ds} \quad (8.7)$$

În continuare:

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta \bar{r}}{|\Delta \bar{r}|} \cdot \frac{|\Delta \bar{r}|}{\Delta s} \right) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{r}}{|\Delta \bar{r}|} \cdot \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{|\Delta \bar{r}|}{\Delta s} = \bar{\tau} \cdot l = \bar{\tau} \quad (8.8)$$

care se mai poate evalua și în modul următor:

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\bar{r}(s + \Delta s) - \bar{r}(s)}{\Delta s} = \frac{d\bar{r}}{ds} \quad (8.9)$$

Prin echivalarea celor două relații se obține:

$$\bar{\tau} = \frac{d\bar{r}}{ds} \quad (8.10)$$

La limită, când  $M_1$  se suprapune peste  $M$ , dreapta  $MM_1$  devine tangenta în  $M$  la curba firului iar vectorul  $\bar{\tau}$  este versorul acestei tangente. Cu aceste precizări cea de a doua relație (8.3) devine:

$$\bar{\tau} \times \bar{T} = 0 \quad (8.11)$$

Un produsul vectorial nul indică coliniaritatea vectorilor respectivi. În consecință vectorul tensiunii va avea direcția tangentei la fir în punctul  $M$ .

În baza acestor determinări ecuațiile generale de echilibru (8.3) iau forma

$$\frac{d\bar{T}}{ds} + \bar{p} = 0 \quad \bar{T} = T\bar{\tau} \quad (8.12)$$



### 8.3 Ecuațiile de echilibru în coordonate carteziene

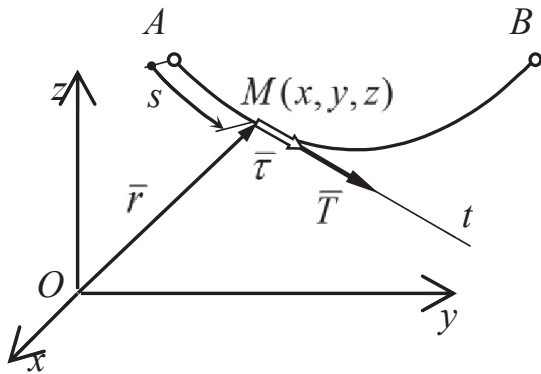


Fig.8.4

Firul, pentru care s-au stabilit ecuațiile generale de echilibru (8.12), se poate raporta la un sistem de referință cartezian  $Oxyz$  (fig.8,4), păstrând ca variabilă independentă coordonata intrinsecă  $s$ . Vectorul de poziție al punctului  $M$  este:

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} \quad (8.13)$$

în care coordonatele punctului sunt de asemenea funcții de  $s$ . Relația (8.10) pentru versorul  $\bar{\tau}$  al tangentei  $Mt$  se poate scrie:

$$\bar{\tau} = \frac{d\bar{r}}{ds} = \frac{dx}{ds}\bar{i} + \frac{dy}{ds}\bar{j} + \frac{dz}{ds}\bar{k} \quad (8.14)$$

Pornind de la cea de a doua relație (8.12) pentru tensiunea în fir se obține:

$$\bar{T} = T\bar{\tau} = \left(T \frac{dx}{ds}\right)\bar{i} + \left(T \frac{dy}{ds}\right)\bar{j} + \left(T \frac{dz}{ds}\right)\bar{k} = T_x\bar{i} + T_y\bar{j} + T_z\bar{k} \quad (8.15)$$

Termenii din paranteze reprezintă proiecțiile pe axe ale tensiunii. Forța distribuită  $\bar{p}$  poate fi exprimată și ea în funcție de proiecțiile pe axele de coordonate:

$$\bar{p} = p_x\bar{i} + p_y\bar{j} + p_z\bar{k} \quad (8.16)$$

Se prelucrează prima ecuație (8.12) și se obțin ecuațiile scalare:

$$\frac{d}{ds}\left(T \frac{dx}{ds}\right) + p_x = 0 \quad \frac{d}{ds}\left(T \frac{dy}{ds}\right) + p_y = 0 \quad \frac{d}{ds}\left(T \frac{dz}{ds}\right) + p_z = 0 \quad (8.17)$$

Acestea reprezintă un sistem de ecuații diferențiale prin integrarea căruia se poate determina atât forma firului cât și legea de variație a tensiunii din fir.

### 8.4 Ecuațiile de echilibru în triedrul Frenet

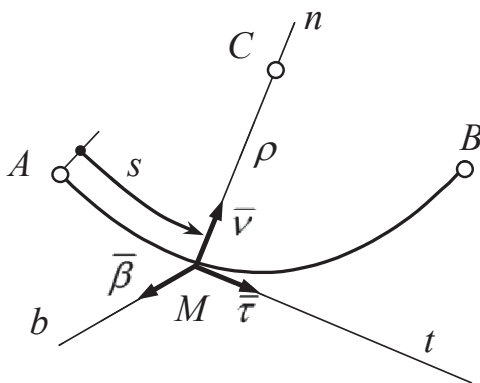


Fig.8.5

Triedrul Frenet<sup>\*)</sup> este un sistem de referință local, a cărui origine este în punctul de pe curba firului poziționat prin coordonata intrinsecă  $s = AM$  (fig.8.5). Direcțiile axelor sunt tangenta  $Mt$ , normală principală  $Mn$  și binormala  $Mb$ . Versorii acestor direcții sunt  $\bar{\tau}, \bar{v}, \bar{\beta}$ . Normală principală trece prin centrul de curbură  $C$  al curbei iar  $\rho = CM$  reprezintă raza de curbură în  $M$ . Variațiile versorilor (ca direcție) în funcție de coordonata  $s$  sunt cunoscute prin *formulele lui Frenet*.

<sup>\*)</sup> O prezentare mai detaliată se va face în partea de Cinematică.

