

---

 NICULAE MANAFI

# BAZELE MECANICII APLICATE

## PARTEA III-a CINEMATICA CONȚINUTUL

<b>9. CINEMATICA PUNCTULUI MATERIAL</b> .....	137
9.1 Generalități.....	137
9.1.1 Parametrii cinematici generali.....	137
9.1.2 Parametrii cinematici unghiulari .....	139
9.2 Parametrii cinematici ai mișcării în diferite sisteme de coordonate ....	140
9.2.1 Coordonate carteziene.....	140
9.2.2 Coordonate polare.....	143
9.2.3 Coordonate cilindrice.....	147
9.2.4 Coordonate sferice.....	148
9.2.5 Coordonate intrinseci (Frenet).....	151
9.3 Mișcări particulare ale punctului material .....	155
9.3.1 Mișcarea rectilinie .....	155
9.3.2 Mișcarea circulară.....	156
9.3.3 Mișcarea uniformă pe elicea circulară .....	158
9.3.4 Mișcarea oscilatorie armonică.....	159
<b>10. CINEMATICA SOLIDULUI RIGID</b> .....	161
10.1 Generalități.....	161
10.2 Parametrii cinematici ai mișcării solidului rigid.....	163
10.3 Mișcări particulare simple ale solidului rigid.....	166
10.3.1 Mișcarea de translație .....	166
10.3.2 Mișcarea de rotație.....	167
10.3.3 Mișcarea elicoidală .....	170
10.4 Mișcarea plan-paralelă.....	172
10.4.1 Caracteristici generale ale mișcării .....	172
10.4.2 Puncte speciale în planul mișcării.....	174
10.4.3 Studiul vectorial al vitezelor și accelerațiilor .....	180
10.4.4 Metode grafo-analitice .....	182
10.4.5 Metoda analitică .....	191
10.5 Mișcarea corpului cu un punct fix .....	198
<b>11. MIȘCĂRI COMPUSE</b> .....	201
11.1 Generalități.....	201
11.2 Mișcări compuse ale punctului material .....	202
11.2.1 Studiul vectorial și matriceal al parametrilor cinematici.....	202
11.2.2 Metoda analitică .....	209

---

11.3	Mișcări compuse ale solidului rigid .....	215
11.3.1	Definirea mișcărilor .....	215
11.3.2	Parametrii cinematici în cazul general .....	215
11.3.3	Parametri unghiulari ai mișcării absolute .....	217
11.4	Mișcări compuse particulare .....	218
11.4.1	Compuneri de translații .....	218
11.4.2	Compuneri de rotații paralele .....	219
11.4.3	Compuneri de rotații concurente .....	220
<b>12.</b>	<b>CINEMATICA SISTEMELOR DE CORPURI .....</b>	<b>222</b>
12.1	Generalități .....	222
12.2	Transmisii mecanice simple .....	223
12.3	Transmisii complexe prin fire .....	225
12.4	Mecanisme uzuale simple .....	228
12.4.1	Mecanismul bielă-manivelă .....	228
12.4.2	Mecanismul patrulater articulată .....	230
12.4.3	Mecanismul cu culisă oscilantă .....	235
12.4.4	Mecanism cu lanț cinematic deschis .....	236

## Partea III-a CINEMATICA

### 9. CINEMATICA PUNCTULUI MATERIAL

#### 9.1 Generalități

##### 9.1.1 Parametrii cinematici generali

Caracterizarea mișcării unui punct material se face de regulă printr-un grup de mărimi fizice reunite sub denumirea generală de *parametri cinematici*. Aceștia sunt *poziția, viteza și accelerația*.

a) *Poziția* la un moment dat a unui punct material  $M$  se indică în raport cu un reper  $O$  (fig.9.1) printr-un *vector de poziție*

$$\vec{r} = \overline{OM} = \vec{r}(t) \quad (9.1)$$

Acesta este o funcție de timpul  $t$  continuă, uniformă și derivabilă de cel puțin două ori. Locul geometric al pozițiilor succesive ocupate de punct în timpul mișcării reprezintă *traectoria* de deplasare.

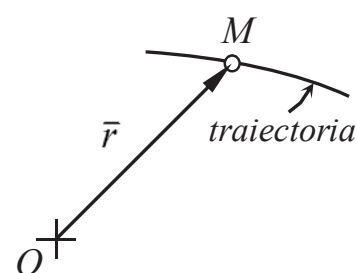


Fig.9.1

Relația vectorială (9.1) se poate proiecta în diferite sisteme de coordonate; ecuațiile scalare astfel obținute, în care  $t$  este variabila independentă, reprezintă *ecuațiile parametrice* ale traiectoriei. În sistemul de coordonate carteziene, de exemplu, ele vor fi de forma:

$$x = x(t) \quad y = y(t) \quad z = z(t) \quad (9.2)$$

Prin eliminarea variabilei  $t$  între ecuațiile parametrice se obține *ecuațiile analitice* ale traiectoriei. În cazul unei traiectorii conținute într-un plan, de exemplu în  $xOy$ , se va găsi o singură ecuație de forma  $f(x,y)=0$  corespunzătoare unei curbe în acest plan. O traiectorie tridimensională va fi descrisă prin două ecuații,  $f_1(x,y,z)=0$  și  $f_2(x,y,z)=0$ , respectiv prin curba de intersecție a suprafețelor în spațiu definite prin aceste relații.

Pe orice traiectorie poziția la un moment dat a punctului  $M$  poate fi indicată și printr-o *coordonată intrinsecă*, mărime scalară, reprezentând lungimea porțiunii din traiectorie măsurată față de un punct de referință  $M_0$  (fig.9.2):

$$s = M_0M = s(t) \quad (9.3)$$

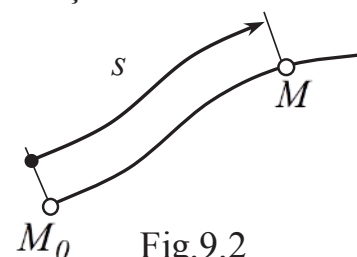


Fig.9.2

Această relație este numită și *ecuația orară* a traiectoriei. Coordonata intrinsecă  $s$  poate servi în unele demonstrații drept variabilă intermediară.

b) *Viteza* este o mărime fizică vectorială care indică modul în care variază în raport cu timpul poziția unui punct material pe traiectorie, respectiv vectorul de poziție  $\vec{r}$ . Pe o traiectorie ( $T$ ) (fig.9.3) un punct material se deplasează din  $M$  în  $M_1$  într-un interval de timp  $\Delta t$ , parcurgând arcul de curbă  $MM_1 = \Delta s$ .

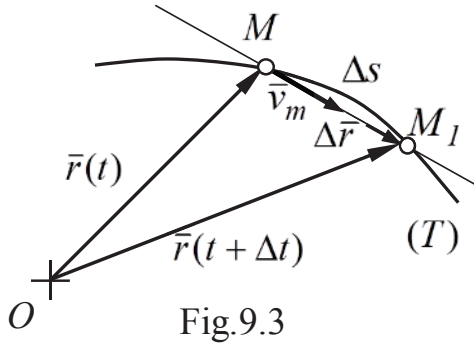


Fig.9.3

Variația vectorului de poziție este  $\overline{MM_1} = \Delta\vec{r}$ .  
Viteza medie a deplasării este

$$\bar{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \quad (9.4)$$

(T) Vectorul  $\bar{v}_m$  este coliniar și de același sens cu  $\Delta\vec{r}$ . Se poate defini viteza instantanee în poziția  $M$  ca limită a acestui raport atunci când durata deplasării tinde către 0. Astfel:

$$\bar{v} = \bar{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} \quad (9.5)$$

Viteza instantanee se exprimă prin derivata de ordinul întâi în raport cu timpul a vectorului de poziție. Trebuie făcută precizarea că în Mecanică derivatele în raport cu timpul efectuate asupra mărimilor vectoriale sau scalare se notează prin unul sau două puncte așezate deasupra simbolului respectiv.

Relația (9.5) se mai poate prelucra și în modul următor:

$$\bar{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta\vec{r}}{|\Delta\vec{r}|} \cdot \frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta s} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t} \right) = \underbrace{\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}}{|\Delta\vec{r}|}}_{\vec{\tau}} \cdot \underbrace{\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta s}}_1 \cdot \underbrace{\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}}_{\frac{ds}{dt} = \dot{s}} = \dot{s} \vec{\tau} \quad (9.6)$$

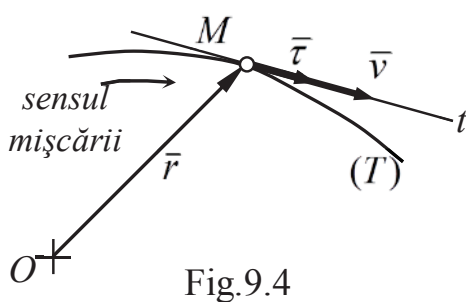


Fig.9.4

În această relație  $\vec{\tau}$  este versorul tangentei  $Mt$  la traiectoria (T) (fig.9.4) iar  $\dot{s} > 0$  dacă coordonata intrinsecă crește. Relația (9.6) demonstrează faptul că viteza  $\bar{v}$  este întotdeauna tangentă la traiectorie iar sensul ei coincide cu sensul de efectuare a mișcării.

a) *Accelerația* este de asemenea o mărime fizică vectorială care indică modul în care variază în raport cu timpul viteza  $\bar{v}$  a punctului material. Ca și în cazul vitezei se exprimă o *accelerația medie* sub forma:

$$\bar{a}_m = \frac{\Delta\bar{v}}{\Delta t} \quad (9.7)$$

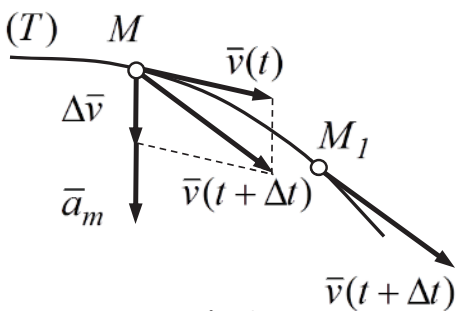


Fig.9.5

în care  $\Delta\bar{v} = \bar{v}(t + \Delta t) - \bar{v}(t)$  este variația vectorului vitezei la trecerea din  $M$  în  $M_1$  (fig.9.5).

*Accelerația instantanee* în punctul  $M$  se determină prin calcularea limitei raportului din această relație atunci când  $\Delta t$  tinde către 0.

$$\bar{a} = \bar{a}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\bar{v}}{\Delta t} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \dot{\bar{v}} \quad (9.8)$$

sau, ținând cont de definiția vitezei,

$$\bar{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}} \quad (9.9)$$

Accelerația este deci prima derivată a vitezei în raport cu timpul și cea de a doua derivată a vectorului de poziție în raport cu același parametru.

Se descompune accelerația după direcțiile tangentei și normalei în  $M$  la curba traiectoriei (fig.9.6):

$$\bar{a} = \bar{a}_t + \bar{a}_n \quad (9.10)$$

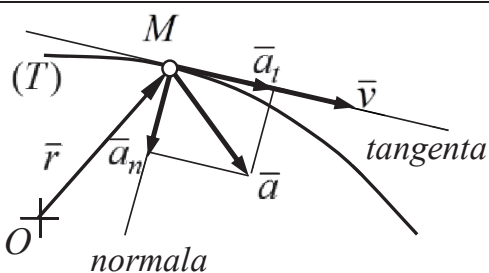


Fig.9.6

Componenta tangențială  $\bar{a}_t$  exprimă variația vitezei ca mărime; dacă are același sens cu  $\bar{v}$ , mărimea vitezei crește. Componenta normală  $\bar{a}_n$  caracterizează variația direcției vectorului vitezei; ea se află întotdeauna în interiorul curburii traiectoriei. Vectorul accelerației  $\bar{a}$  se va afla în consecință de aceeași parte cu curba traiectoriei față de tangentă.

### 9.1.2 Parametrii cinematici unghiulari

Pe lângă parametrii cinematici menționați mai înainte, mărimi vectoriale, în mișcarea plană intervin și niște mărimi scalare grupate sub denumirea generală de *parametri unghiulari*. Aceștia sunt *unghiul de poziție*, *viteza unghiulară* și *accelerația unghiulară*. Pentru simbolizarea acestor mărimi se utilizează de obicei literele grecești. Relațiile dintre parametri unghiulari sunt similare celor dintre parametrii vectoriali studiați. în capitolul precedent.

a) *Unghiul de poziție* este făcut de o dreaptă mobilă, de exemplu raza  $OM$  (fig.9.7), cu o direcție de referință fixă care este de obicei axa  $Ox$  sau o paralelă la aceasta. Unghiul de poziție este un unghi orientat, măsurându-se de la direcția de referință la cea mobilă și se consideră pozitiv dacă sensul lui coincide cu sensul trigonometric. Ca și vectorul de poziție el este o funcție de timpul  $t$  continuă, uniformă și derivabilă de cel puțin două ori:

$$\theta = \theta(t) \quad (9.11)$$

b) *Viteza unghiulară* descrie modul de variație în raport cu timpul al unghiului de poziție. Pornind de la o *viteză unghiulară medie*:

$$\omega_m = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \quad (9.12)$$

în care  $\Delta\theta$  este variația unghiului de poziție la trecerea din  $M$  în  $M_1$ , se exprimă *viteza unghiulară instantanee* în poziția  $M$  (fig.9.8):

$$\omega = \omega(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \quad (9.13)$$

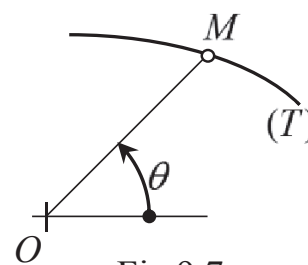


Fig.9.7

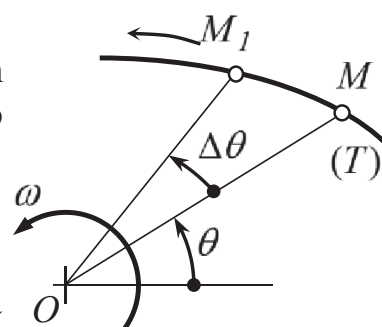


Fig.9.8

Viteza unghiulară se reprezintă grafic printr-o săgeată curbă în jurul vârfului unghiului de poziție, în cazul de față punctul  $O$ . Sensul vitezei unghiulare corespunde sensului de rotație al razei  $OM$ , respectiv sensului de deplasare al punctului  $M$  pe traiectorie. Ea este pozitivă dacă are sensul trigonometric.

c) *Accelerația unghiulară* caracterizează modul de variație al vitezei unghiulare în raport cu timpul. Pentru o variație  $\Delta\omega$  a vitezei unghiulare (fig.9.9), *accelerația unghiulară medie*:

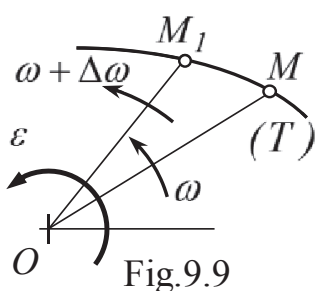


Fig.9.9

$$\varepsilon_m = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \quad (9.14)$$

conduce la obținerea *accelerației unghiulare instantanee* în poziția  $M$ :

$$\varepsilon = \varepsilon(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} \quad (9.15)$$

Ținând cont și de definiția vitezei unghiulare,

$$\varepsilon = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \ddot{\theta} \quad (9.16)$$

Și accelerația unghiulară se reprezintă printr-o săgeată curbă în jurul vârfului unghiului de poziție. Ea este pozitivă dacă are sensul trigonometric. Dacă  $\omega$  și  $\varepsilon$  au același sens, rotația este accelerată.

## 9.2 Parametrii cinematici ai mișcării în diferite sisteme de coordonate

### 9.2.1 Coordonate carteziene

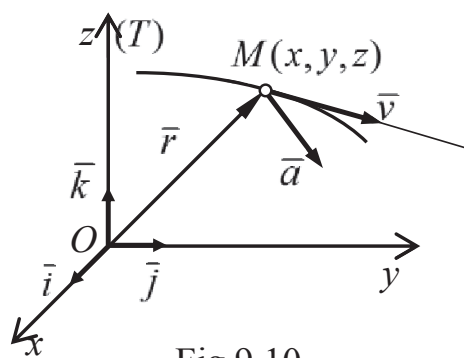


Fig.9.10

În sistemul de coordonate carteziene (fig.9.10) vectorul de poziție al unui punct  $M$  de pe traiectorie este de forma:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad (9.17)$$

Sistemul de referință  $Oxyz$  este fix și versorii  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  sunt constanți; în consecință numai coordonatele sunt funcțiile de timp

$$x = x(t) \quad y = y(t) \quad z = z(t) \quad (9.18)$$

Modulul vectorului de poziție este:

$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (9.19)$$

Viteza punctului  $M$  are expresia analitică:

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k} \quad (9.20)$$

Prin derivarea în raport cu timpul a vectorului de poziție se obține:

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} \quad (9.21)$$

și rezultă proiecțiile vitezei pe axele de coordonate:

$$v_x = \dot{x} \quad v_y = \dot{y} \quad v_z = \dot{z} \quad (9.22)$$

Modulul vitezei se calculează cu relația:

$$|\bar{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \quad (9.23)$$

Expresia analitică a accelerației punctului  $M$  are forma:

$$\bar{a} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k} \quad (9.24)$$

Se derivează viteza și se obține:

$$\bar{a} = \dot{\bar{v}} = \dot{\bar{r}} = \dot{v}_x \bar{i} + \dot{v}_y \bar{j} + \dot{v}_z \bar{k} = \ddot{x} \bar{i} + \ddot{y} \bar{j} + \ddot{z} \bar{k} \quad (9.25)$$

Proiecțiile pe axele de coordonate ale accelerației vor fi:

$$\begin{cases} a_x = \dot{v}_x = \ddot{x} \\ a_y = \dot{v}_y = \ddot{y} \\ a_z = \dot{v}_z = \ddot{z} \end{cases} \quad (9.26)$$

Modulul accelerației se va calcula cu relația:

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \quad (9.27)$$

În cazul particular al unei mișcări plane, raportată de obicei la un sistem de axe  $Oxy$  (fig 9.11), relațiile de mai sus capătă o formă simplificată:

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} \quad |\bar{r}| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (9.28)$$

$$\bar{v} = v_x \bar{i} + v_y \bar{j} \quad |\bar{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad \operatorname{tg} \alpha = v_y / v_x \quad (9.29)$$

$$\bar{a} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j} \quad |\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \quad \operatorname{tg} \beta = a_y / a_x \quad (9.30)$$

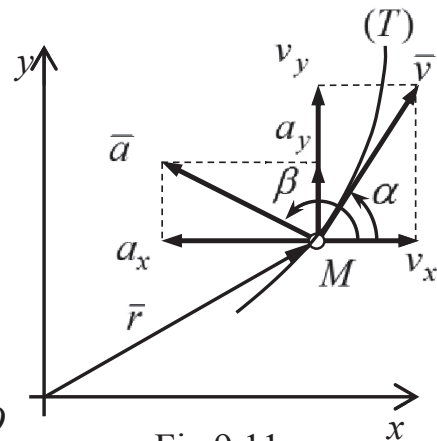


Fig.9.11

**Problema 9.1** O bară în formă de L se reazemă cu extremitățile sale  $A$  și  $B$  pe două suprafețe fixe (fig.9.12). Punctul  $A$  este deplasat cu o viteză constantă pe orizontală. Se cere să se studieze mișcarea punctului  $C$ .

**Date:**  $AB = 2l$ ,  $AC = l$ ,  $|\bar{v}_A| = v = \text{const}$ .

**Cerute:**  $\bar{r}_C$ ,  $\bar{v}_C$ ,  $\bar{a}_C$

**Rezolvare:** Toți parametrii cinematici sunt variabili în raport cu timpul prin intermediul unghiului de poziție al barei  $\alpha = \alpha(t)$ . Pentru punctul  $A$  se poate scrie:

$$\bar{r}_A \begin{cases} x = 2l \sin \alpha \\ y = 0 \end{cases} \quad \bar{v}_A \begin{cases} v_x = 2l \cos \alpha \cdot \dot{\alpha} = v \\ v_y = 0 \end{cases} \quad (9.31)$$

de unde rezultă:

$$\dot{\alpha} = \frac{v}{2l \cos \alpha} \quad (9.32)$$

Pentru punctul  $C$  se calculează coordonatele poziției din care rezultă traiectoria prin eliminarea lui  $\alpha$ :

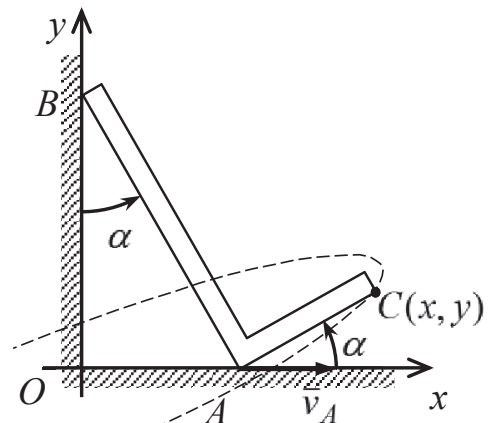


Fig.9.12

$$\bar{r}_C \begin{cases} x = 2l \sin \alpha + l \cos \alpha \\ y = l \sin \alpha \end{cases} \rightarrow x^2 + 5y^2 - 4xy - l^2 = 0 \quad (9.33)$$

Traectoria este un arc dintr-o elipsă cu centrul în  $O$  și cu semiaxe oblice. În continuare

$$\bar{v}_C \begin{cases} v_x = 2l \cos \alpha \cdot \dot{\alpha} - l \sin \alpha \cdot \dot{\alpha} = v - \frac{l}{2} v \cdot \operatorname{tg} \alpha \\ v_y = l \cos \alpha \cdot \dot{\alpha} = \frac{l}{2} v \end{cases} \quad (9.34)$$

$$\bar{a}_C \begin{cases} a_x = -\frac{l}{2} v \cdot \frac{1}{\cos^2 \alpha} \cdot \dot{\alpha} = -\frac{v^2}{4l \cos^3 \alpha} \\ a_y = 0 \end{cases} \quad (9.34')$$

**Problema 9.2** La mecanismul din fig.9.13 bara  $AB$  are o mișcare de rotație cunoscută; se cere să se determine poziția, viteza și accelerația culisei  $C$  sub forma unui algoritm de calcul.

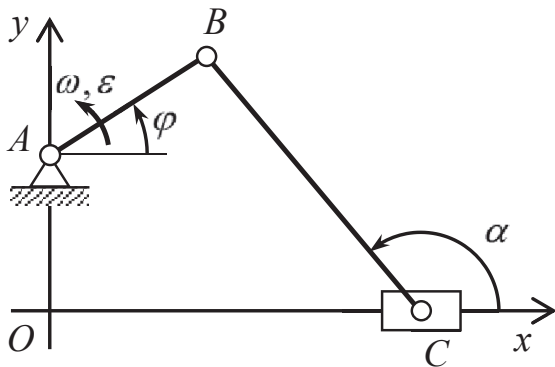


Fig.9.13

Date:  $OA = h$ ,  $AB = r$ ,  $BC = l$

$$\varphi = \varphi(t), \dot{\varphi} = \omega, \ddot{\varphi} = \varepsilon$$

Cerute:  $x_C, v_C, a_C$

Rezolvare: Pentru poziția culisei se poate scrie ecuația vectorială:

$$\bar{r}_C = \overline{OC} = \overline{OA} + \overline{AB} - \overline{CB} \quad (9.35)$$

care se proiectează pe axe prin ecuațiile:

$$\begin{cases} x_C = r \cos \varphi - l \cos \alpha \\ 0 = h + r \sin \varphi - l \sin \alpha \end{cases} \quad (9.36)$$

Din cea de a doua ecuație se determină:

$$\sin \alpha = \frac{h + r \sin \varphi}{l} \quad (9.37)$$

Dacă se derivatează succesiv această ecuație în raport cu timpul se obțin derivatele unghiului  $\alpha$ :

$$\cos \alpha \cdot \dot{\alpha} = \frac{r}{l} \cos \varphi \cdot \dot{\varphi} \rightarrow \dot{\alpha} \quad (9.38)$$

$$-\sin \alpha \cdot \dot{\alpha}^2 + \cos \alpha \cdot \ddot{\alpha} = \frac{r}{l} (-\sin \varphi \cdot \dot{\varphi}^2 + \cos \varphi \cdot \ddot{\varphi}) \rightarrow \ddot{\alpha} \quad (9.39)$$

Viteza și accelerația punctului  $C$  se obțin derivând în raport cu timpul prima din ecuațiile (9.36):

$$v_C = \dot{x}_C = -r \sin \varphi \cdot \dot{\varphi} + l \sin \alpha \cdot \dot{\alpha} \quad (9.40)$$

$$a_C = \ddot{x}_C = -r \cos \varphi \cdot \dot{\varphi}^2 - r \sin \varphi \cdot \ddot{\varphi} + l \cos \alpha \cdot \dot{\alpha}^2 + l \sin \alpha \cdot \ddot{\alpha}$$

Relațiile de calcul în funcție de datele problemei sunt grupate în algoritmul din tab.9.1.



Tabelul 9.1

Nr.	Relația	Observații
1	$\sin \alpha = \frac{h + r \sin \alpha}{l}$	
2	$\cos \alpha = -\sqrt{l - \sin^2 \alpha}$	$\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}$
3	$\dot{\alpha} = \frac{r \cos \varphi}{l \cos \alpha} \omega$	
4	$\ddot{\alpha} = \frac{l}{\cos \alpha} \left[ \frac{r}{l} (-\sin \varphi \cdot \omega^2 + \cos \varphi \cdot \varepsilon) + \sin \alpha \cdot \dot{\alpha}^2 \right]$	
5	$x_C = r \cos \varphi - l \cos \alpha$	
6	$v_C = -r \omega \sin \varphi + l \dot{\alpha} \sin \alpha$	
7	$a_C = -r \omega^2 \cos \varphi - r \varepsilon \sin \varphi + l \dot{\alpha}^2 \cos \alpha + l \ddot{\alpha} \sin \alpha$	

### 9.2.2 Coordonate polare

Acest sistem de coordonate, utilizat numai în cazul unor traiectorii plane, este compus din lungimea razei vectoriale și unghiul orientat pe care aceasta îl face cu o direcție de referință fixă (fig.9.14):

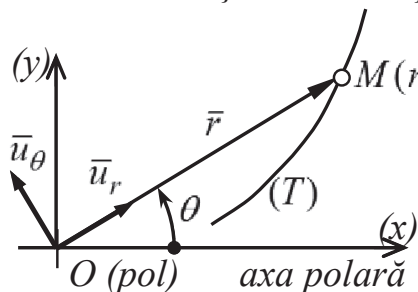


Fig.9.14

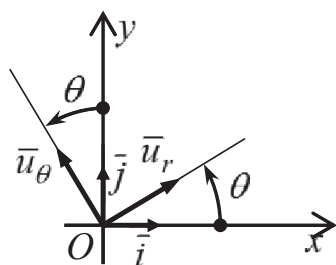


Fig.9.15

$$r = r(t) = OM \quad \theta = \theta(t) \quad (9.35)$$

Dacă se asociază coordonatelor polare un sistem cartezian cu  $Ox$  drept axă polară, există relațiile de transformare:

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta \quad (9.36)$$

ca și cele inverse:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x} \quad (9.37)$$

Versorul  $\bar{u}_r$  are direcția și sensul razei vectoriale iar  $\bar{u}_\theta$  este perpendicular pe aceasta în sensul unghiului  $\theta$ . În sistemul  $Oxy$  asociat (fig.9.15) ei au expresiile:

$$\begin{cases} \bar{u}_r = \cos \theta \bar{i} + \sin \theta \bar{j} \\ \bar{u}_\theta = -\sin \theta \bar{i} + \cos \theta \bar{j} \end{cases} \quad (9.38)$$

Versorii sunt funcții de timp prin intermediul lui  $\theta$ , astfel că:

$$\begin{cases} \dot{\bar{u}}_r = -\sin \theta \cdot \dot{\theta} \bar{i} + \cos \theta \cdot \dot{\theta} \bar{j} = \dot{\theta} \bar{u}_\theta \\ \dot{\bar{u}}_\theta = -\cos \theta \cdot \dot{\theta} \bar{i} - \sin \theta \cdot \dot{\theta} \bar{j} = -\dot{\theta} \bar{u}_r \end{cases} \quad (9.39)$$

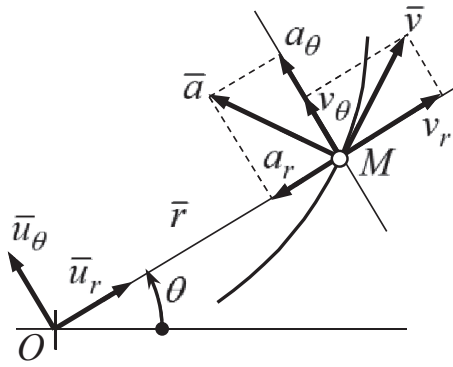


Fig.9.16

Parametrii cinematici ai mișcării punctului  $M$  se pot exprima în funcție de proiecțiile lor pe direcțiile definite de versorii  $\bar{u}_r$  și  $\bar{u}_\theta$  (fig.9.16) prin expresiile analitice:

$$\begin{cases} \bar{r} = r\bar{u}_r \\ \bar{v} = v_r\bar{u}_r + v_\theta\bar{u}_\theta \\ \bar{a} = a_r\bar{u}_r + a_\theta\bar{u}_\theta \end{cases} \quad (9.40)$$

Prin derivare în raport cu timpul se obține pentru viteză și accelerație:

$$\bar{v} = \dot{\bar{r}} = \dot{r}\bar{u}_r + r\dot{\bar{u}}_r = \dot{r}\bar{u}_r + r\dot{\theta}\bar{u}_\theta \quad (9.41)$$

$$\bar{a} = \dot{\bar{v}} = \ddot{r}\bar{u}_r + \dot{r}\dot{\bar{u}}_r + \dot{r}\dot{\theta}\bar{u}_\theta + r\ddot{\theta}\bar{u}_\theta + r\dot{\theta}\dot{\bar{u}}_\theta = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\bar{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\bar{u}_\theta \quad (9.42)$$

Proiecțiile vitezei și accelerației în funcție de coordonatele polare sunt:

$$\begin{cases} v_r = \dot{r} \\ v_\theta = r\dot{\theta} \end{cases} \quad (9.43)$$

$$\begin{cases} a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \end{cases} \quad (9.44)$$

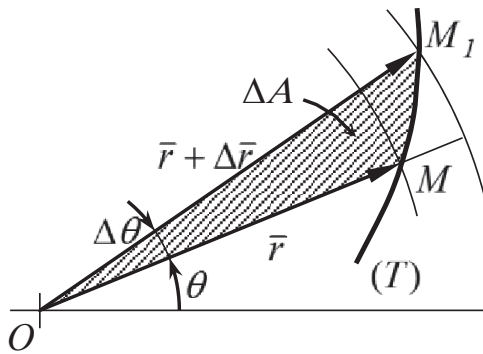


Fig.9.17

În unele aplicații interesează niște parametri cinematici speciali, respectiv *viteza și accelerația areolară*, care exprimă variația în raport cu timpul a ariei acoperite de raza vectoare  $\bar{r} = \overline{OM}$  (fig.9.17) în timpul mișcării punctului material pe traiectorie. Pentru un interval de timp  $\Delta t$  foarte mic, aria  $\Delta A$  poate fi încadrată între două sectoare circulare de raze  $OM$  și  $OM_1$ , asimilabile unor triunghiuri isoscele:

$$\frac{1}{2}r^2\Delta\theta < \Delta A < \frac{1}{2}(r + \Delta r)^2\Delta\theta \quad (9.45)$$

Această relație poate fi prelucrată prin calcularea limitelor fiecărui termen atunci când  $\Delta t \rightarrow 0$ ; simultan și  $\Delta r \rightarrow 0$ .

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{r^2\Delta\theta}{2\Delta t} < \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} < \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(r + \Delta r)^2\Delta\theta}{2\Delta t} \quad (9.46)$$

$$\frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt} < \frac{dA}{dt} = \dot{A} = \Omega < \frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt}$$

Ambele limite exterioare sunt egale și în consecință viteza areolară  $\Omega$  va fi:

$$\Omega = \frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} \quad (9.47)$$

Se mai observă că:

$$\begin{cases} \bar{r} = r\bar{u}_r \\ \bar{v} = \dot{\bar{r}} = \dot{r}\bar{u}_r + r\dot{\theta}\bar{u}_\theta \end{cases} \rightarrow \bar{r} \times \bar{v} = r\dot{r}(\bar{u}_r \times \bar{u}_r) + r^2\dot{\theta}(\bar{u}_r \times \bar{u}_\theta) = r^2\dot{\theta}\bar{n} \quad (9.48)$$

unde  $\bar{n}$  este un versor perpendicular pe  $\bar{u}_r$  și  $\bar{u}_\theta$ .

Rezultă că viteza areolară se mai poate scrie:

$$\Omega = \frac{1}{2} |\bar{r} \times \bar{v}| \quad (9.49)$$

Accelerația areolară se obține derivând această relație în raport cu timpul:

$$\Gamma = \dot{\Omega} = \frac{1}{2} |\dot{\bar{r}} \times \bar{v}| + \frac{1}{2} |\bar{r} \times \dot{\bar{v}}| = \frac{1}{2} |\bar{r} \times \bar{a}| \quad (9.50)$$

**Problema 9.3** Un punct material  $M$  se deplasează pe o curbă pornind dintr-o poziție inițială  $M_0$  (fig.9.18). Să se calculeze viteza și accelerația punctului la un moment  $t$  oarecare.