Pentru studiul de față interesează prima formulă a lui Frenet, respectiv:

$$\frac{d\bar{\tau}}{ds} = \frac{1}{\rho} \bar{\nu} \quad (8.18)$$

Cu aceste precizări se prelucrează ecuațiile generale de echilibru (8.12):

$$\frac{d\bar{T}}{ds} = \frac{d}{ds}(T\bar{\tau}) = \frac{dT}{ds}\bar{\tau} + T\frac{d\bar{\tau}}{ds} = \frac{dT}{ds}\bar{\tau} + \frac{T}{\rho}\bar{\nu} \quad (8.19)$$

Pentru forța distribuită  $\bar{p}$  se consideră o dezvoltare analitică de forma:

$$\bar{p} = p_{\tau}\bar{\tau} + p_{\nu}\bar{\nu} + p_{\beta}\bar{\beta} \quad (8.20)$$

Se proiectează prima relație (8.12) pe direcțiile triedrului Frenet și rezultă ecuațiile scalare:

$$\frac{dT}{ds} + p_{\tau} = 0 \quad \frac{T}{\rho} + p_{\nu} = 0 \quad p_{\beta} = 0 \quad (8.21)$$

Ultima relație pune în evidență faptul că sub acțiunea forței distribuite firul se așează în așa fel încât vectorul  $\bar{p}$  să se afle în planul determinat de versorii  $\bar{\tau}$  și  $\bar{\nu}$  (planul osculator).

Se pot pune în evidență următoarele situații particulare:

a) cazul firului neîncărcat ( $p_{\tau} = p_{\nu} = 0$ ):

$$\frac{dT}{ds} = 0 \rightarrow T = const. \quad \frac{T}{\rho} = 0 \rightarrow \rho = \infty \quad (8.22)$$

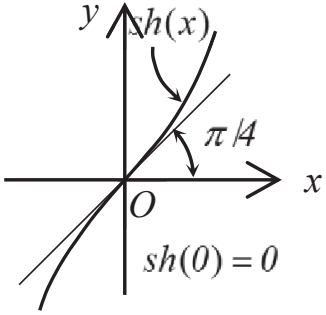
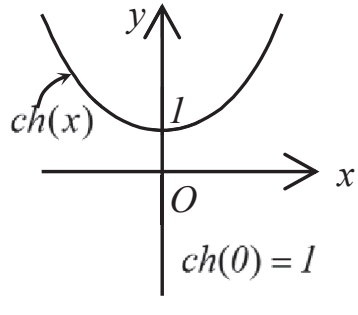
Firul este rectiliniu, tensiunea din fir este constantă.

b) cazul firului încărcat, fără frecare ( $p_{\tau} = 0$ ) –  $\bar{T} = const.$

## 8.5 Funcții hiperbolice. Relații generale.

Pentru studiul firului omogen greu se consideră utilă inserarea în cele ce urmează a unor aspecte referitoare la funcțiilor hiperbolice. Relațiile strict utile au fost grupate în tab.8.1\*).

**Tabelul 8.1**

<i>Funcții hiperbolice - reprezentări grafice</i>	
	

\*) Manualul Inginerului, vol I, Ed.Tehnică, 1965

**Tabelul 8.1 (continuare)**

<i>Relații între funcțiile hiperbolice</i>	
$\begin{cases} sh\,x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \\ ch\,x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \end{cases}$	$\begin{cases} ch\,x + sh\,x = e^x \\ ch\,x - sh\,x = e^{-x} \end{cases}$
$ch^2 x - sh^2 x = 1$	
$\begin{cases} sh(x_1 \pm x_2) = sh\,x_1 ch\,x_2 \pm ch\,x_1 sh\,x_2 \\ ch(x_1 \pm x_2) = ch\,x_1 ch\,x_2 \pm sh\,x_1 sh\,x_2 \end{cases}$	
$\begin{cases} sh\,2x = 2 sh\,x ch\,x \\ ch\,2x = ch^2 x + sh^2 x \end{cases}$	$\begin{cases} sh\,\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{ch\,x - 1}{2}} \\ ch\,\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{ch\,x + 1}{2}} \end{cases}$
$\begin{cases} sh\,x_1 + sh\,x_2 = 2 sh\,\frac{x_1 + x_2}{2} ch\,\frac{x_1 - x_2}{2} \\ sh\,x_1 - sh\,x_2 = 2 sh\,\frac{x_1 - x_2}{2} ch\,\frac{x_1 + x_2}{2} \end{cases}$	$\begin{cases} ch\,x_1 + ch\,x_2 = 2 ch\,\frac{x_1 + x_2}{2} ch\,\frac{x_1 - x_2}{2} \\ ch\,x_1 - ch\,x_2 = 2 sh\,\frac{x_1 + x_2}{2} sh\,\frac{x_1 - x_2}{2} \end{cases}$
$sh\,x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots$	$ch\,x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots$
$\frac{d}{dx}(sh\,x) = ch\,x$	$\frac{d}{dx}(ch\,x) = sh\,x$
$\frac{d}{dx}(\arg sh\,x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\frac{d}{dx}(\arg ch\,x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

**Observație:** În coordonate cu o metrică omogenă a ambelor axe, tangenta în punctul de inflexiune  $O$  face unghiul  $\pi/4$  cu direcția  $Ox$ .