**Date:** Ecuațiile parametrice ale curbei:

$$\begin{aligned} r &= r_0 + at & \theta &= \theta_0 + bt \quad (9.51) \\ (a, b &= \text{const.}) \end{aligned}$$

**Cerute:** Traectoria, viteza  $\bar{v}$ , accelerația  $\bar{a}$ .

**Rezolvare:** Ecuația analitică a traiectoriei se obține eliminând timpul între ecuațiile parametrice:

$$r = r_0 + \frac{a}{b}(\theta - \theta_0) \quad (9.52)$$

Se recunoaște ecuația spiralei lui Arhimede în coordonate polare. Din relațiile (9.43) rezultă proiecțiile vitezei pe direcțiile  $\bar{u}_r$  și  $\bar{u}_\theta$  și modulul acesteia:

$$\begin{cases} v_r = \dot{r} = a \\ v_\theta = r\dot{\theta} = rb = b(r_0 + at) \end{cases} \rightarrow |\bar{v}| = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2} = \sqrt{a^2 + b^2(r_0 + at)^2} \quad (9.53)$$

și, în continuare, din (9.44), cele ale accelerației:

$$\begin{cases} a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -rb^2 = -b^2(r_0 + at) \\ a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 2ab \end{cases} \rightarrow \quad (9.54)$$

$$\rightarrow |\bar{a}| = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2} = \sqrt{b^4(r_0 + at)^2 + 4a^2b^2}$$

**Problema 9.4** Un punct material  $M$  se deplasează pe o traiectorie eliptică cu viteză areolară constantă pornind din poziția  $A$  aflată pe semiaxa mare a acesteia (fig.9.19). Cunoscând viteza inițială, să se calculeze vitezele în celelalte puncte extreme precum și durata de parcurgere a întregii traiectorii.

**Date:**  $OA = a$ ,  $OB = b$  – semiaxele elipsei;

$|\bar{v}_A| = v_0$  – viteza inițială.

**Cerute:**  $|\bar{v}_B|$ ,  $|\bar{v}_C|$ ,  $|\bar{v}_D|$

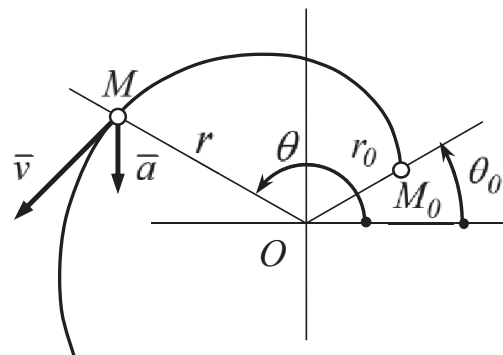


Fig.9.18

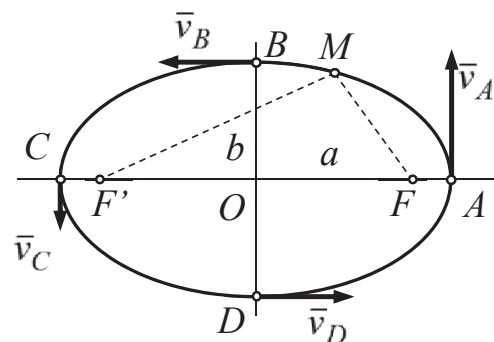


Fig.9.19

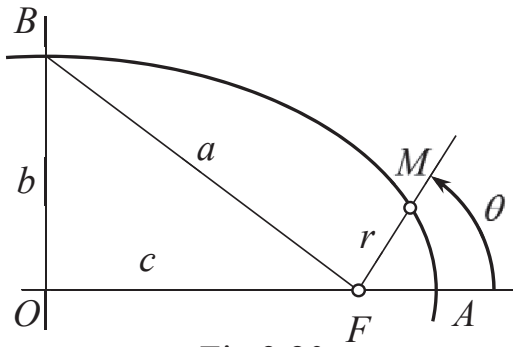


Fig.9.20

Rezolvare: Din geometria elipsei se cunoaște că pentru orice punct  $M$  aparținând acesteia suma distanțelor la două puncte fixe  $F$  și  $F'$ , numite *focare*, este constantă. Poziționând mai întâi punctul  $M$  în  $A$  și apoi în  $B$ , se determină:

$$MF + MF' = 2a \quad BF = a \quad (9.55)$$

Rezultă că distanța dintre centrul geometric  $O$  al elipsei și focarul  $F$  (fig.9.20) este:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} \quad (9.56)$$

Focarul se află întotdeauna pe semiaxa mare a elipsei și deci  $a > b$ .

Se cunoaște deasemenea că elipsa face parte din familia de curbe plane numite *conice*. Ecuația generală a unei conice în coordonate polare (cu polul în focarul  $F$  și axa polară suprapusă axei de simetrie a acesteia) este de forma:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta} \quad (9.57)$$

în care apar constantele  $p$  – parametrul conicei și  $e$  – excentricitatea conicei. În această ecuație tipul conicei este definit prin valoarea excentricității ( $e = 0$  pentru *cerc*,  $0 < e < 1$  pentru *elipsă*,  $e = 1$  pentru *parabolă* și  $e > 1$  pentru *hiperbolă*). În cazul elipsei excentricitatea se definește prin relația:

$$e = \frac{OF}{OA} = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \quad (9.58)$$

Parametrul  $p$  se determină prelucrând relația (9.57) pentru coordonatele polare ale punctului  $A$  ( $\theta = 0$ ,  $r = a - c$ ); se obține în final:

$$p = a(1 - e^2) = \frac{b^2}{a} \quad (9.59)$$

Viteza areolară a punctului  $M$  se calculează din relația (9.49) pusă sub forma:

$$\Omega = \frac{1}{2} |\vec{r} \times \vec{v}| = \frac{1}{2} |\vec{r}| |\vec{v}| \sin \alpha = \text{const.} \quad (9.60)$$

în care  $\alpha \in (0, \pi)$  este unghiul dintre direcțiile vectorilor  $\vec{r}$  și  $\vec{v}$ . În punctul de lansare  $A$   $|\vec{r}_A| = a - c$ ,  $|\vec{v}_A| = v_0$ ,  $\alpha = \pi/2$ ; în consecință:

$$\Omega = \frac{1}{2} v_0 (a - c) = \text{const.} \quad (9.61)$$

În punctul  $B$ , aflat pe semiaxa mică,  $|\vec{r}_B| = FB = a$  iar  $\alpha = \pi - \theta$ .

$$\Omega = \frac{1}{2} |\vec{r}_B| |\vec{v}_B| \sin(\pi - \theta) = \frac{1}{2} a |\vec{v}_B| \frac{b}{a} = \frac{1}{2} b |\vec{v}_B| \quad (9.62)$$

Echivalând cu (9.61) se obține viteza în punctul  $B$ :

$$|\vec{v}_B| = \frac{a - c}{b} v_0 \quad (9.63)$$

Se observă că, din motive de simetrie,  $|\bar{v}_D| = |\bar{v}_B|$ . În punctul  $C$ , aflat la cealaltă extremitate a semiaxei mari,  $|\bar{r}_C| = FC = a + c$  și  $\alpha = \pi/2$ . Procedând în mod analog se calculează:

$$|\bar{v}_C| = \frac{a-c}{a+c} v_0 \quad (9.64)$$

Aria totală a unei elipse în funcție de valorile semiaxelor este  $A = \pi ab$  (rel.4.62). Timpul de parcurgere al traiectoriei eliptice se poate calcula, în cazul unei viteze areolare constante, cu relația:

$$T = \frac{A}{\Omega} = \frac{2\pi ab}{v_0(a-c)} \quad (9.65)$$

### 9.2.3 Coordonate cilindrice

Sistemul de coordonate cilindrice reprezintă o extindere în spațiu a coordonatelor polare prin combinarea acestora cu un sistem cartezian  $Oxyz$  (fig.9.21); direcțiile definite prin versorii  $\bar{u}_r$  și  $\bar{u}_\theta$  se află în planul  $Oxy$  în care de obicei  $Ox$  servește drept axă polară. Trajectoriei reale ( $T$ ) din spațiu îi corespunde curba plană ( $T'$ ) ale cărei puncte sunt poziționate prin coordonatele polare descrise în capitolul precedent. Grupul de coordonate cilindrice pentru un punct  $M$  este alcătuit din variabilele:

$$r = OM' = r(t), \quad \theta = \theta(t), \quad z = M'M = z(t) \quad (9.66)$$

Parametrii cinematici ai acestuia sunt:

$$\begin{cases} \bar{r} = r\bar{u}_r + z\bar{k} \\ \bar{v} = \dot{\bar{r}} = v_r\bar{u}_r + v_\theta\bar{u}_\theta + v_z\bar{k} \\ \bar{a} = \dot{\bar{v}} = a_r\bar{u}_r + a_\theta\bar{u}_\theta + a_z\bar{k} \end{cases} \quad (9.67)$$

Pentru viteza și accelerația punctului  $M$  proiecțiile pe direcțiile definite de cei trei versori sunt:

$$\begin{cases} v_r = \dot{r} \\ v_\theta = r\dot{\theta} \\ v_z = \dot{z} \end{cases} \quad (9.68) \quad \begin{cases} a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \\ a_z = \ddot{z} \end{cases} \quad (9.69)$$

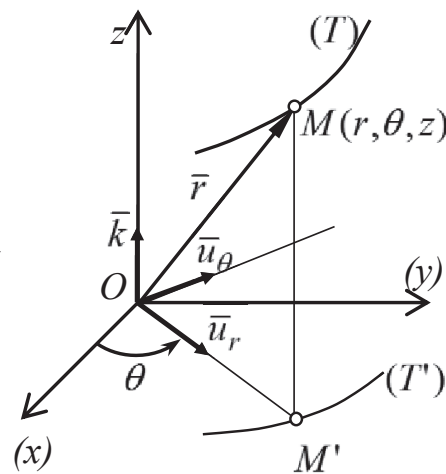


Fig.9.21

**Problema 9.5** Un punct material  $M$  se deplasează pe o traiectorie în spațiu dată prin ecuațiile sale parametrice în coordonate cilindrice, pornind dintr-o poziție inițială aflată în planul  $Oxy$  (fig.9.22). Se cere să se identifice forma geometrică a traiectoriei precum și parametrii cinematici într-o poziție oarecare.

Date: Poziția inițială –  $M_0(r_0, \theta_0, 0)$ ,

Ecuțiile parametrice ale traiectoriei:

$$r = r_0 + at \quad \theta = \theta_0 + bt \quad z = ct \quad (a, b, c - \text{constante}). \quad (9.70)$$

Cerute: Ecuțiile analitice ale traiectoriei,  $|\bar{v}|$ ,  $|\bar{a}|$

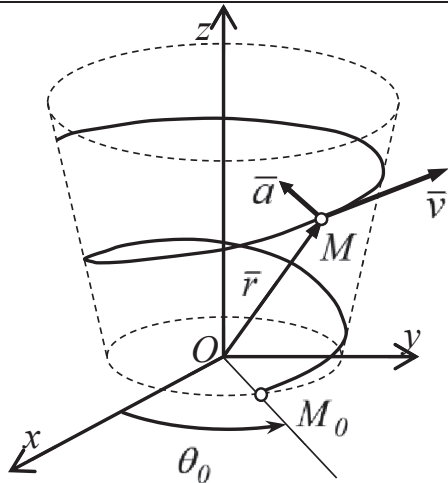


Fig.9.22

**Rezolvare:** Forma traiectoriei este obținută prin eliminarea timpului între ecuațiile parametrice de mai sus:

$$r = r_0 + \frac{a}{b}(\theta - \theta_0) \quad z = \frac{c}{a}(r - r_0) \quad (9.71)$$

Prima ecuație reprezintă o suprafață riglată, generată de o dreaptă paralelă cu  $Oz$  care se sprijină pe o spirală arhimedică aflată în planul orizontal; cea de a doua este o suprafață conică obținută prin rotirea completă a unei drepte concurentă cu  $Oz$ , în jurul acesteia. Traiectoria, rezultată prin intersecția acestor suprafețe, este în

consecință o spirală înfășurată pe o suprafață conică. Se calculează în continuare viteza:

$$\begin{cases} v_r = a \\ v_\theta = b(r_0 + at) \\ v_z = c \end{cases} \rightarrow |\bar{v}| = \sqrt{a^2 + b^2(r_0 + at)^2 + c^2} \quad (9.72)$$

și accelerația:

$$\begin{cases} a_r = -b^2(r_0 + at) \\ a_\theta = 2ab \\ a_z = 0 \end{cases} \rightarrow |\bar{a}| = b \sqrt{b^2(r_0 + at)^2 + 4a^2} \quad (9.73)$$

#### 9.2.4 Cordonate sferice

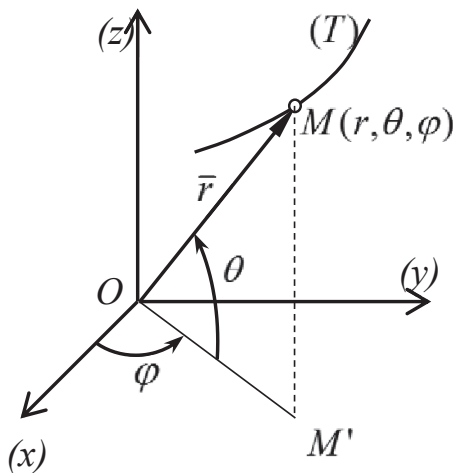


Fig.9.23

Sistemul de coordonate sferice este compus din lungimea razei vectoriale și din două unghiuri de poziționare a acesteia față de o direcție fixă dintr-un plan de referință.

$$r = OM = r(t) \quad \theta = \theta(t) \quad \varphi = \varphi(t) \quad (9.74)$$

De obicei coordonatele sferice sunt corelate cu un sistem de coordonate carteziane, alegându-se  $Oxy$  ca plan de referință; unghiul orientat  $\varphi$  se măsoară de la axa  $Ox$  la proiecția  $OM'$  a razei vectoriale pe planul  $Oxy$  iar unghiul orientat  $\theta$  se măsoară de la această proiecție la raza vectoriale (fig.9.23)\*).