## 8.6 Studiul general al firului omogen greu

Se consideră un fir acționat doar de greutatea proprie ( $p$  [N/m] = greutatea unității de lungime). Extremitatea  $A$  se află pe axa  $Oy$  iar  $B$  în planul  $Oxy$  dispus vertical (fig.8.6). Pentru sarcina distribuită  $\bar{p} = const.$  se pot scrie proiecțiile:

$$p_x = p_z = 0, \quad p_y = -p \quad (8.23)$$

Ecuțiile generale de echilibru (8.17) iau în acest caz formele:

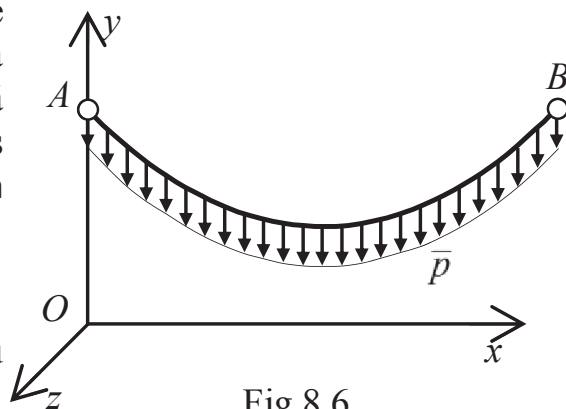


Fig.8.6

$$\frac{d}{ds} \left( T \frac{dx}{ds} \right) = 0 \quad (8.24) \quad \frac{d}{ds} \left( T \frac{dy}{ds} \right) - p = 0 \quad (8.25) \quad \frac{d}{ds} \left( T \frac{dz}{ds} \right) = 0 \quad (8.26)$$

Din ecuația (8.24) se observă că:

$$T \frac{dx}{ds} = T_x = \text{const.} = H \quad (8.27)$$

Această relație indică faptul că în orice secțiune a firului proiecția pe orizontală a tensiunii, notată prin  $H$ , este constantă (fig.8.7). În punctul cel mai de jos al firului, notat  $C$ , tangenta este orizontală și tensiunea este minimă, având chiar valoarea  $H$ . Din (8.27) se explicitează pentru calculele următoare:

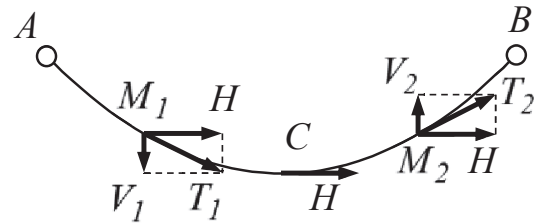


Fig.8.7

Din (8.27) se explicitează pentru calculele următoare:

$$T = H \frac{ds}{dx} \quad (8.28)$$

Se prelucrează în continuare ecuația (8.26):

$$T \frac{dz}{ds} = C_1 \rightarrow H \frac{ds}{dx} \frac{dz}{ds} = C_1 \rightarrow dz = \frac{C_1}{H} dx \rightarrow z = \frac{C_1}{H} x + C_2 \quad (8.29)$$

în care  $C_1$  și  $C_2$  sunt constante de integrare. Valorile acestora se determină din pozițiile extreme:

$$\left. \begin{array}{l} - \text{în punctul } A: \quad x=0, \quad z=0 \quad \rightarrow \quad C_1=0 \\ - \text{în punctul } B: \quad z=0 \quad \rightarrow \quad C_2=0 \end{array} \right\} \rightarrow z=0 \quad (8.30)$$

Este evident că sub acțiunea greutateii proprii toate punctele firului se vor afla în planul vertical  $Oxy$ .

Pe o porțiune elementară un arc de curbă plană se poate aproxima cu coarda (fig.8.8) și se poate scrie:

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = dx \sqrt{1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2} = dx \sqrt{1 + (y')^2} \quad (8.31)$$

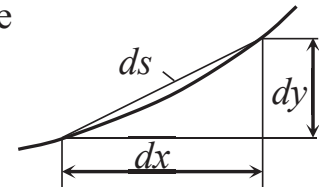


Fig.8.8

în care intervine derivata:

$$\frac{dy}{dx} = y' \quad (8.32)$$

Ecuația (8.25) se prelucrează în modul următor:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left( T \frac{dy}{ds} \right) - p = 0 &\rightarrow \frac{d}{ds} \left( H \frac{ds}{dx} \frac{dy}{ds} \right) = p \rightarrow \frac{d}{ds} \left( \frac{dy}{dx} \right) = \frac{p}{H} \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{dy'}{\sqrt{1 + (y')^2}} = \frac{p}{H} dx \end{aligned} \quad (8.33)$$

Se introduce constanta:

$$a = \frac{H}{p} = \text{const.} \quad \left[ \frac{N}{N/m} = m \right] \quad (8.34)$$

a cărei semnificație va fi evidențiată ulterior; se precizează că din punct de vedere dimensional  $a$  este o lungime.

Se procedează la integrarea ultimei relații (8.33):

$$\int \frac{dy'}{\sqrt{1+(y')^2}} = \frac{1}{a} \int dx + C_1 \rightarrow \operatorname{argsh}(y') = \frac{x}{a} + C_1 \rightarrow y' = \operatorname{sh}\left(\frac{x}{a} + C_1\right) \quad (8.35)$$

Ținând cont de rel.(8.32) se face o nouă integrare:

$$\int dy = \int \operatorname{sh}\left(\frac{x}{a} + C_1\right) dx \rightarrow y = a \operatorname{ch}\left(\frac{x}{a} + C_1\right) + C_2 \quad (8.36)$$

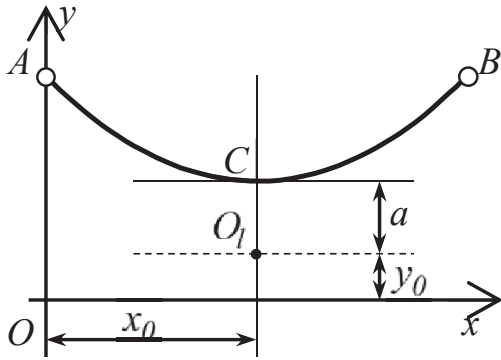


Fig.8.9

Pentru calculul constantelor de integrare  $C_1$  și  $C_2$  din relațiile (8.35) și (8.36) se pun condițiile specifice punctului  $C$  aflat în poziția cea mai de jos a firului (fig.8.9). Pe ordonata acestuia se introduce un punct auxiliar  $O_1(x_0, y_0)$  aflat la distanța  $CO_1 = a$ . Coordonatele punctului  $C$ , devin astfel:

$$\begin{cases} x_C = x_0 \\ y_C = y_0 + a \end{cases} \quad (8.37).$$

Se observă că  $C$  este un punct de minim al curbei firului și în consecință derivata este nulă în acest punct. Se introduc aceste condiții în ecuațiile menționate și se determină succesiv:

$$y'(x_C) = 0 \rightarrow \operatorname{sh}\left(\frac{x_0}{a} + C_1\right) = 0 \rightarrow \frac{x_0}{a} + C_1 = 0 \rightarrow C_1 = -\frac{x_0}{a} \quad (8.38)$$

$$y(x_C) = y_0 + a \rightarrow a \operatorname{ch}\left(\frac{x_0}{a} - \frac{x_0}{a}\right) + C_2 = y_0 + a \rightarrow C_2 = y_0 \quad (8.39)$$

Cu aceste valori ale constantelor de integrare, ecuațiile (8.35) și (8.36) devin:

$$y' = \operatorname{sh}\frac{x-x_0}{a} \quad (8.40) \quad y - y_0 = a \operatorname{ch}\frac{x-x_0}{a} \quad (8.41)$$

Forma pe care o ia un fir supus acțiunii greutății proprii, descrisă prin ecuația (8.41), poartă numele de *curbă funiculară* și este o sinusoidă hiperbolică. De cele mai multe ori însă, această curbă se raportează la un sistem de axe particularizat (fig.8.10), obținut printr-o translație de axe din  $O$  în  $O_1$ ; în acest sistem  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 0$  și ecuațiile de mai sus devin:

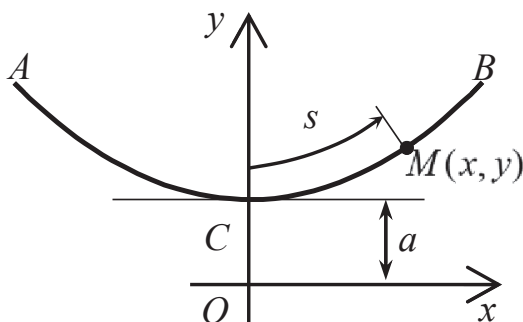


Fig.8.10

$$y' = \operatorname{sh}\frac{x}{a} \quad (8.42)$$

$$y = a \operatorname{ch}\frac{x}{a} \quad (8.43)$$

Sub această formă curba funiculară este mai cunoscută sub numele de *lănțișor*.

Lungimea  $a$ , importantă pentru poziționarea firului în acest sistem de axe,

poartă numele de *parametrul lăncișorului*. Valoarea lui este dependentă de condițiile concrete de solicitare; modul de determinare se va studia în continuare.

În noul sistem de axe coordonata intrinsecă  $s$  se măsoară față de punctul  $C$ . Lungimea unui arc de lăncișor se poate calcula în funcție de coordonate pornind de la relația (8.31):

$$s = \int_0^s ds = \int_0^x \sqrt{1 + (y')^2} dx = \int_0^x \sqrt{1 + sh^2 \frac{x}{a}} dx = \int_0^x ch \frac{x}{a} dx = a sh \frac{x}{a} \quad (8.44)$$

Legea de variație a tensiunii în fir se poate stabili pornind de la relațiile (8.28) și (8.34):

$$T = H \frac{ds}{dx} = H \frac{\sqrt{1 + (y')^2} dx}{dx} = H \sqrt{1 + sh^2 \frac{x}{a}} = H ch \frac{x}{a} = pa \cdot \frac{y}{a} = py \quad (8.45)$$

Se observă că tensiunea în fir este dependentă numai de ordonata punctului în care se face determinarea. În punctele de suspendare  $A$  și  $B$  tensiunile vor lua valorile extreme:

$$T_A = p y_A \quad T_B = p y_B \quad (8.46)$$

## 8.7 Probleme speciale în statica firelor

### 8.7.1 Firul foarte întins

Acest caz are multiple aplicații practice. Tensiunea în fir este foarte mare comparativ cu greutatea proprie iar săgeata firului este foarte mică.

Funcțiile hiperbolice care intervin în calculele din capitolul precedent pot fi dezvoltate în seriile de puteri convergente (cf.tab.8.1):

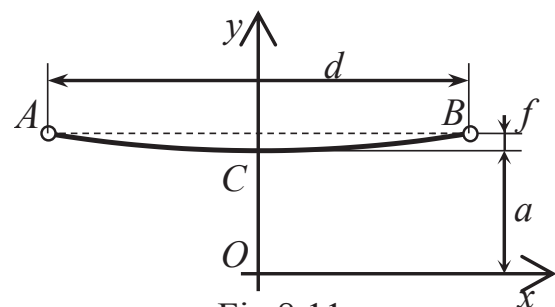


Fig.8.11

$$ch \frac{x}{a} = 1 + \frac{1}{2!} \left( \frac{x}{a} \right)^2 + \frac{1}{4!} \left( \frac{x}{a} \right)^4 + \frac{1}{6!} \left( \frac{x}{a} \right)^6 + \dots \quad (8.47)$$

$$sh \frac{x}{a} = \frac{x}{a} + \frac{1}{3!} \left( \frac{x}{a} \right)^3 + \frac{1}{5!} \left( \frac{x}{a} \right)^5 + \frac{1}{7!} \left( \frac{x}{a} \right)^7 + \dots \quad (8.48)$$

În condițiile menționate mai sus, atunci când crește tensiunea în fir și, implicit, componenta sa orizontală  $H$ , crește și valoarea parametrului  $a = H/p$ ; în același timp, argumentul  $x/a$  al funcțiilor hiperbolice de mai sus scade, astfel că ponderea termenilor de rang superior în aceste serii se diminuează. O bună aproximație se obține dacă se păstrează numai primii doi termeni ai fiecărei serii. Ecuația (8.43) devine:

$$y = a ch \frac{x}{a} = a \left( 1 + \frac{1}{2!} \frac{x^2}{a^2} \right) = a + \frac{1}{2a} x^2 \quad (8.49)$$

Analitic, această ecuație reprezintă o parabolă simetrică față de axa  $Oy$  cu punctul de minim  $C$  situat la distanța  $a$  deasupra originii. Parabola aproximează satisfăcător cosinusoida hiperbolică pe porțiunea cuprinsă între punctele de suspendare.