Între coordonatele celor două sisteme există relațiile:

$$x = r \cos\theta \cos\varphi \quad y = r \cos\theta \sin\varphi \quad z = r \sin\theta \quad (9.75)$$

precum și cele inverse:

\*) În unele tratări teoretice unghiul  $\theta$  se măsoară de la axa  $Oz$  la raza vectoriale.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x} \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (9.76)$$

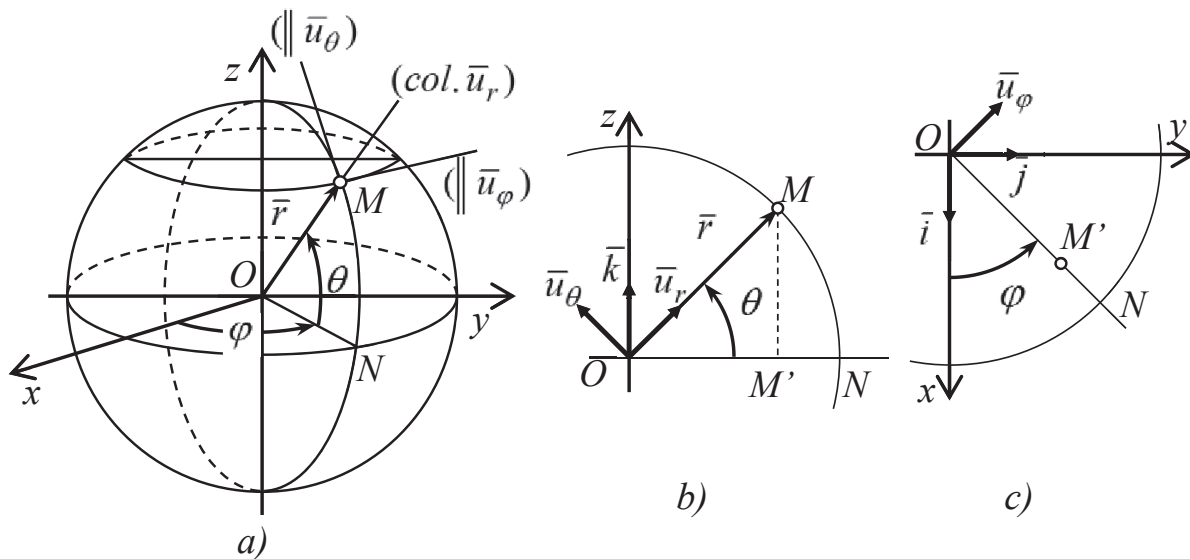


Fig.9.24

Raportat la o sferă virtuală de rază  $OM$  (fig.9.24, a), sistemul de coordonate sferice poate fi tratat ca o asociere a două sisteme de coordonate polare aflate în plane diametrale perpendiculare unul pe celălalt, respectiv planul de referință fix  $xOy$  și planul mobil  $zON$  care conține punctul  $M$ . Triedrul de versori specifici sistemului este alcătuit din  $\bar{u}_r$  – pe direcția razei vectoriale  $OM$ ,  $\bar{u}_\theta$  – perpendicular pe raza vectoriale în planul mobil  $zON$  în sensul unghiului  $\theta$  (fig.9.24, b) și  $\bar{u}_\varphi$  – perpendicular pe plan în sensul unghiului  $\varphi$  (fig.9.24, c). Acești versori sunt variabili în raport cu timpul ca direcție; pornind de la expresiile lor vectoriale în sistemul cartezian asociat se calculează:

$$\begin{cases} \bar{u}_r = \cos\theta \cos\varphi \bar{i} + \cos\theta \sin\varphi \bar{j} + \sin\theta \bar{k} \\ \bar{u}_\theta = -\sin\theta \cos\varphi \bar{i} - \sin\theta \sin\varphi \bar{j} + \cos\theta \bar{k} \\ \bar{u}_\varphi = -\sin\varphi \bar{i} + \cos\varphi \bar{j} \end{cases} \quad (9.77)$$

și derivatele în raport cu timpul:

$$\begin{cases} \dot{\bar{u}}_r = \dot{\theta} \bar{u}_\theta + \dot{\varphi} \cos\theta \bar{u}_\varphi \\ \dot{\bar{u}}_\theta = -\dot{\theta} \bar{u}_r - \dot{\varphi} \sin\theta \bar{u}_\varphi \\ \dot{\bar{u}}_\varphi = -\dot{\varphi} \cos\theta \bar{u}_r + \dot{\varphi} \sin\theta \bar{u}_\theta \end{cases} \quad (9.78)$$

Expresiile generale ale parametrilor cinematici sunt:

$$\begin{cases} \bar{r} = r\bar{u}_r \\ \bar{v} = v_r \bar{u}_r + v_\theta \bar{u}_\theta + v_\varphi \bar{u}_\varphi \\ \bar{a} = a_r \bar{u}_r + a_\theta \bar{u}_\theta + a_\varphi \bar{u}_\varphi \end{cases} \quad (9.79)$$

Pentru viteză și accelerație se fac operațiunile de derivare specifice:

$$\bar{v} = \dot{\bar{r}} = \dot{r}\bar{u}_r + r\dot{\bar{u}}_r = \dot{r}\bar{u}_r + r\dot{\theta}\bar{u}_\theta + r\dot{\phi}\cos\theta\bar{u}_\varphi \quad (9.80)$$

$$\begin{aligned} \bar{a} = \dot{\bar{v}} &= \ddot{r}\bar{u}_r + \dot{r}\dot{\bar{u}}_r + \dot{r}\dot{\theta}\bar{u}_\theta + r\ddot{\theta}\bar{u}_\theta + r\dot{\theta}\dot{\bar{u}}_\theta + \dot{r}\dot{\phi}\cos\theta\bar{u}_\varphi + \\ &+ r\dot{\phi}\cos\theta\bar{u}_\varphi - r\dot{\phi}\dot{\theta}\sin\theta\bar{u}_\varphi + r\dot{\phi}\cos\theta\dot{\bar{u}}_\varphi = \\ &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2\cos^2\theta)\bar{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} + r\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta)\bar{u}_\theta + \\ &+ (r\dot{\phi}\cos\theta + 2\dot{r}\dot{\phi}\cos\theta - 2r\dot{\phi}\dot{\theta}\sin\theta)\bar{u}_\varphi \end{aligned} \quad (9.81)$$

S-au determinat astfel proiecțiile vitezei și accelerației pe direcțiile versorilor menționați, respectiv:

$$\begin{cases} v_r = \dot{r} \\ v_\theta = r\dot{\theta} \\ v_\varphi = r\dot{\phi}\cos\theta \end{cases} \quad (9.82)$$

$$\begin{cases} a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2\cos^2\theta \\ a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} + r\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta \\ a_\varphi = r\dot{\phi}\cos\theta + 2\dot{r}\dot{\phi}\cos\theta - 2r\dot{\phi}\dot{\theta}\sin\theta \end{cases} \quad (9.83)$$

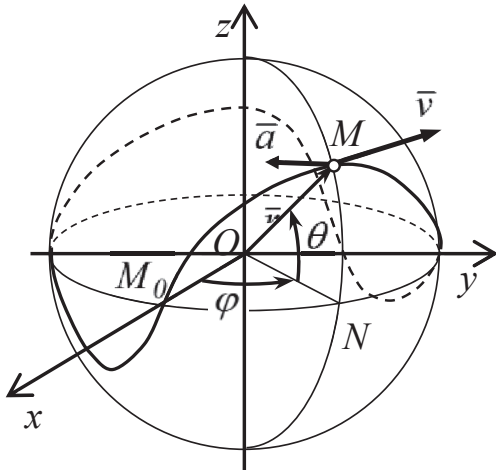


Fig.9.25

Problema 9.6 Mișcarea unui punct material  $M$  este cunoscută prin ecuațiile sale parametriche în coordonate sferice. Să se recunoască traiectoria punctului, durata unui ciclu de mișcare, și să se calculeze parametrii cinematici la momentul  $t = 0,5$  secunde.

Date: Ecuațiile parametriche ale traiectoriei:

$$r = a = \text{const.} \quad \theta = b\sin\omega t \quad \varphi = \frac{1}{2}\omega t \quad (9.84)$$

în care:  $a = 1\text{ m}$ ,  $b = \pi/6\text{ rad}$ ,  $\omega = \pi\text{ s}^{-1}$

Cerute: Traiectoria,  $T$ ,  $|\bar{v}|$ ,  $|\bar{a}|$

Rezolvare: Punctul  $M$  are o mișcare oscilatorie sinusoidală în raport cu cercul ecuatorial al unei sfere de rază  $a$  (fig.9.25):

$$\theta = b\sin 2\varphi = \frac{\pi}{6}\sin 2\varphi \quad (9.85)$$

Un ciclu complet de mișcare, cu revenire în poziția inițială  $M_0$ , are loc pentru  $\varphi = 2\pi$  și deci:

$$\varphi = \frac{1}{2}\omega T = 2\pi \rightarrow T = \frac{4\pi}{\omega} = 4\text{ sec} \quad (9.86)$$

Într-un moment oarecare al mișcării proiecțiile vitezei și accelerației pe direcțiile specifice coordonatelor sferice date de (9.82) și (9.83) sunt:



$$\begin{cases} v_r = 0 \\ v_\theta = ab\omega \cos 2\varphi \\ v_\varphi = \frac{1}{2}a\omega \cos \theta \end{cases} \quad (9.87) \quad \begin{cases} a_r = -ab^2\omega^2 \cos^2 2\varphi - \frac{1}{4}a\omega^2 \cos^2 \theta \\ a_\theta = -ab\omega^2 \sin 2\varphi + \frac{1}{4}a\omega^2 \sin \theta \cos \theta \\ a_\varphi = -ab\omega^2 \cos 2\varphi \end{cases} \quad (9.88)$$

Efectuând calculele pentru  $t = 0,5$ ,  $\theta = \pi/6$ ,  $\varphi = \pi/4$ , se obține în final:

$$|\bar{v}| = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2 + v_\varphi^2} = \frac{\pi\sqrt{3}}{4} = 1,36 \text{ m/s} \quad (9.89)$$

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2 + a_\varphi^2} = -\frac{1}{6}\pi^3 + \frac{1}{16}\pi^2\sqrt{3} = 4,5 \text{ m/s}^2 \quad (9.90)$$

### 9.2.5 Coordonate intrinseci (Frenet)

Poziția unui punct  $M$  pe o traiectorie în spațiu se poate preciza și prin coordonata intrinsecă:

$$s = s(t) \quad (9.91)$$

respectiv lungimea porțiunii de traiectorie parcursă pornind dintr-o poziție inițială  $M_0$  (fig.9.26). Parametrii cinematici ai mișcării punctului se pot exprima în funcție de această coordonată. Pentru studiul variației acestor parametri se face apel la unele cunoștințe din Geometria diferențială.

Vectorul de poziție față de reperul fix  $O$  este:

$$\bar{r} = \bar{r}(s) = \bar{r}[s(t)] \quad (9.92)$$

Pornind de la definiția generală a derivatei, cu notațiile din fig.9.26, se poate face următoarea prelucrare pentru derivata vectorului de poziție în raport cu  $s$ :

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{r}}{ds} &= \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\bar{r}(s + \Delta s) - \bar{r}(s)}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta \bar{r}}{|\Delta \bar{r}|} \cdot \frac{|\Delta \bar{r}|}{\Delta s} \right) = \\ &= \underbrace{\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{r}}{|\Delta \bar{r}|}}_{\bar{\tau}} \cdot \underbrace{\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{|\Delta \bar{r}|}{\Delta s}}_1 = \bar{\tau} \end{aligned} \quad (9.93)$$

Argumentul primei limite este un vector de modul unitar pe direcția  $MM_1$ . Atunci când  $\Delta s \rightarrow 0$ ,  $M_1$  tinde către  $M$  iar această direcție devine tangenta  $Mt$  la traiectorie; vectorul unitar devine versorul  $\bar{\tau}$  al tangentei. Variațiile finite  $|\Delta \bar{r}|$  și  $\Delta s$  tind simultan către 0 astfel că limita raportului lor este 1.

Traectoria este o curbă continuă, fără puncte singulare, astfel că într-un punct oarecare al ei se poate construi o singură dreaptă tangentă  $Mt$ . Pe această tangentă versorul  $\bar{\tau}$  este îndreptat în sensul de creștere al variabilei  $s$ ; el este variabil ca direcție în funcție de poziția punctului  $M$ :

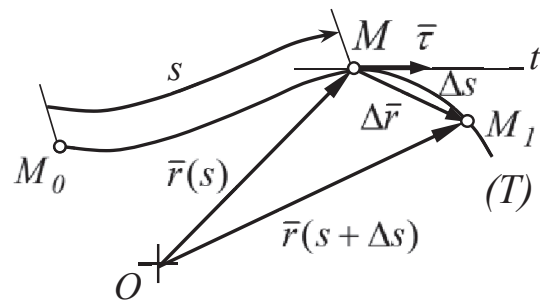


Fig.9.26

$$\bar{\tau} = \bar{\tau}(s) \quad (9.94)$$

Variația versorului  $\bar{\tau}$  în funcție de coordonata  $s$  se definește prin derivata:

$$\frac{d\bar{\tau}}{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\bar{\tau}(s + \Delta s) - \bar{\tau}(s)}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{\tau}}{\Delta s} \quad (9.95)$$

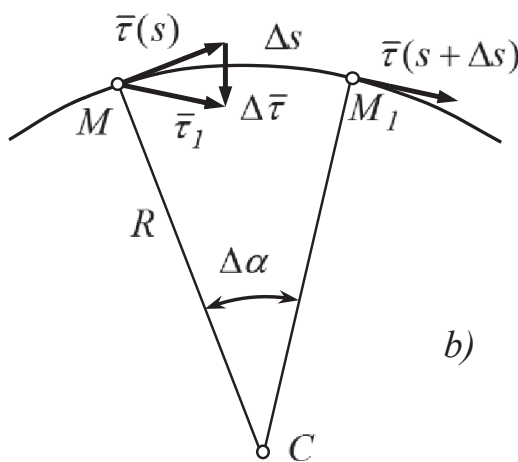
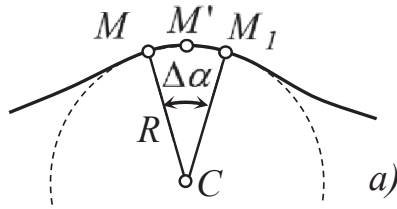


Fig.9.27

Se consideră segmentul de curbă finit  $MM_1 = \Delta s$  (fig.9.27, a) și un punct intermediar  $M'$  care aparține acestuia. Prin cele trei puncte se poate construi un cerc care aproximează segmentul  $MM_1$  printr-un arc:

$$\Delta s = R \cdot \Delta \alpha \quad (9.96)$$

Versorii  $\tau(s)$  și  $\bar{\tau}(s + \Delta s)$ , tangenți la traiectoria reală, sunt perpendiculari pe razele  $CM$  și  $CM_1$  care delimitează acest arc de cerc. (fig.9.27, b). Variația  $\Delta \bar{\tau}$  este evidențiată ca diferență între versorii  $\bar{\tau}(s + \Delta s)$  și  $\bar{\tau}(s)$ . Se prelucrează relația (9.95):

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{\tau}}{\Delta s} &= \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta \bar{\tau}}{|\Delta \bar{\tau}|} \cdot \frac{|\Delta \bar{\tau}|}{\Delta \alpha} \cdot \frac{\Delta \alpha}{\Delta s} \right) = \\ &= \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{\tau}}{|\Delta \bar{\tau}|} \cdot \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{|\Delta \bar{\tau}|}{\Delta \alpha} \cdot \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \alpha}{\Delta s} \end{aligned} \quad (9.97)$$

Argumentul primei limite reprezintă un vector de modul unitar, cu sensul spre interiorul curburii traiectoriei, a cărei direcție coincide cu  $MC$  când  $\Delta s \rightarrow 0$ .

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{\tau}}{|\Delta \bar{\tau}|} = \bar{\nu} \quad (9.98)$$

În consecință  $\bar{\nu}$  \*) reprezintă versorul normalei în punctul  $M$  la traiectorie. În cea de a doua limită  $|\Delta \bar{\tau}|$  și  $\Delta \alpha$  tind simultan către 0 astfel că:

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{|\Delta \bar{\tau}|}{\Delta \alpha} = 1 \quad (9.99)$$

Ținând cont de (9.96), cea de a treia limită se mai poate scrie:

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \alpha}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \alpha}{(R \cdot \Delta \alpha)} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{1}{R} = \frac{1}{\rho} \quad (9.100)$$

La limită punctul  $M_1$  tinde să se suprapună peste  $M$  iar arcul finit  $\Delta s$  devine un arc infinitezimal  $ds$ ; cercul de aproximare devine *cercul de curbură* al traiectoriei în punctul  $M$ ; punctul  $C$ , devenit *centru de curbură*, se află pe normala la traiectorie iar  $CM = \rho$  reprezintă *raza de curbură*. Planul care conține cercul de curbură se numește *plan osculator*.

\*) litera grecească "niu"

Prin regruparea relațiilor de mai sus și echivalarea cu rel.(9.95) se obține derivata versorului tangentei la curbă în raport cu coordonata intrinsecă  $s$ :

$$\frac{d\bar{\tau}}{ds} = \frac{1}{\rho} \bar{\nu} \quad (9.101)$$

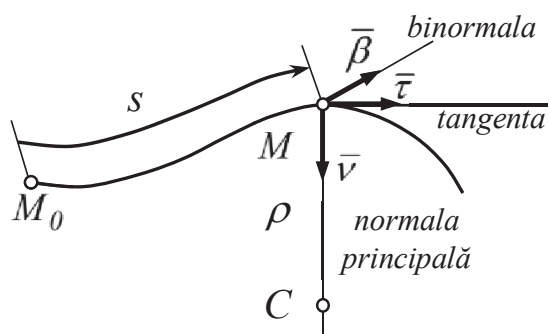


Fig.9.28

Triedrul de referință, cunoscut sub numele de *triedrul Frenet*, este compus din trei direcții reciproc perpendiculare: *tangenta* la curbă în punctul  $M$ , *normala principală* (pe care se află centrul de curbură  $C$ ) și *binormala* (fig.9.28). Versorii acestor direcții sunt  $\bar{\tau}$ ,  $\bar{\nu}$  și  $\bar{\beta} = \bar{\tau} \times \bar{\nu}$ . Derivatele lor în raport cu coordonata  $s$  sunt cunoscute sub denumirea de *formulele lui Frenet*.

Pentru studiul parametrilor cinematici este importantă numai prima formulă a lui Frenet, respectiv (9.101), demonstrată mai înainte.