În unele situații se prescrie o distanță  $d$  între punctele de suspendare și o săgeată  $f$ . În funcție de aceste mărimi se pot face unele determinări. Astfel, în punctul  $B$ :

$$\left(x = \frac{d}{2}, y = a + f\right) \rightarrow a + f = a + \frac{1}{2a}x^2 \rightarrow a = \frac{d^2}{8f} \quad (8.50)$$

Arcul de lăntișor este:

$$s = a \operatorname{sh} \frac{x}{a} = a \left( \frac{x}{a} + \frac{1}{6} \frac{x^3}{a^3} \right) = x + \frac{x^3}{6a^2} = x + \frac{32}{3} \frac{f^2}{d^4} x^3 \quad (8.51)$$

Lungimea totală a firului este dublul arcului  $CB$ :

$$l = 2 \cdot s(x_B) = d + \frac{8}{3} \frac{f^2}{d} \quad (8.52)$$

Tensiunea în fir se poate determina cu relația:

$$T = py = p \left( a + \frac{1}{2a} x^2 \right) \approx pa = \frac{pd^2}{8f} \quad (8.53)$$

în care s-a suprimat un termen neglijabil. Se poate considera că tensiunea este aproximativ constantă pe toată lungimea firului.

### 8.7.2 Firul cu lungime impusă

Se consideră un fir omogen cu lungimea  $l$  și greutatea  $p$  pe unitatea de lungime, care se suspendă la extremități; între cele două puncte de suspendare  $A$  și  $B$  există o distanță  $d$  pe orizontală și o diferență de nivel  $h$  pe verticală. În funcție de aceste mărimi se studiază caracteristicile de așezare și de solicitare ale firului.

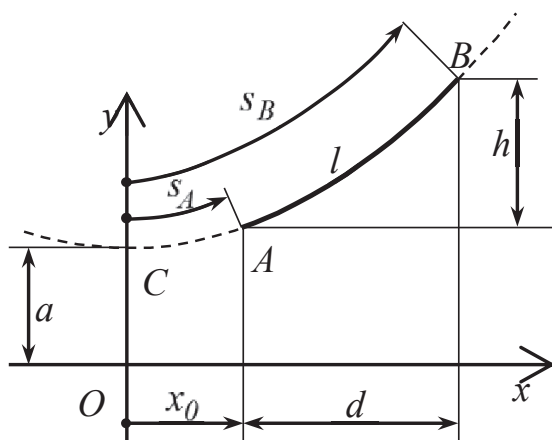


Fig.8.12

Firul suspendat între punctele  $A$  și  $B$  constituie o porțiune dintr-un lăntișor, curbă a cărei definiție în raport cu aceste puncte este precizată prin parametrul  $a$  și coordonata  $x_0$  (fig.8.12). Pentru determinarea acestora se pornește de la relațiile generale (8.43) și (8.44):

$$\begin{cases} l = s_B - s_A = a \operatorname{sh} \frac{x_B}{a} - a \operatorname{sh} \frac{x_A}{a} \\ h = y_B - y_A = a \operatorname{ch} \frac{x_B}{a} - a \operatorname{ch} \frac{x_A}{a} \end{cases} \quad (8.54)$$

Cu observația că  $x_A = x_0$  și  $x_B = x_0 + d$  și ținând cont de relațiile între funcțiile hiperbolice date în tab.8.1, se mai poate scrie:

$$\begin{cases} l = 2a \operatorname{sh} \frac{x_B - x_A}{2a} \operatorname{ch} \frac{x_B + x_A}{2a} = 2a \operatorname{sh} \frac{d}{2a} \operatorname{ch} \frac{2x_0 + d}{2a} \\ h = 2a \operatorname{sh} \frac{x_B - x_A}{2a} \operatorname{sh} \frac{x_B + x_A}{2a} = 2a \operatorname{sh} \frac{d}{2a} \operatorname{sh} \frac{2x_0 + d}{2a} \end{cases} \quad (8.55)$$

a) parametrul lănțișorului ( $a$ )

Se prelucrează sistemul (8.55) în modul următor:

$$\begin{aligned} \frac{l^2 - h^2}{4a^2} &= \operatorname{sh}^2 \frac{d}{2a} \cdot \left( \operatorname{ch}^2 \frac{2x_0 + d}{2a} - \operatorname{sh}^2 \frac{2x_0 + d}{2a} \right) = \operatorname{sh}^2 \frac{d}{2a} \rightarrow \\ &\rightarrow \operatorname{sh} \frac{d}{2a} = \frac{\sqrt{l^2 - h^2}}{2a} \end{aligned} \quad (8.56)$$

Ecuția transcendentă astfel obținută conține drept unică necunoscută parametrul  $a$  al lănțișorului; explicitarea lui din această ecuație nu este însă posibilă. Pentru rezolvare se pune această ecuație sub forma

$$\operatorname{sh} \frac{d}{2a} = \frac{\sqrt{l^2 - h^2}}{d} \cdot \frac{d}{2a} \quad (8.57)$$

și se introduc notațiile auxiliare:

$$\frac{d}{2a} = x^* \quad \frac{\sqrt{l^2 - h^2}}{d} = m \quad (8.58)$$

Ecuția ia forma simplificată:

$$\operatorname{sh} x^* = mx^* \quad (8.59)$$

Variabila intermediară adimensională  $x^*$  corespunde abscisei punctului de intersecție al ramurii pozitive a unei sinusoide hiperbolice  $y_1$  cu o dreaptă  $y_2$  ce trece prin origine într-un sistem de axe  $Oxy$  particular (fig.8.13); intersecția ramurii negative cu dreapta respectivă nu are sens fizic deoarece  $a > 0$ . În funcție de valorile pentru  $d, h, l$  pot exista situațiile:

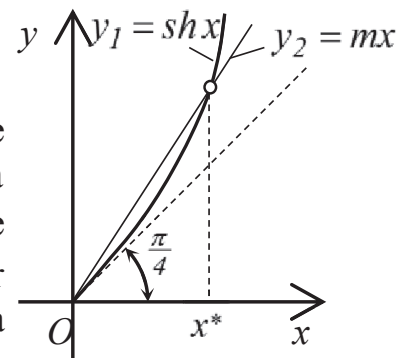


Fig.8.13

1)  $l > \sqrt{d^2 + h^2}$ ,  $m > 1$  – firul este mai lung decât distanța dintre punctele de suspendare, soluția există,  $x^* > 0$ ,  $a > 0$ ;

2)  $l = \sqrt{d^2 + h^2}$ ,  $m = 1$  – dreapta  $y_2$  este tangenta în  $O$  la sinusoida hiperbolică  $y_1$ ; rezultă  $x^* = 0$  și  $a = \infty$ ; teoretic firul are forma dreptei care unește punctele de suspendare;

3)  $l < \sqrt{d^2 + h^2}$ ,  $m < 1$  – firul este prea scurt față de distanța dintre  $A$  și  $B$ , nu există o soluție reală.

Un prim procedeu pentru calcularea valorilor numerice  $x^*$  și  $a$  în funcție de datele  $d, h, l$ , constă în interpolarea funcțiilor  $y_1$  și  $y_2$ . Se calculează aceste funcții pentru valori succesive atribuite variabilei  $x$  (fig.8.13) pornind de la 0, cu



un pas de variație  $\Delta x$  convenabil ales, până când  $|y_2 - y_1| \leq \varepsilon$ , unde  $\varepsilon$  reprezintă o eroare admisibilă. Algoritmul propus pentru efectuarea acestei operațiuni este dat în tab.8.2.

**Tabelul 8.2**

<i>Inițializări</i>	<i>Iterații</i>	<i>Finale</i>
$m = \sqrt{l^2 - h^2} / d$	$x \leftarrow x + \Delta x$	$x^* = x$
$m \leq 1? \rightarrow stop$	$y_1 = sh x = (e^x - e^{-x})/2$	$a = d/2x^*$
$x = 0$	$y_2 = mx$	
$\Delta x = \dots$	$\Delta y = y_2 - y_1$	
$\varepsilon = \dots$	$\Delta y < 0? \Rightarrow \Delta x \leftarrow \Delta x/2$	
	$ \Delta y  \leq \varepsilon? \rightarrow exit$	

*Observație:* Se remarcă înjumătățirea pasului de variație  $\Delta x$  la apropierea de soluție.

Un al doilea procedeu constă în rezolvarea pe cale analitică a ecuației (8.59) în care se înlocuiește funcția  $sh x^*$  prin primii trei termeni ai dezvoltării ei în serie de puteri (tab.8.1):

$$x^* + \frac{1}{3!}(x^*)^3 + \frac{1}{5!}(x^*)^5 = mx^* \quad (8.60)$$

Cu observația că pentru o soluție reală  $x^* > 0$  și  $m > 1$ , după simplificare se obține ecuația bipătrată:

$$(x^*)^4 + 20(x^*)^2 - 120(m-1) = 0 \quad (8.61)$$

cu soluția unică:

$$x^* = \sqrt{-10 + \sqrt{100 + 120(m-1)}} \quad (8.62)$$

care confirmă și analiza făcută mai sus referitor la raportul între lungimea firului și distanța dintre punctele de suspendare. Neglijarea termenilor de rang superior din seria funcției  $sh x^*$  nu afectează precizia determinării.

În continuare parametrul lănișorului se calculează cu relația:

$$a = \frac{d}{2x^*} \quad (8.63)$$

Valoarea parametrului  $a$  este cu atât mai mare cu cât firul este mai întins.

*b) distanța față de origine ( $x_0$ )*

Se pornește de la ecuațiile (8.55) care se prelucrează astfel:

$$l + h = 2a sh \frac{d}{2a} \left( ch \frac{2x_0 + d}{2a} + sh \frac{2x_0 + d}{2a} \right) = \sqrt{l^2 - h^2} \cdot e^{\frac{2x_0 + d}{2a}} \quad (8.64)$$

în care s-a ținut cont de rel.(8.56) și de tab.8.1.

Din această relație se explicitează după logaritmare:

$$x_0 = \frac{a}{2} \cdot \ln \frac{l+h}{l-h} - \frac{d}{2} \quad (8.65)$$

Prin coordonata  $x_0$  și parametrul  $a$  se poziționează sistemul de coordonate specific în care este definit firul ca lănișor. Se poate observa cu ușurință că, în cazul unui fir întins, punctul de minim  $C$  se află în afara punctelor de suspendare  $A$  și  $B$ ; la un fir relaxat punctul  $C$  se află între acestea. Dacă punctele de suspendare se află la același nivel,  $h=0$  și rezultă  $x_0 = -d/2$ ; curba firului este în acest caz simetrică față de  $Oy$ .

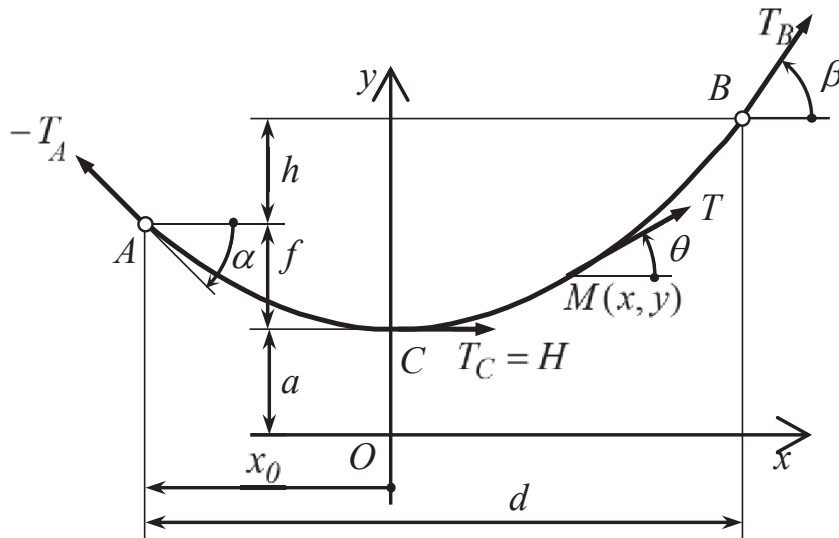


Fig.8.14

c) săgeata firului ( $f$ )