Pentru viteza și accelerația punctului  $M$  există relațiile generale:

$$\bar{v} = v_{\tau} \bar{\tau} + v_{\nu} \bar{\nu} + v_{\beta} \bar{\beta} \quad |\bar{v}| = \sqrt{v_{\tau}^2 + v_{\nu}^2 + v_{\beta}^2} \quad (9.102)$$

$$\bar{a} = a_{\tau} \bar{\tau} + a_{\nu} \bar{\nu} + a_{\beta} \bar{\beta} \quad |\bar{a}| = \sqrt{a_{\tau}^2 + a_{\nu}^2 + a_{\beta}^2} \quad (9.103)$$

Pentru calculul vitezei se derivează vectorul de poziție care este funcție de timp prin intermediul coordonatei  $s$ . Ținând cont de rel.(9.93) se obține:

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d\bar{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \dot{s} \bar{\tau} = v \bar{\tau} \quad (9.104)$$

care reconfirmă cele arătate în cap.9.1.1, respectiv că viteza este tangentă la traiectorie și în sensul de efectuare al deplasării. Rezultă proiecțiile:

$$v_{\tau} = \dot{s} = v \quad v_{\nu} = 0 \quad v_{\beta} = 0 \quad (9.105)$$

Versorul tangentei este funcție de timp prin intermediul coordonatei  $s$ , astfel că:

$$\dot{\bar{\tau}} = \frac{d\bar{\tau}}{dt} = \frac{d\bar{\tau}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{\dot{s}}{\rho} \bar{\nu} \quad (9.106)$$

Pentru calculul accelerației se derivează relația (9.102) a vitezei;

$$\bar{a} = \dot{\bar{v}} = \ddot{s} \bar{\tau} + \dot{s} \dot{\bar{\tau}} = \ddot{s} \bar{\tau} + \frac{\dot{s}^2}{\rho} \bar{\nu} \quad (9.107)$$

și rezultă proiecțiile accelerației:

$$a_{\tau} = \ddot{s} \quad a_{\nu} = \frac{\dot{s}^2}{\rho} = \frac{v^2}{\rho} \quad a_{\beta} = 0 \quad (9.108)$$

Se observă ca accelerația este conținută în planul osculator. Raza de curbură  $\rho$  într-un punct al traiectoriei se poate determina echivalând accelerația din acest sistem cu cea exprimată în alt sistem de coordonate (carteziene, polare, etc.).

**Problema 9.7** Un punct material se mișcă cu o accelerație tangențială constantă pe o traiectorie parabolică ( $T$ ) pornind din origine cu viteza inițială  $v_0$

(fig.9.29); la un moment  $t_1$  el are coordonatele  $M(x_1, y_1)$ . Să se determine ecuația orară a traiectoriei, viteza, accelerația și raza de curbură într-o poziție oarecare.

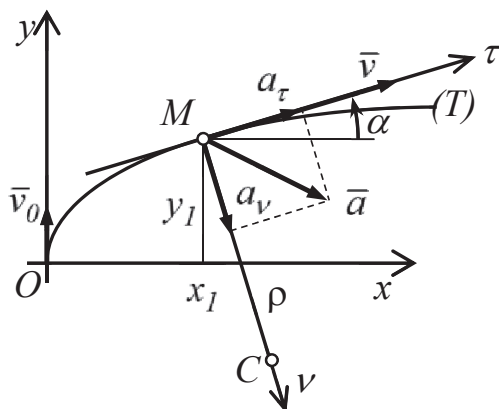


Fig.9.29

Date: Ecuația parabolei:

$$x = \frac{1}{2} y^2 \quad (9.109)$$

Constantele:  $v_0, t_1, x_1, y_1$ ;

Cerute:  $s = s(t), v, a_\tau, a_v, \rho$

Rezolvare: Se determină mai întâi lungimea arcului de traiectorie elementar:

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \\ &= \sqrt{1 + (dx/dy)^2} dy = \sqrt{1 + y^2} dy \end{aligned} \quad (9.110)$$

Se integrează această relație:

$$s = \int_0^s ds = \int_0^y \sqrt{1 + y^2} dy = \frac{1}{2} y \sqrt{1 + y^2} + \frac{1}{2} \operatorname{argsh}(y) \quad (9.111)$$

și se pun condițiile date pentru punctul  $M$ :

$$OM = s_1 = s(y_1) = \frac{1}{2} y_1 \sqrt{1 + y_1^2} + \frac{1}{2} \operatorname{argsh}(y_1) \quad (9.112)$$

Se notează prin  $a_0$  valoarea necunoscută a accelerației tangențiale și se integrează relația de definiție a acesteia în raport cu timpul:

$$a_\tau = \ddot{s} = a_0 = \text{const.} \quad v = \dot{s} = a_0 t + C_1 \quad s = \frac{1}{2} a_0 t^2 + C_1 t + C_2 \quad (9.113)$$

Constantele de integrare  $C_1$  și  $C_2$  se determină din condițiile inițiale:

$$t = 0 \rightarrow s = 0, \dot{s} = v_0 \rightarrow C_2 = 0, C_1 = v_0 \quad (9.114)$$

iar valoarea  $a_0$  din condiția că la momentul  $t = t_1, s = s_1$ :

$$a_\tau = a_0 = 2(s_1 - v_0 t_1) / t_1^2 \quad (9.115)$$

Cu aceste determinări ecuațiile de mișcare devin:

$$v = a_0 t + v_0 \quad (9.116) \quad s = \frac{1}{2} a_0 t^2 + v_0 t \quad (9.117)$$

Se derivează relația (9.109) în raport cu timpul:

$$x = \frac{1}{2} y^2 \rightarrow \dot{x} = y\dot{y} \rightarrow \ddot{x} = \dot{y}^2 + y\ddot{y} \rightarrow a_x = v_y^2 + ya_y \quad (9.118)$$

Proiecțiile vitezei și accelerației pe axele sistemului cartezian sunt:

$$\begin{cases} v_x = v \cos \alpha \\ v_y = v \sin \alpha \end{cases} \quad (9.119) \quad \begin{cases} a_x = a_\tau \cos \alpha + a_v \sin \alpha \\ a_y = a_\tau \sin \alpha - a_v \cos \alpha \end{cases} \quad (9.120)$$

în care direcția tangentei la traiectorie este definită prin relațiile:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy} = \frac{1}{y} \quad (9.121)$$

Se fac înlocuirile în relația (9.118) și se obține pentru accelerația normală:

$$a_v = \frac{v^2 \sin^2 \alpha}{\sin \alpha + y \cos \alpha} = \frac{v^2}{\sqrt{(1 + y^2)^3}} \quad (9.122)$$

Raza de curbura va avea relația de calcul:

$$\rho = v^2/a_v = (1 + y^2)^{3/2} \quad (9.123)$$

### 9.3 Mișcări particulare ale punctului material

#### 9.3.1 Mișcarea rectilinie

Se alege un sistem de referință cartezian cu axa  $Ox$  suprapusă traiectoriei rectilinii a punctului  $M$  (fig.9.30). Parametrii cinematici au în acest caz formele simplificate:

$$\vec{r} = x\vec{i} \quad \vec{v} = v\vec{i} \quad \vec{a} = a\vec{i} \quad (9.124)$$

în care:

$$v \equiv v_x = \frac{dx}{dt} \quad a \equiv a_x = \frac{dv}{dt} \quad (9.125)$$

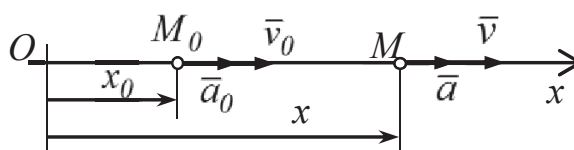


Fig.9.30

În momentul inițial punctul se găsește în poziția  $M_0$  în care parametrii cinematici au proiecțiile  $x_0, v_0, a_0$ .

*Mișcarea rectilinie uniform variată* se caracterizează prin faptul că accelerația rămâne constantă și egală cu valoarea din momentul inițial, respectiv  $a_0$ . Relațiile (9.125) se pot prelucra în modul următor:

$$\int_{v_0}^v dv = \int_0^t a dt = a_0 \int_0^t dt \rightarrow v - v_0 = a_0 t \quad (9.126)$$

$$\int_{x_0}^x dx = \int_0^t v dt = \int_0^t (v_0 + a_0 t) dt \rightarrow x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2} a_0 t^2 \quad (9.127)$$

*Mișcarea rectilinie uniformă* se efectuează cu o viteză constantă, respectiv cu accelerație nulă pe toată durata deplasării

Recapitulând, relațiile corespunzătoare celor două tipuri de mișcări sunt:

$$\begin{cases} a = a_0 = \text{const.} \\ v = v_0 + a_0 t \\ x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_0 t^2 \end{cases} \quad (9.128) \quad \begin{cases} a = 0 \\ v = v_0 = \text{const.} \\ x = x_0 + v_0 t \end{cases} \quad (9.129)$$

**Problema 9.8** : Un punct material cade de la o înălțime dată fără viteză inițială (fig.9.31). Să se stabilească durata căderii și viteza la atingerea solului.

Date:  $h, g$     Cerute:  $t, v$

Rezolvare: Căderea se execută cu accelerația gravitațională constantă, mișcarea fiind în consecință uniform variată. Se alege  $Oy$  ca axă de referință, cu originea în punctul de plecare. Legea de mișcare se obține din relațiile (9.128) în care se particularizează  $a_0 = g, v_0 = 0$  și  $x_0 = 0$ . Rezultă:

$$a = g \quad v = gt \quad y = \frac{1}{2} gt^2 \quad (9.130)$$

La nivelul solului  $y = h$  și se obține:

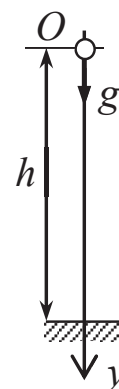


Fig.9.31

$$t = \sqrt{2h/g} \quad v = \sqrt{2gh} \quad (9.131)$$

Ultima relație este cunoscută și ca *formula lui Galilei*.

### 9.3.2 Mișcarea circulară

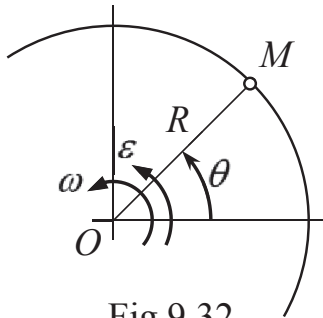


Fig.9.32

Punctul  $M$  descrie o traiectorie circulară de rază  $R = \text{const.}$  în jurul punctului  $O$  (fig.9.32). Între parametrii unghiulari  $\theta$ ,  $\omega$ ,  $\varepsilon$ , definiți în cap.9.1.2, există relațiile:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \quad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} = \ddot{\theta} \quad (9.132)$$

asemănătoare celor dintre  $x$ ,  $v$  și  $a$  de la mișcarea rectilinie (rel.9.125). Se reamintește că parametrii unghiulari sunt mărimi orientate, pozitive în sens trigonometric. Cazurile particulare corespunzătoare sunt *mișcarea circulară uniform variată* și *mișcarea circulară uniformă*; relațiile caracteristice acestora se obțin prin analogie cu (9.128) și (9.129):

$$\begin{cases} \varepsilon = \varepsilon_0 = \text{const.} \\ \omega = \omega_0 + \varepsilon_0 t \\ \theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \varepsilon_0 t^2 \end{cases} \quad (9.133) \quad \begin{cases} \varepsilon = 0. \\ \omega = \omega_0 = \text{const.} \\ \theta = \theta_0 + \omega_0 t \end{cases} \quad (9.134)$$

Parametrii cinematici ai mișcării punctului  $M$  pe traiectoria circulară pot fi studiați în diferite sisteme de coordonate.

*a) în coordonate carteziene (fig.9.33)*

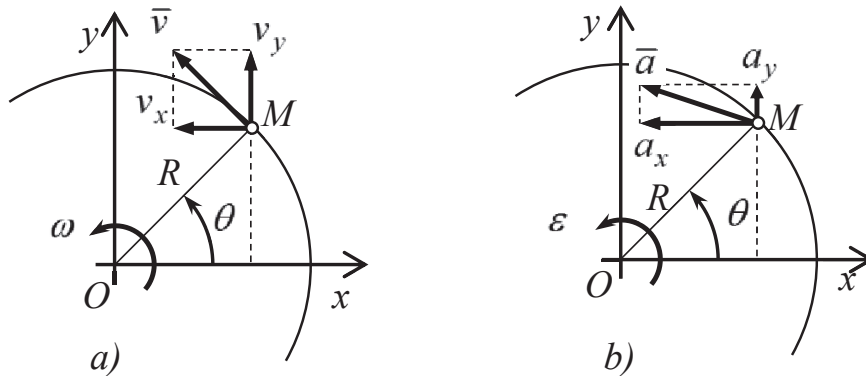


Fig.9.33

Coordonatele punctului  $M$  și traiectoria acestuia (obținută prin eliminarea variabilei  $\theta$ ) sunt definite prin relațiile:

$$\begin{cases} x = R \cos \theta \\ y = R \sin \theta \end{cases} \rightarrow x^2 + y^2 = R^2 \quad (9.135)$$

Prin derivarea în raport cu timpul a coordonatelor se obțin proiecțiile pe axe ale vitezei (fig.9.33, a) și modulul acesteia:

$$\begin{cases} v_x = \dot{x} = -R\dot{\theta}\sin\theta = -y\omega \\ v_y = \dot{y} = R\dot{\theta}\cos\theta = x\omega \end{cases} \rightarrow |\bar{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \omega\sqrt{x^2 + y^2} = \omega R \quad (9.136)$$

Se derivează în continuare în raport cu timpul proiecțiile vitezei pentru obținerea accelerației și a modului acesteia (fig.9.33, b):

$$\begin{cases} a_x = \dot{v}_x = -\dot{y}\omega - y\dot{\omega} = -x\omega^2 - y\varepsilon \\ a_y = \dot{v}_y = \dot{x}\omega + x\dot{\omega} = -y\omega^2 + x\varepsilon \end{cases} \rightarrow |\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = R\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2} \quad (9.137)$$

b) în coordonate polare (fig.9.34)

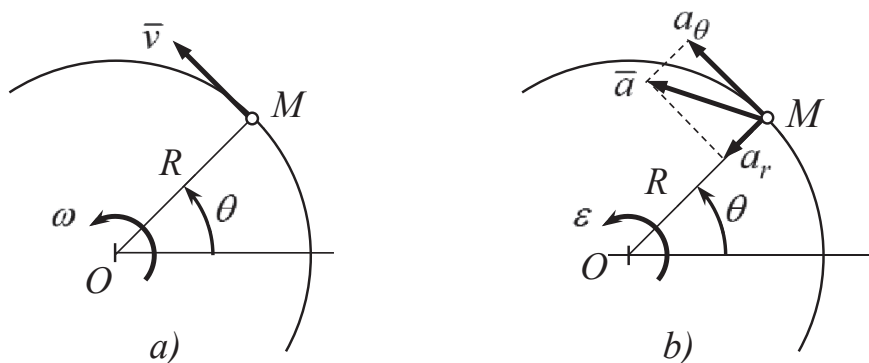


Fig.9.34

Se observă că coordonata polară  $r = OM = R = const.$  și deci derivatele ei în raport cu timpul sunt nule. Pentru proiecțiile vitezei (fig.9.34, a) se utilizează relațiile (9.41):

$$v_r = \dot{r} = 0 \quad v_\theta = r\dot{\theta} = R\omega = v \quad |\bar{v}| = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2} = R\omega \quad (9.138)$$

Se confirmă și în acest caz că în mișcarea circulară viteza este perpendiculară pe rază și are același sens cu viteza unghiulară  $\omega$ . Pentru accelerație (fig.9.34, b) se particularizează relațiile (9.42):

$$\begin{aligned} a_r &= \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -R\omega^2 \\ a_\theta &= r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = R\varepsilon \end{aligned} \quad |\bar{a}| = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2} = R\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2} \quad (9.139)$$

Accelerația după direcția razei  $OM$  este îndreptată întotdeauna către polul  $O$  iar cea perpendiculară pe rază are același sens cu accelerația unghiulară  $\varepsilon$ .

c) în coordonate intrinseci (Frenet) (fig.9.35)

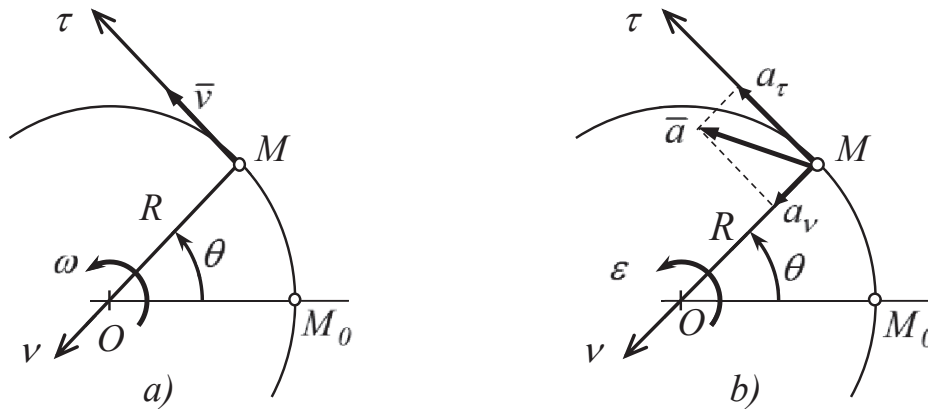


Fig.9.35

Alegând punctul  $M_0$  ca poziție de referință, coordonata intrinsecă este arcul de cerc  $s = M_0M = R\theta$ . Punctul  $O$  este centrul de curbură iar raza de curbură este  $\rho = R$ .