Distanța pe verticală între punctele  $C$  și  $A$  (fig.8.14) se calculează cu relația

$$f = a \operatorname{ch} \frac{x_0}{a} - a \quad (8.66)$$

În cazul firului simetric ( $h=0, x_0 = -d/2$ ) se obține:

$$f = a \sqrt{1 + sh^2 \frac{d}{2a}} - a = \frac{1}{2} \sqrt{4a^2 + l^2} - a \quad (8.67)$$

d) direcția tangentei la fir ( $\theta$ )

Într-un punct  $M(x,y)$  tensiunea acționează după direcția tangentei la curba lănișorului; panta acesteia este dată de derivata de ordinul I, respectiv:

$$\operatorname{tg} \theta = y'_x = sh \frac{x}{a} = \frac{s}{a} \quad (8.68)$$

în care  $s$  este arcul de lănișor  $CM$  definit în rel.(8.44). Se pot exprima în continuare și funcțiile:

$$\cos \theta = \frac{l}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \theta}} = \frac{l}{\sqrt{1 + sh^2 \frac{x}{a}}} = \frac{l}{\operatorname{ch} \frac{x}{a}} = \frac{a}{y} \quad \sin \theta = \frac{\operatorname{tg} \theta}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \theta}} = \frac{sh \frac{x}{a}}{\operatorname{ch} \frac{x}{a}} = \frac{s}{y} \quad (8.69)$$

În punctele de suspendare unghiurile de poziție ale tangentelor se calculează cu relațiile:

$$\operatorname{tg} \alpha = sh \frac{x_0}{a} \quad \operatorname{tg} \beta = sh \frac{x_0 + d}{a} \quad (8.70)$$

Pentru firul simetric ( $h = 0, x_0 = -d/2$ ) se obține:

$$\operatorname{tg} \alpha = sh \left( -\frac{d}{2a} \right) = -sh \left( \frac{d}{2a} \right) = -\frac{l}{2a} \quad \operatorname{tg} \beta = sh \left( \frac{d}{2a} \right) = \frac{l}{2a} \quad (8.71)$$

fiind evidentă egalitatea  $|\alpha| = |\beta|$ .

#### e) Tensiunea în fir ( $T$ )

Valoarea efectivă a tensiunii într-o secțiune  $M(x, y)$  se calculează cu relația generală (8.45), respectiv  $T = py$ . La extremitățile firului tensiunile vor fi:

$$T_A = py_A = p(a + f) \quad T_B = py_B = p(a + f + h) \quad (8.72)$$

în care  $f$  este săgeata firului calculată în (8.67). În cazul firului simetric:

$$T_A = T_B = p(a + f) = \frac{1}{2} p \sqrt{4a^2 + l^2} \quad (8.73)$$

Tensiunea minimă în fir apare în punctul  $C$  al firului și, așa cum s-a demonstrat anterior, este egală cu proiecția pe orizontală a tensiunii  $T$  în orice punct:

$$T_C = H = T \cos \theta = py \cdot \frac{a}{y} = pa \quad (8.74)$$

### 8.7.3 Firul cu sarcină adițională fixă

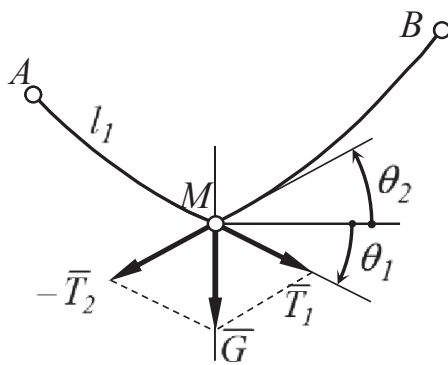


Fig.8.15

Se consideră un fir suspendat la extremități pentru care se cunosc datele  $p, l, d, h$  specificate în capitoul precedent. Într-un punct  $M$  al firului, aflat la distanța  $AM = l_1$  (măsurată pe fir), se atârna o greutate  $G$  (fig.8.15).

Este evident că fiecare din cele două ramuri ale firului, respectiv  $AM$  și  $MB$ , sunt arce de lanțisor. Tangentele în punctul  $M$  fac unghiurile orientate  $\theta_1$  și  $\theta_2$  cu orizontala (în fig.8.15  $\theta_1 < 0$ ). Dacă se descompune greutatea

$G$  după aceste direcții, componentele obținute vor fi egale cu tensiunile din ramurile respective. Respectând convenția de semn pentru tensiuni, suma vectorială  $\vec{G} = \vec{T}_1 + (-\vec{T}_2)$  se proiectează pe orizontală și verticală prin ecuațiile:

$$\begin{cases} T_1 \cos \theta_1 - T_2 \cos \theta_2 = 0 \\ T_1 \sin \theta_1 - T_2 \sin \theta_2 = -G \end{cases} \quad (8.75)$$

Presupunând pentru început că ramurile  $AM$  și  $MB$  ar aparține unor curbe funiculare diferite și cu observația că  $T \cos \theta = H = pa$ , prima dintre aceste relații se mai poate scrie:

$$H_1 - H_2 = pa_1 - pa_2 = p(a_1 - a_2) = 0 \quad (8.76)$$

Această relație este posibilă numai dacă  $a_1 = a_2 = a$ , fapt care demonstrează că cele două ramuri aparțin aceleiași curbe funiculare, fără a fi însă vecine. Punctului  $M$  îi vor corespunde astfel două puncte pe această curbă, respectiv  $M_1$  și  $M_2$  (fig.8.16). Cu precizarea că, așa cum s-a arătat mai înainte,  $T = py$  și  $\sin \theta = s/y$ , cea de a doua relație (8.75) devine:

$$py_1 \cdot \frac{s_1}{y_1} - py_2 \cdot \frac{s_2}{y_2} = -G \quad (8.77)$$

în care  $s_1$  și  $s_2$  sunt arcele de lănișor corespunzătoare punctelor  $M_1$  și  $M_2$  iar  $y_1$  și  $y_2$  ordonatele acestora. Se obține în continuare:

$$s_2 - s_1 = \frac{G}{p} \quad (8.78)$$

Se observă că în fig.8.16  $s_1 < 0$ .