Pentru viteză (fig.9.34, a) se pornește de la relațiile (9.105) obținându-se:

$$v \equiv v_\tau = \dot{s} = R\dot{\theta} = R\omega \quad (9.140)$$

Pentru accelerație (fig.9.34, b) se utilizează relațiile generale (9.108):

$$a_\tau = \ddot{s} = R\ddot{\theta} = R\varepsilon$$

$$a_v = \frac{\dot{s}^2}{\rho} = \frac{R^2\omega^2}{R} = R\omega^2 \quad |\bar{a}| = \sqrt{a_\tau^2 + a_v^2} = R\sqrt{\omega^2 + \varepsilon^2} \quad (9.141)$$

Se constată și în acest caz că accelerația tangențială  $a_\tau$  are sensul dat de  $\varepsilon$  iar accelerația normală  $a_v$  este îndreptată întotdeauna către centrul  $O$ .

În continuare, atât în abordarea teoretică cât și în aplicațiile în care intervin mișcări circulare, se vor prefera notațiile și relațiile de calcul (9.140) și (9.141).

### 9.3.3 Mișcarea uniformă pe elicea circulară

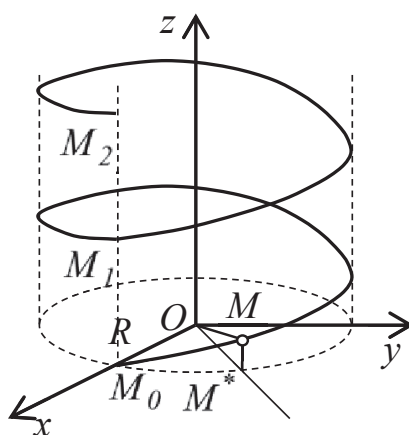


Fig.9.36

Traectoria punctului material  $M$  este o spirală înfășurată pe suprafața unui cilindru circular drept de rază  $R$  (fig.9.36). Distanța între spire măsurată pe generatoarea cilindrului (pasul elicei) este constantă, astfel că  $M_0M_1 = M_1M_2 = \dots = p = \text{const}$ . Se consideră un sistem de referință cartezian cu axa  $Oz$  suprapusă axei cilindrului și  $Ox$  trecând prin poziția inițială  $M_0$ . Pe desfășurata suprafeței cilindrului traectoria elicoidală devine o dreaptă înclinată cu unghiul  $\alpha$  față de orizontală (fig.9.37). În relația:

$$\text{tg } \alpha = \frac{z}{R\theta} = \frac{p}{2\pi R} = \frac{\lambda}{R} \quad (9.142)$$

s-a introdus constanta:



$$\lambda = p/2\pi = R \operatorname{tg} \alpha \quad (9.143)$$

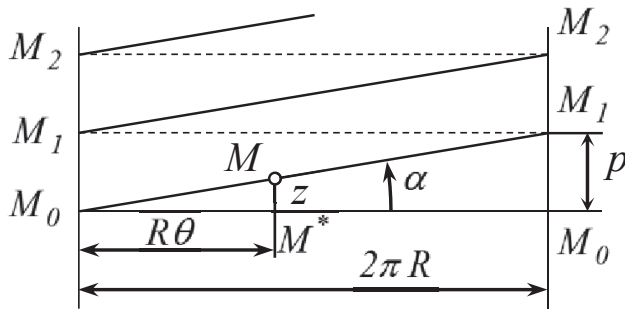


Fig.9.37

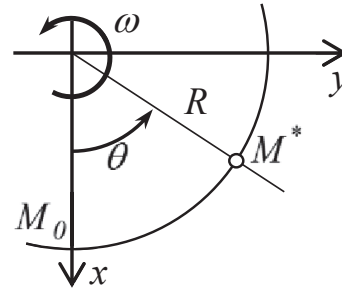


Fig.9.38

Proiecția  $M^*$  în planul  $Oxy$ , poziționată prin unghiul  $\theta$  față de axa  $Ox$  (fig.9.38), are o mișcare circulară cu viteza unghiulară  $\omega = \text{const}$ .

Poziția punctului  $M$  în sistemul cartezian este data de coordonatele:

$$x = R \cos \theta \quad y = R \sin \theta \quad z = \lambda \theta \quad (9.144)$$

Pentru viteză se calculează proiecțiile:

$$v_x = \dot{x} = -R\dot{\theta} \sin \theta = -y\omega \quad v_y = \dot{y} = R\dot{\theta} \cos \theta = x\omega \quad v_z = \dot{z} = \lambda\dot{\theta} = \lambda\omega \quad (9.145)$$

și rezultă modulul:

$$|\bar{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \omega \sqrt{x^2 + y^2 + \lambda^2} = \omega \sqrt{R^2 + \lambda^2} = \omega R \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{\omega R}{\cos \alpha} \quad (9.146)$$

În continuare, se calculează proiecțiile accelerației și modulul acesteia:

$$a_x = \dot{v}_x = -\dot{y}\omega = -x\omega^2 \quad a_y = \dot{v}_y = \dot{x}\omega = -y\omega^2 \quad a_z = \dot{v}_z = 0 \quad (9.147)$$

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \omega^2 \sqrt{x^2 + y^2} = R\omega^2 \quad (9.148)$$

În triedrul Frenet parametrii cinematici au expresiile:

$$s = M_0M = \frac{R\theta}{\cos \alpha} \quad v = \dot{s} = \frac{R\dot{\theta}}{\cos \alpha} = \frac{R\omega}{\cos \alpha} \quad a_\tau = \ddot{s} = 0 \quad a_\nu = \frac{\dot{s}^2}{\rho} = \frac{R^2\omega^2}{\rho \cos^2 \alpha} \quad (9.149)$$

Se poate calcula raza de curbură echivalând accelerațiile totale:

$$|\bar{a}| = R\omega^2 = \frac{R^2\omega^2}{\rho \cos^2 \alpha} \rightarrow \rho = \frac{R}{\cos^2 \alpha} \quad (9.150)$$

### 9.3.4 Mișcarea oscilatorie armonică

Un punct material  $M$  se deplasează pe o traiectorie rectilinie oscilând între două poziții extreme, echidistante față de un punct fix  $O$  (fig.9.39).

Oscilația se numește *armonică* dacă legea de mișcare se exprimă printr-o funcție trigonometrică *sinus* sau *cosinus*. Raportând această deplasare la o axă  $Oy$  verticală, legea de mișcare este descrisă printr-o expresie de forma:

$$y = A \sin \Phi = A \sin(\omega t + \varphi) \quad (9.151)$$

în care  $A$ ,  $\omega$  și  $\varphi$  sunt constante.

Terminologia specifică mișcărilor oscilatorii armonice este următoarea:

$y$  – *elongația*,                       $A$  – *amplitudinea*,  
 $\omega$  – *pulsația*,                       $\varphi$  – *faza inițială*,  
 $\Phi = \omega t + \varphi$  – *faza*,  
 $T$  – *perioada*,  
 $f$  – *frecvența*.

Semnificația acestor termeni poate fi mai ușor pusă în evidență dacă se face o analogie între mișcarea oscilatorie armonică și mișcarea circulară uniformă (fig.9.40). Astfel, un punct  $P$  se deplasează pe o traiectorie circulară de rază  $A$  cu viteza unghiulară  $\omega = \text{const.}$  pornind din poziția inițială  $P_0$ . Unghiurile de poziție ale razelor, respectiv  $\Phi$  și  $\varphi$ , sunt raportate la o axă  $Ox$ ; legătura dintre ele corespunde rel.(9.134). Proiecția  $M$  a punctului  $P$  pe direcția axei  $Oy$  va oscila față de punctul  $O$  după legea de mișcare descrisă de rel.(9.151). Perioada  $T$ , reprezentând timpul în care se execută o oscilație completă, este echivalentă duratei unei rotații complete a punctului  $P$  în jurul lui  $O$ , iar frecvența  $f$  reprezintă numărul de oscilații efectuate într-o secundă. Relațiile corespunzătoare sunt:

$$\omega T = 2\pi \rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} \rightarrow f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad (9.152)$$

Relația  $\omega = 2\pi f$  permite interpretarea fizică a pulsației în cazul mișcării oscilatorii drept numărul de oscilații efectuat într-un interval de  $2\pi \cong 6,28$  secunde.

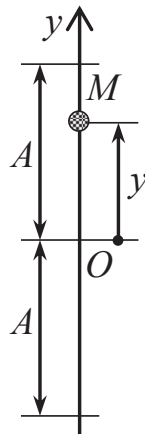


Fig.9.39

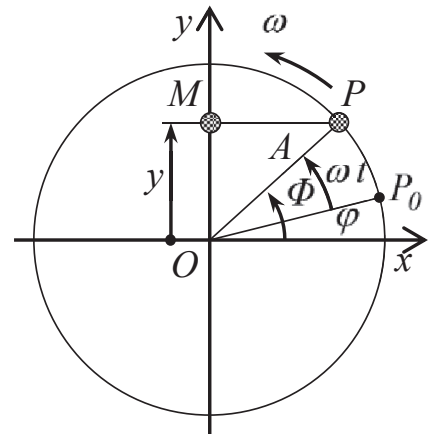


Fig.9.40

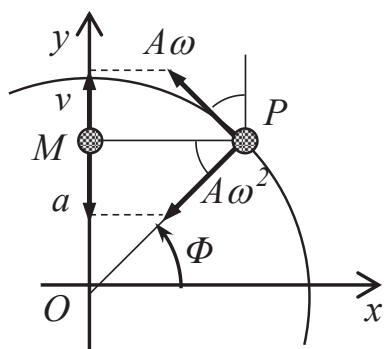


Fig.9.41

Viteza și accelerația se obțin derivând relația (9.151):

$$v = \dot{y} = A\omega \cos(\omega t + \varphi) \quad (9.153)$$

$$a = \dot{v} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi) = -y\omega^2 \quad (9.154)$$

Analogia cu mișcarea circulară uniformă se păstrează și în acest caz; viteza și accelerația punctului  $M$  se pot obține proiectând pe  $Oy$  viteza și accelerația punctului  $P$  (fig.9.41).

Diagramele de variație ale parametrilor cinematici sunt reprezentate în fig.9.42. La momentul inițial  $t=0$  aceștia au valorile:

$$y_0 = A \sin \varphi \quad v_0 = A\omega \cos \varphi \quad a_0 = -A\omega^2 \sin \varphi \quad (9.155)$$

În pozițiile extreme elongția și accelerația au valori maxime, viteza fiind nulă; La trecerea prin poziția de echilibru accelerația este nulă în timp ce viteza este maximă.

$$y_{\max} = \pm A \quad v_{\max} = \pm A\omega \quad a_{\max} = \mp A\omega^2 \quad (9.156)$$

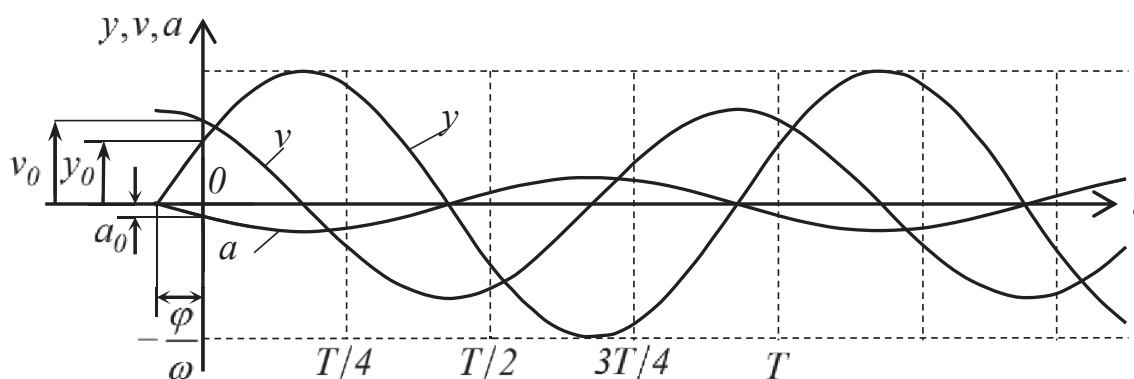


Fig.9.42

## 10. CINEMATICA SOLIDULUI RIGID

### 10.1 Generalități

Pentru studiul mișcării unui corp solid rigid sunt necesare două sisteme de coordonate (fig.10.1):

- sistemul de referință fix  $O_1x_1y_1z_1$  (SRF);
- sistemul de referință mobil  $Oxyz$  (SRM), solidar cu corpul.

Versorii  $\bar{i}_1, \bar{j}_1, \bar{k}_1$  ai sistemului de referință fix sunt constanți în timp ce versorii  $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$  ai sistemului de referință mobil sunt variabili ca direcție în raport cu timpul. Pentru determinarea acestei variații se pornește de la produsele scalare care se pot forma cu versorii respectivi:

$$\begin{aligned} \bar{i} \cdot \bar{i} = 1 \quad \bar{j} \cdot \bar{j} = 1 \quad \bar{k} \cdot \bar{k} = 1 \\ \bar{i} \cdot \bar{j} = 0 \quad \bar{j} \cdot \bar{k} = 0 \quad \bar{k} \cdot \bar{i} = 0 \end{aligned} \quad (10.1)$$

Prin derivarea acestor relații în raport cu timpul se obține:

$$\dot{\bar{i}} \cdot \bar{i} = \dot{\bar{j}} \cdot \bar{j} = \dot{\bar{k}} \cdot \bar{k} = 0 \quad (10.2)$$

$$\dot{\bar{i}} \cdot \bar{j} = -\dot{\bar{j}} \cdot \bar{i} = \omega_z \quad \dot{\bar{j}} \cdot \bar{k} = -\dot{\bar{k}} \cdot \bar{j} = \omega_x \quad \dot{\bar{k}} \cdot \bar{i} = -\dot{\bar{i}} \cdot \bar{k} = \omega_y \quad (10.3)$$

S-au introdus notațiile  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  a căror semnificație va fi evidențiată în continuare. Amintind că proiecția unui vector pe o axă se obține din produsul scalar al vectorului respectiv cu versorul acelei axe, pentru un vector oarecare  $\bar{V}$  din SRM se poate scrie o relație de forma:

$$\bar{V} = V_x \bar{i} + V_y \bar{j} + V_z \bar{k} = (\bar{V} \cdot \bar{i}) \bar{i} + (\bar{V} \cdot \bar{j}) \bar{j} + (\bar{V} \cdot \bar{k}) \bar{k} \quad (10.4)$$

Se înlocuiește  $\bar{V}$  prin  $\dot{\bar{i}}$  și se prelucrează relația obținută:

$$\dot{\bar{i}} = \underbrace{(\dot{\bar{i}} \cdot \bar{i})}_{0} \bar{i} + \underbrace{(\dot{\bar{i}} \cdot \bar{j})}_{\omega_z} \bar{j} + \underbrace{(\dot{\bar{i}} \cdot \bar{k})}_{-\omega_y} \bar{k} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \bar{\omega} \times \bar{i} \quad (10.5)$$

Se procedează în mod analog și pentru ceilalți doi versori obținându-se în final expresiile cunoscute în Mecanică sub numele de *relațiile lui Poisson*:

$$\dot{\bar{i}} = \bar{\omega} \times \bar{i} \quad \dot{\bar{j}} = \bar{\omega} \times \bar{j} \quad \dot{\bar{k}} = \bar{\omega} \times \bar{k} \quad (10.6)$$

În aceste relații apare viteza unghiulară  $\bar{\omega}$ , vector care caracterizează mișcarea de rotație a SRM în raport cu SRF și, implicit, rotația generală a corpului căruia îi este atașat acest sistem de referință. Pentru acest vector expresia analitică în SRM este:

$$\bar{\omega} = \omega_x \bar{i} + \omega_y \bar{j} + \omega_z \bar{k} \quad (10.7)$$

iar proiecțiile sale pe axe sunt definite de relațiile (10.3). Vectorul  $\bar{\omega}$  este deasemenea variabil în raport cu timpul astfel că se definește *acelerația unghiulară*  $\bar{\varepsilon}$ :

$$\bar{\varepsilon} = \varepsilon_x \bar{i} + \varepsilon_y \bar{j} + \varepsilon_z \bar{k} \quad (10.8)$$

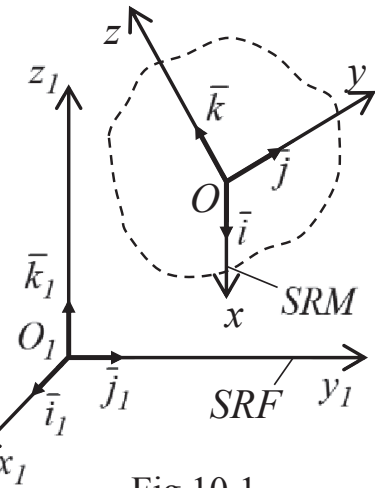


Fig.10.1

ca derivată în raport cu timpul a vitezei unghiulare:

$$\bar{\varepsilon} = \dot{\bar{\omega}} = \dot{\omega}_x \bar{i} + \dot{\omega}_y \bar{j} + \dot{\omega}_z \bar{k} + \omega_x \dot{\bar{i}} + \omega_y \dot{\bar{j}} + \omega_z \dot{\bar{k}} \quad (10.9)$$

Se observă că:

$$\begin{aligned} \omega_x \dot{\bar{i}} + \omega_y \dot{\bar{j}} + \omega_z \dot{\bar{k}} &= \omega_x (\bar{\omega} \times \bar{i}) + \omega_y (\bar{\omega} \times \bar{j}) + \omega_z (\bar{\omega} \times \bar{k}) = \\ &= \bar{\omega} \times (\omega_x \bar{i} + \omega_y \bar{j} + \omega_z \bar{k}) = \bar{\omega} \times \bar{\omega} = 0 \end{aligned} \quad (10.10)$$

și se poate scrie pentru proiecțiile în *SRM* ale accelerației unghiulare:

$$\dot{\omega}_x = \varepsilon_x \quad \dot{\omega}_y = \varepsilon_y \quad \dot{\omega}_z = \varepsilon_z \quad (10.11)$$

## 10.2 Parametrii cinematici ai mișcării solidului rigid

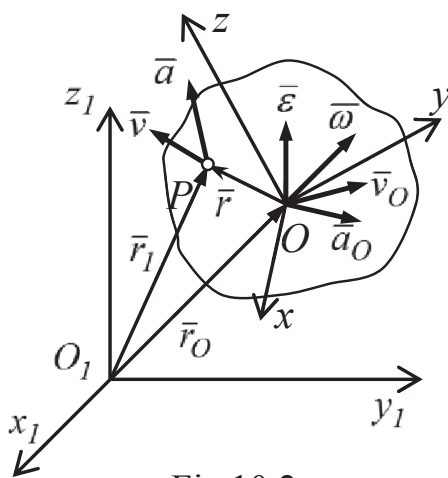


Fig.10.2

Dacă unui corp solid rigid  $i$  se atașează un sistem de referință mobil propriu (*SRM*), parametrii cinematici generali ai mișcării corpului sunt poziția  $\bar{r}_O$ , viteza  $\bar{v}_O$  și accelerația  $\bar{a}_O$  ale originii  $O$  a acestui sistem, precum și viteza unghiulară  $\bar{\omega}$  și accelerația unghiulară  $\bar{\varepsilon}$  cu care se rotește corpul față de sistemul de referință fix (*SRF*) (fig.10.2).

În cele ce urmează se stabilesc relațiile care permit determinarea poziției, vitezei și accelerației unui punct oarecare  $P$  al corpului.

a) Poziția. Punctul  $P$  se poziționează în *SRM* prin vectorul de poziție local  $\bar{r}$  iar în *SRF* prin vectorul  $\bar{r}_1$ . Între aceștia există relația:

$$\bar{r}_1 = \bar{r}_O + \bar{r} \quad (10.12)$$

care se poate dezvolta sub forma:

$$\bar{r}_1 = x_O \bar{i}_1 + y_O \bar{j}_1 + z_O \bar{k}_1 + x \bar{i} + y \bar{j} + z \bar{k} \quad (10.13)$$

În această relație versorii  $\bar{i}_1, \bar{j}_1, \bar{k}_1$  și coordonatele locale  $x, y, z$  ale punctului  $P$  sunt constante iar coordonatele  $x_O, y_O, z_O$  ale originii  $O$  și versorii  $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$  sunt variabile în raport cu timpul. Cele 6 variabile independente reamintesc că un corp liber are 6 grade de libertate – 3 translații după direcțiile axelor *SRF* și 3 rotații în raport cu aceste axe (cap.6.1).

Axele sistemului mobil pot fi poziționate în sistemul fix prin unghiurile directe prezentate în tab.10.1; pentru  $Ox$ , de exemplu, acestea sunt reprezentate în fig.10.3.

**Tabelul 10.1**

	$O_1x_1$	$O_1y_1$	$O_1z_1$
$Ox$	$\alpha_x$	$\beta_x$	$\gamma_x$
$Oy$	$\alpha_y$	$\beta_y$	$\gamma_y$
$Oz$	$\alpha_z$	$\beta_z$	$\gamma_z$

Relația (10.12) se poate pune sub forma matriceală:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\alpha_x & \cos\alpha_y & \cos\alpha_z \\ \cos\beta_x & \cos\beta_y & \cos\beta_z \\ \cos\gamma_x & \cos\gamma_y & \cos\gamma_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (10.14)$$

În forma simbolică această relație matriceală se scrie:

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_0 + \mathbf{R} \cdot \mathbf{r} \quad (10.14')$$

unde  $\mathbf{R}$  este matricea de rotație a sistemului mobil față de cel fix.

În particular, dacă sistemul mobil se află cu  $Oxy$  suprapus peste  $O_1x_1y_1$  (fig.10.4), unghiurile directoare au valorile:

$$\begin{aligned} \alpha_x &= \alpha & \beta_x &= \pi/2 - \alpha & \gamma_x &= \pi/2 \\ \alpha_y &= \pi/2 + \alpha & \beta_y &= \alpha & \gamma_y &= \pi/2 \\ \alpha_z &= \pi/2 & \beta_z &= \pi/2 & \gamma_z &= 0 \end{aligned} \quad (10.15)$$

Într-o astfel de situație, întâlnită în cazul mișcării plan-paralele, relația matriceală (10.14) devine:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (10.16)$$

care se poate simplifica prin suprimarea elementelor corespunzătoare variabilei  $z$ .

b) Viteza. Se derivează în raport cu timpul relația (10.12):

$$\dot{\mathbf{r}}_1 = \dot{\mathbf{r}}_0 + \dot{\mathbf{r}} \quad (10.17)$$

și se exprimă vectorii rezultați prin expresiile lor analitice în sistemul de referință mobil<sup>\*)</sup>. Astfel:

$$\dot{\mathbf{r}}_1 = \bar{\mathbf{v}} = v_x \bar{\mathbf{i}} + v_y \bar{\mathbf{j}} + v_z \bar{\mathbf{k}} \quad (10.18) \quad \dot{\mathbf{r}}_0 = \bar{\mathbf{v}}_0 = v_{Ox} \bar{\mathbf{i}} + v_{Oy} \bar{\mathbf{j}} + v_{Oz} \bar{\mathbf{k}} \quad (10.19)$$

reprezintă vitezele absolute ale punctelor  $P$  și  $O$  (atributul *absolut* se referă la vitezele punctelor față de sistemul de referință fix). În continuare:

<sup>\*)</sup> Raportarea la sistemul de referință mobil este impusă de necesitățile calculului dinamic

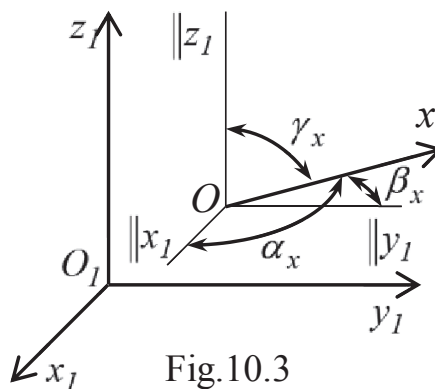


Fig.10.3

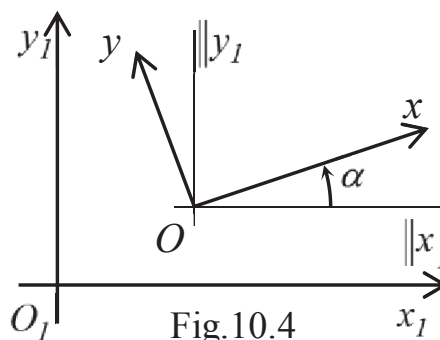


Fig.10.4

$$\begin{aligned}\dot{\vec{r}} &= x\dot{\vec{i}} + y\dot{\vec{j}} + z\dot{\vec{k}} = x(\bar{\omega} \times \vec{i}) + y(\bar{\omega} \times \vec{j}) + z(\bar{\omega} \times \vec{k}) = \\ &= \bar{\omega} \times (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = \bar{\omega} \times \vec{r}\end{aligned}\quad (10.20)$$

Acest termen corespunde unei viteze locale a punctului  $P$  față de originea  $O$  a sistemului de referință mobil. Pentru viteza punctului  $P$  se poate scrie în consecință:

$$\vec{v} = \vec{v}_O + \bar{\omega} \times \vec{r} \quad (10.21)$$

expresie cunoscută sub numele de *relația lui Euler pentru viteze*. Proiecțiile pe axele sistemului de referință mobil ale vitezei provin din prelucrarea acestei relații:

$$\vec{v} = v_{Ox}\vec{i} + v_{Oy}\vec{j} + v_{Oz}\vec{k} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} \rightarrow \begin{cases} v_x = v_{Ox} + z\omega_y - y\omega_z \\ v_y = v_{Oy} + x\omega_z - z\omega_x \\ v_z = v_{Oz} + y\omega_x - x\omega_y \end{cases} \quad (10.22)$$

Relația matriceală echivalentă pentru calculul proiecțiilor vitezei are forma dezvoltată:

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{Ox} \\ v_{Oy} \\ v_{Oz} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (10.23)$$

căreia îi corespunde relația simbolică:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_O + \underline{\omega} \cdot \mathbf{r} \quad (10.24)$$

Prin  $\underline{\omega}$  s-a notat matricea antisimetrică asociată vitezei unghiulare  $\bar{\omega}$ .

c) Accelerația. Se derivează în raport cu timpul relația (10.17):

$$\ddot{\vec{r}}_P = \ddot{\vec{r}}_O + \ddot{\vec{r}} \quad (10.25)$$

Ca și în cazul vitezelor se exprimă vectorii rezultați prin expresiile lor analitice în sistemul mobil. Pentru punctele  $P$  și  $O$  se obțin accelerațiile absolute:

$$\ddot{\vec{r}}_P = \bar{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} \quad (10.26) \quad \ddot{\vec{r}}_O = \bar{a}_O = a_{Ox}\vec{i} + a_{Oy}\vec{j} + a_{Oz}\vec{k} \quad (10.27)$$

Ținând cont de rel.(10.20), accelerația locală a punctului  $P$  față de  $O$  va fi:

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{d}{dt}(\dot{\vec{r}}) = \frac{d}{dt}(\bar{\omega} \times \vec{r}) = \dot{\bar{\omega}} \times \vec{r} + \bar{\omega} \times \dot{\vec{r}} = \bar{\varepsilon} \times \vec{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \vec{r}) \quad (10.28)$$

Se regrupează aceste derivate și se obține expresia:

$$\bar{a} = \bar{a}_O + \bar{\varepsilon} \times \vec{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \vec{r}) \quad (10.29)$$

care este cunoscută sub numele de *relația lui Euler pentru accelerații*. Relația se mai poate scrie:

$$\bar{a} = a_{Ox}\vec{i} + a_{Oy}\vec{j} + a_{Oz}\vec{k} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \varepsilon_x & \varepsilon_y & \varepsilon_z \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ z\omega_y - y\omega_z & x\omega_z - z\omega_x & y\omega_x - x\omega_y \end{vmatrix} \quad (10.30)$$

rezultând pentru proiecțiile pe axele sistemului de referință mobil expresiile:

$$\begin{cases} a_x = a_{Ox} + z\varepsilon_y - y\varepsilon_z + \omega_y(y\omega_x - x\omega_y) - \omega_z(x\omega_z - z\omega_x) \\ a_y = a_{Oy} + x\varepsilon_z - z\varepsilon_x + \omega_z(z\omega_y - y\omega_z) - \omega_x(y\omega_x - x\omega_y) \\ a_z = a_{Oz} + y\varepsilon_x - x\varepsilon_y + \omega_x(x\omega_z - z\omega_x) - \omega_y(z\omega_y - y\omega_z) \end{cases} \quad (10.31)$$

Și aceste relații pot fi puse sub o formă matriceală; pentru simplificarea scrierii se introduce mai întâi viteza locală a punctului  $P$  față de  $O$  sub forma:

$$\begin{bmatrix} v_{POx} \\ v_{POy} \\ v_{POz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (10.32)$$

astfel că echivalentul matriceal al relației (10.31) va fi:

$$\begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{Ox} \\ a_{Oy} \\ a_{Oz} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\varepsilon_z & \varepsilon_y \\ \varepsilon_z & 0 & -\varepsilon_x \\ -\varepsilon_y & \varepsilon_x & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_{POx} \\ v_{POy} \\ v_{POz} \end{bmatrix} \quad (10.33)$$

Relațiilor de mai sus le corespunde forma matriceală simbolică:

$$\mathbf{A} = \mathbf{a}_0 + \underline{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \mathbf{r} + \underline{\boldsymbol{\omega}} \cdot (\underline{\boldsymbol{\omega}} \cdot \mathbf{r}) \quad (10.34)$$

Prin  $\underline{\boldsymbol{\omega}}$  și  $\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}$  s-au notat matricile antisimetrice asociate vectorilor  $\bar{\boldsymbol{\omega}}$  și  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^*$

### 10.3 Mișcări particulare simple ale solidului rigid

#### 10.3.1 Mișcarea de translație

Translația se caracterizează prin aceea că orice dreaptă a corpului rămâne tot timpul mișcării paralelă cu ea însăși, fapt valabil și pentru axele sistemului de referință mobil (fig.10.5). În expresia:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{r}}_1 = \bar{\mathbf{r}}_0 + \bar{\mathbf{r}} = x_0 \bar{\mathbf{i}}_1 + y_0 \bar{\mathbf{j}}_1 + z_0 \bar{\mathbf{k}}_1 + \\ + x \bar{\mathbf{i}} + y \bar{\mathbf{j}} + z \bar{\mathbf{k}} \end{aligned} \quad (10.35)$$

numai coordonatele  $x_0, y_0, z_0$  sunt variabile independente. În consecință un corp în translație are trei grade de libertate.

Versorii  $\bar{\mathbf{i}}, \bar{\mathbf{j}}, \bar{\mathbf{k}}$  sunt constanți iar derivatele lor sunt nule:

$$\begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{i}}} = \bar{\boldsymbol{\omega}} \times \bar{\mathbf{i}} = 0 \\ \dot{\bar{\mathbf{j}}} = \bar{\boldsymbol{\omega}} \times \bar{\mathbf{j}} = 0 \\ \dot{\bar{\mathbf{k}}} = \bar{\boldsymbol{\omega}} \times \bar{\mathbf{k}} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \bar{\boldsymbol{\omega}} = 0 \\ \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = 0 \end{cases} \quad (10.36)$$

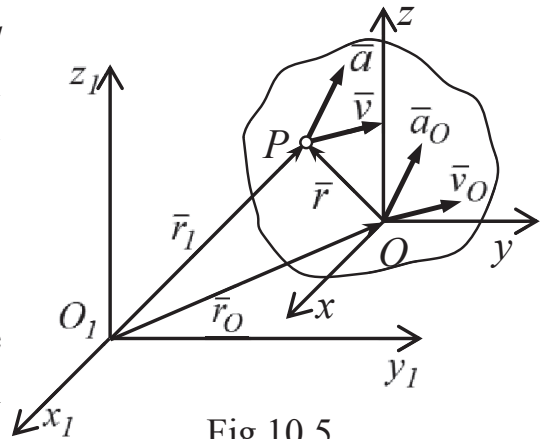


Fig.10.5

\*) Forma simbolică este utilă la realizarea programelor de calculator care operează cu blocuri de matrici



Din relațiile lui Euler se deduce:

$$\begin{cases} \vec{v} = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{r} \\ \vec{a} = \vec{a}_O + \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \vec{v} = \vec{v}_O \\ \vec{a} = \vec{a}_O \end{cases} \quad (10.37)$$

În mișcarea de translație toate punctele corpului au la un moment dat aceeași viteză și aceeași accelerație.