Relația (8.78) pune în evidență faptul că între segmentele reale  $AM_1$  și  $BM_2$  ale curbei lănișorului se intercalează un segment fictiv  $M_1M_2$  a cărui lungime este proporțională cu mărimea sarcinii concentrate  $G$ ; punctele de suspendare  $A$  și  $B$  sunt "expulzate" lateral pe lănișor. Se poate constata cu ușurință că majorarea sau micșorarea acestei forțe determină îndepărtarea sau apropierea segmentelor reale pe lănișorul menționat.

În continuare, studiul detaliat al firului se poate face pe baza metodele și relațiile expuse în capitolul precedent, cu observațiile că parametrul  $a$  al lănișorului are aceeași valoare cu cel din cazul firului neîncărcat cu sarcina concentrată adițională și că  $d_1 + d_2 = d$ .

### 8.7.4 Firul cu sarcină adițională mobilă

Particularitatea acestui caz provine din faptul că sarcina adițională este aplicată firului printr-o rolă care se poate deplasa în lungul acestuia. Considerând neglijabilă lungimea segmentului de fir aflat în contact cu rola, problema poate fi studiată în condițiile capitolului precedent.

În ipoteza absenței frecării dintre rolă și fir, tensiunile la capetele segmentului și, implicit, tensiunile din cele două ramuri ale firului în punctul  $M$  în care se află rola, trebuie să fie egale, respectiv  $T_1 = T_2 = T$  (fig.8.17). Prelucrând în această ipoteză ecuațiile (8.75) și ținând cont de rel. (8.69), se determină:

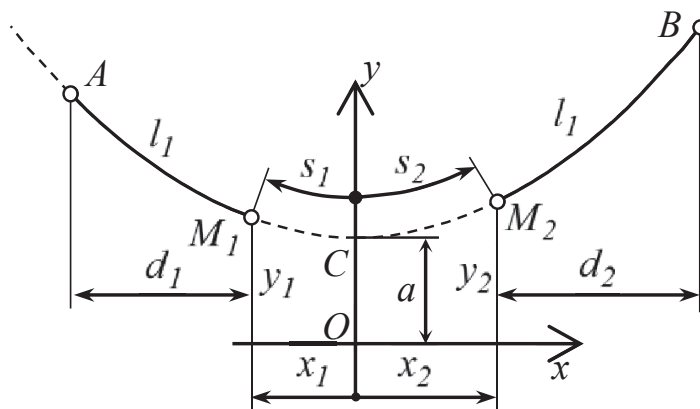


Fig.8.16

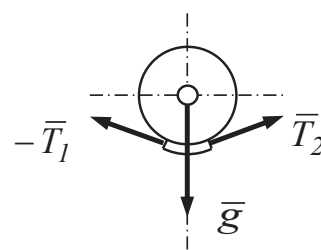


Fig.8.17

$$\cos\theta_1 = \cos\theta_2 \rightarrow y_1 = y_2 \quad (8.79)$$

Aceasta arată că punctele  $M_1$  și  $M_2$  (fig.8.18) au aceeași ordonată pe curba lăntișorului și, în consecință,  $CM_1 = CM_2$ . Din relația (8.78) se deduce în continuare:

$$|s_1| = |s_2| = \frac{G}{2p} \quad (8.80)$$

Studiul detaliat al firului se poate face și în acest caz pornind de la relațiile de calcul stabilite în capitolele precedente. Sunt de pus în evidență câteva observații:

– echilibrul este posibil în situația în care firul este relaxat, respectiv atunci când în stare neîncărcată punctul de minim  $C$  al lăntișorului se află între punctele de suspendare  $A$  și  $B$ ;

– poziția de echilibru a rolei este pe verticala punctului de minim  $C$  din starea neîncărcată.

Pentru a realiza un echilibru și în alte poziții decât cea menționată ca și pentru deplasarea uniformă în lungul cablului sunt necesare forțe suplimentare aplicate direct rolei. Problema prezintă importanță pentru instalațiile de transport pe cablu.

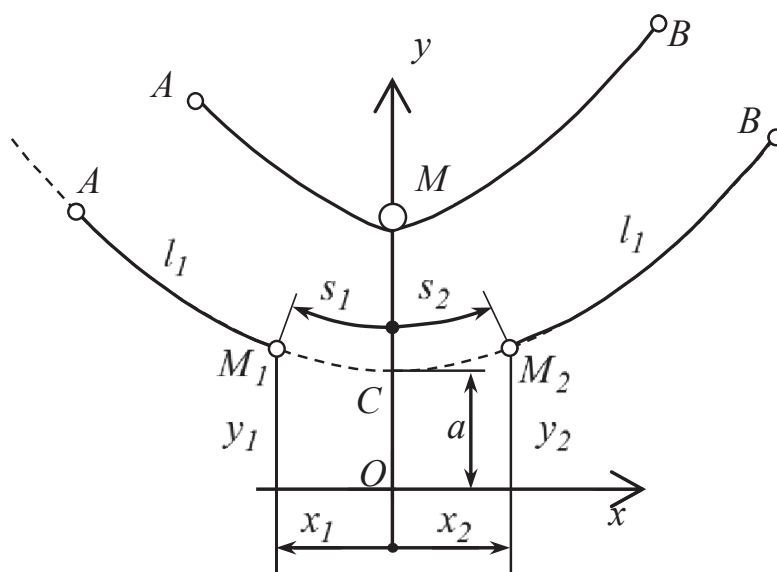


Fig.8.18