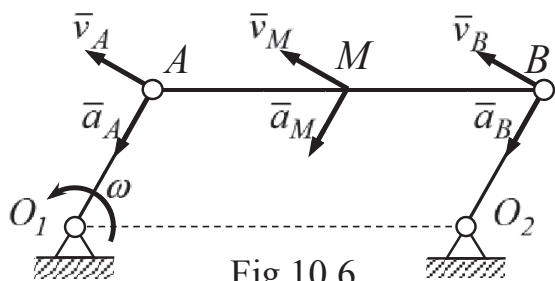


Fig.10.6

Un caz particular îl constituie *roto-translația*, mișcare în care punctele unui corp aflat în translație descriu traiectorii circulare. Situație se întâlnește, de exemplu, la biela unui mecanism patrulater paralelogram (fig.10.6) la care  $O_1A = O_2B = R$  și  $AB = O_1O_2$ . În timpul mișcării biela  $AB$  rămâne paralelă cu baza  $O_1O_2$  iar punctele ei descriu traiectorii circulare identice, având aceeași viteză și aceeași accelerație. Dacă manivela  $O_1A$  se rotește cu  $\omega = const.$  atunci pentru un punct oarecare  $M$  al bielei viteza și accelerația sunt:

$$|\vec{v}_M| = |\vec{v}_A| = |\vec{v}_B| = R\omega \quad (10.38)$$

$$|\vec{a}_M| = |\vec{a}_A| = |\vec{a}_B| = R\omega^2 \quad (10.39)$$

### 10.3.2 Mișcarea de rotație

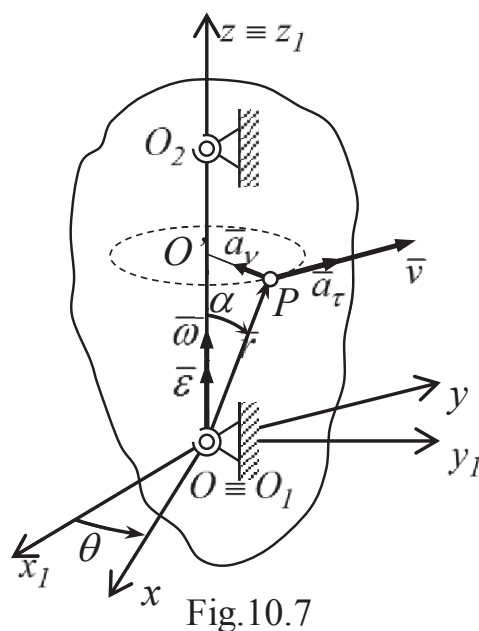


Fig.10.7

În mișcarea de rotație două puncte ale corpului rămân tot timpul fixe în spațiu. Se consideră teoretic că legăturile pentru fixarea acestor puncte, notate prin  $O_1$  și  $O_2$ , sunt niște articulații sferice (fig.10.7). Dreapta care le unește este axa de rotație a corpului. Toate punctele acestuia descriu traiectorii circulare de rază  $O'P = R$  în plane perpendiculare pe axă.

Fără a reduce din generalitate, cele două sisteme de referință, fix și mobil, se aleg cu originea comună într-unul din punctele fixe și cu axele  $O_1z_1$  și  $Oz$  suprapuse axei de rotație. Se observă că poziția corpului este complet determinată printr-un singur parametru – unghiul de poziție  $\theta = \theta(t)$  format de axa mobilă  $Ox$  cu axa fixă  $O_1x_1$ ; în consecință, un corp aflat în mișcare de rotație are un singur grad de libertate. În aceste condiții:

$$\vec{v}_O = 0 \quad \vec{a}_O = 0 \quad (10.40)$$

iar relațiile lui Euler pentru viteza și accelerația unui punct oarecare  $P$  devin:

$$\begin{cases} \bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r} \\ \bar{a} = \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) = \bar{a}_\tau + \bar{a}_v \end{cases} \quad (10.41)$$

Pentru studiul parametrilor unghiulari expresiile analitice ale versorilor sistemului de referință mobil (fig.10.8):

$$\begin{cases} \bar{i} = \cos\theta \bar{i}_1 + \sin\theta \bar{j}_1 \\ \bar{j} = -\sin\theta \bar{i}_1 + \cos\theta \bar{j}_1 \\ \bar{k} = \bar{k}_1 = \text{const.} \end{cases} \quad (10.41)$$

se derivează în raport cu timpul:

$$\begin{cases} \dot{\bar{i}} = -\sin\theta \cdot \dot{\theta} \bar{i}_1 + \cos\theta \cdot \dot{\theta} \bar{j}_1 = \dot{\theta} \bar{j} \\ \dot{\bar{j}} = -\cos\theta \cdot \dot{\theta} \bar{i}_1 - \sin\theta \cdot \dot{\theta} \bar{j}_1 = -\dot{\theta} \bar{i} \\ \dot{\bar{k}} = 0 \end{cases} \quad (10.42)$$

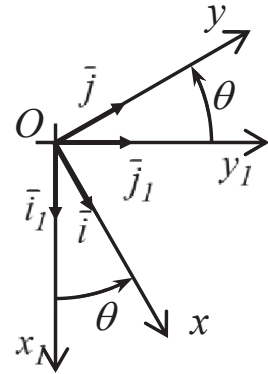


Fig.10.8

Se fac înlocuirile în relațiile (10.3) și se obține:

$$\begin{cases} \omega_x = \dot{\bar{j}} \cdot \bar{k} = -\dot{\bar{k}} \cdot \bar{j} = 0 \\ \omega_y = \dot{\bar{k}} \cdot \bar{i} = -\dot{\bar{i}} \cdot \bar{k} = 0 \\ \omega_z = \dot{\bar{i}} \cdot \bar{j} = -\dot{\bar{j}} \cdot \bar{i} = \dot{\theta} \bar{j} \cdot \bar{j} = \dot{\theta} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \bar{\omega} = \omega_z \bar{k} = \dot{\theta} \bar{k} = \omega \bar{k} \\ \bar{\varepsilon} = \varepsilon_z \bar{k} = \ddot{\theta} \bar{k} = \varepsilon \bar{k} \end{cases} \quad (10.43)$$

Rezultă că în mișcarea de rotație vectorii  $\bar{\omega}$  și  $\bar{\varepsilon}$  sunt întotdeauna coliniari cu axa de rotație a corpului.

Se analizează proprietățile vectorilor vitezei și accelerației din rel.(10.41), Astfel, pentru viteză se poate scrie:

$$\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r} \quad \begin{cases} |\bar{v}| = |\bar{\omega}| |\bar{r}| \sin(\bar{\omega}, \bar{r}) = \omega r \sin \alpha = \omega R \\ \text{dir. } \bar{v} \perp \bar{\omega} \\ \text{sens } \bar{v} \rightarrow \bar{\omega} \end{cases} \quad (10.44)$$

Proprietățile accelerației tangențiale sunt următoarele:

$$\bar{a}_\tau = \bar{\varepsilon} \times \bar{r} \quad \begin{cases} |\bar{a}_\tau| = |\bar{\varepsilon}| |\bar{r}| \sin(\bar{\varepsilon}, \bar{r}) = \varepsilon r \sin \alpha = \varepsilon R \\ \text{dir. } \bar{a}_\tau \perp \bar{\varepsilon} \\ \text{sens } \bar{a}_\tau \rightarrow \bar{\varepsilon} \end{cases} \quad (10.45)$$

Pentru accelerația normală sunt valabile proprietățile:

$$\bar{a}_v = \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) = \bar{\omega} \times \bar{v} \quad \begin{cases} |\bar{a}_v| = |\bar{\omega}| |\bar{v}| \sin(\bar{\omega}, \bar{v}) = \omega^2 R \\ \text{dir. } \bar{a}_v : \text{coliniar } O'P \\ \text{sens } \bar{a}_v : P \rightarrow O' \end{cases} \quad (10.46)$$

Pentru accelerația totală modulul se calculează cu relația:

$$|\bar{a}| = \sqrt{|\bar{a}_\tau|^2 + |\bar{a}_v|^2} = R \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \quad (10.47)$$

În această analiză se regăsesc caracteristicile mișcării circulare pentru

oricare punct al corpului. Viteza și cele două componente ale accelerației se află în același plan cu traiectoria, perpendicular pe axa de rotație.

Se analizează în continuare viteza și accelerația unui punct oarecare în coordonate carteziene, punându-se în evidență și elementele necesare calculului matriceal al proiecțiilor acestora.

Pentru viteză se poate scrie:

$$\bar{\mathbf{v}} = \bar{\boldsymbol{\omega}} \times \bar{\mathbf{r}} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} \rightarrow \begin{cases} v_x = -y\omega \\ v_y = x\omega \\ v_z = 0 \end{cases} \quad (10.48)$$

Relațiile matriceale (10.23) și (10.24) devin:

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega & 0 \\ \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (10.49) \quad \mathbf{v} = \underline{\boldsymbol{\omega}} \cdot \mathbf{r} \quad (10.50)$$

Se procedează în mod analog pentru accelerații:

$$\bar{\mathbf{a}} = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \times \bar{\mathbf{r}} + \bar{\boldsymbol{\omega}} \times (\bar{\boldsymbol{\omega}} \times \bar{\mathbf{r}}) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \varepsilon \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ -y\omega & x\omega & 0 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{cases} a_x = -y\varepsilon - x\omega^2 \\ a_y = x\varepsilon - y\omega^2 \\ a_z = 0 \end{cases} \quad (10.51)$$

Relațiile matriceale (10.33) și (10.34) iau forma simplificată:

$$\begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\varepsilon & 0 \\ \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\omega & 0 \\ \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} \quad (10.52)$$

$$\mathbf{a} = \underline{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \mathbf{r} + \underline{\boldsymbol{\omega}} \cdot \mathbf{v} \quad (10.53)$$

S-au găsit și pe această cale atât pentru viteză cât și pentru accelerație relațiile de calcul specifice mișcării circulare (cap.9.3.2).

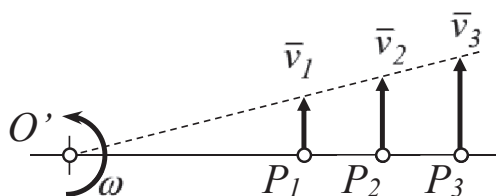


Fig.10.9

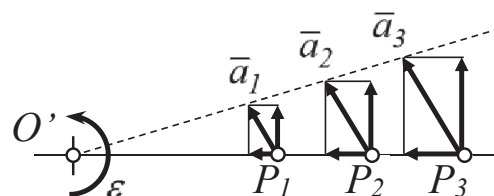


Fig.10.10

Referitor la distribuția de viteze și accelerații se pot face constatările:

– punctele corpului aflate pe o aceeași dreaptă perpendiculară pe axa de rotație au atât vitezele cât și accelerațiile proporționale cu distanța  $R$  la axa de rotație; în reprezentările grafice vârfulurile acestor vectori se vor afla pe aceeași linie (fig.10.9 și fig.10.10);

– punctele corpului aflate chiar pe axa de rotație au viteza și accelerația

nule ( $R = 0$ );

– punctele aflate pe o paralelă oarecare la axa de rotație au aceeași viteză și aceeași accelerație (aceiași  $R$ ).

### 10.3.3 Mișcarea elicoidală

În această mișcare două puncte ale corpului rămân tot timpul pe o dreaptă fixă. Aceste puncte, notate în fig.10.11 prin  $O$  și  $O^*$ , pot fi considerate drept niște articulații cilindrice care permit, pe lângă rotația în jurul axei fixe, și o alunecare în lungul acesteia. Pentru simplificarea tratării se alege  $O_1 z_1$  drept axă de rotație iar axa  $Oz$  a sistemului mobil se alege coliniară cu ea ( $\bar{k} = \bar{k}_1 = \text{const.}$ ).

Un corp în mișcare elicoidală are două grade de libertate; poziția corpului este determinată prin cota  $z_O = z_O(t)$  a originii sistemului de referință mobil și unghiul de rotație  $\theta = \theta(t)$  al axelor acestui sistem. Mișcarea elicoidală poate fi considerată compusă din două mișcări distincte efectuate simultan: o translație în lungul axei fixe cu parametrii cinematici:

$$\begin{cases} \bar{v}_O = \dot{z}_O \bar{k} = v_O \bar{k} \\ \bar{a}_O = \dot{v}_O \bar{k} = a_O \bar{k} \end{cases} \quad (10.54)$$

și o rotație în jurul acestei axe cu parametrii unghiulari stabiliți în capitolului precedent:

$$\begin{cases} \bar{\omega} = \dot{\theta} \bar{k} = \omega \bar{k} \\ \bar{\varepsilon} = \dot{\omega} \bar{k} = \dot{\omega} \bar{k} = \dot{\omega} \bar{k} \end{cases} \quad (10.55)$$

Se observă că acești vectori sunt coliniari cu axa de rotație fixă.

Relațiile lui Euler pentru viteza și accelerația unui punct oarecare  $P$  (fig.10.12 și 10.13) devin:

$$\begin{cases} \bar{v} = \bar{v}_O + \bar{\omega} \times \bar{r} = \bar{v}_O + \bar{v}_\tau \\ \bar{a} = \bar{a}_O + \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \bar{v}_\tau = \bar{a}_O + \bar{a}_\tau + \bar{a}_v \end{cases} \quad (10.56)$$

în care s-a notat

$$\bar{v}_\tau = \bar{\omega} \times \bar{r} \quad (10.57)$$

componenta vitezei tangentă la cercul  $O'P$ , corespunzătoare rotației corpului în jurul axei fixe. În aceste relații vectorii  $\bar{v}_\tau, \bar{a}_\tau, \bar{a}_v$  au caracteristicile (modul,

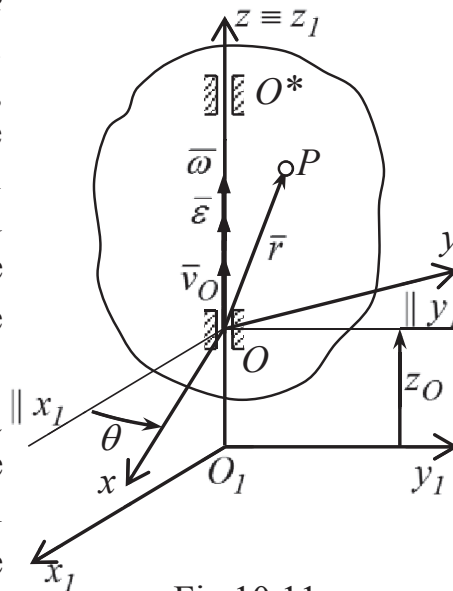


Fig.10.11

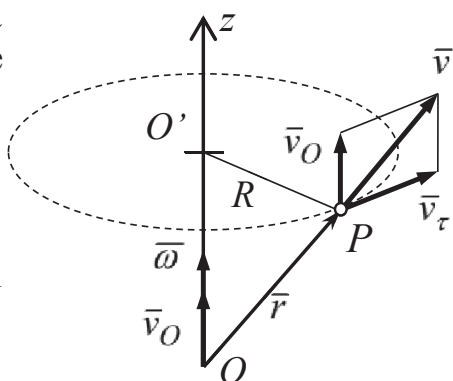


Fig.10.12

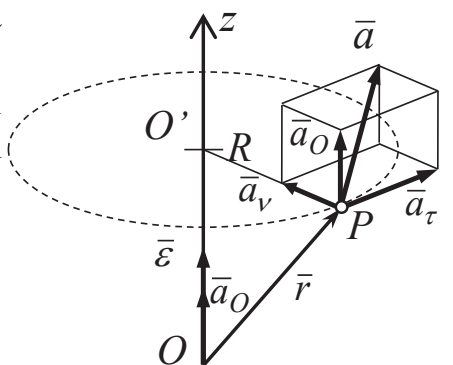


Fig.10.13

direcție, sens) date de relațiile (10.44), (10.45) și (10.46).

În coordonatele carteziene ale sistemului de referință mobil, proiecțiile vitezei sunt:

$$\bar{\mathbf{v}} = v_O \bar{\mathbf{k}} + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} \rightarrow \begin{cases} v_x = -y\omega \\ v_y = x\omega \\ v_z = v_O \end{cases} \quad (10.57)$$

Relația matriceală pentru calculul acestor proiecții are forma simplificată:

$$\begin{bmatrix} v_{\tau x} \\ v_{\tau y} \\ v_{\tau z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega & 0 \\ \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y\omega \\ x\omega \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ v_O \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{\tau x} \\ v_{\tau y} \\ v_{\tau z} \end{bmatrix} \quad (10.58)$$

Forma simbolică echivalentă se poate scrie:

$$\mathbf{v}_{\tau} = \underline{\omega} \cdot \mathbf{r} \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_O + \mathbf{v}_{\tau} \quad (10.59)$$

în care  $\mathbf{v}_{\tau}$  este o matrice coloană intermediară corespunzătoare vitezei  $\bar{\mathbf{v}}_{\tau}$  cu care are loc rotația.

Se procedează în mod asemănător pentru accelerația punctului  $P$ :

$$\bar{\mathbf{a}} = a_O \bar{\mathbf{k}} + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \varepsilon \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ -y\omega & x\omega & 0 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{cases} a_x = -y\varepsilon - x\omega^2 \\ a_y = x\varepsilon - y\omega^2 \\ a_z = a_O \end{cases} \quad (10.60)$$

Relația matriceală pentru calculul proiecțiilor este:

$$\begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a_O \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\varepsilon & 0 \\ \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\omega & 0 \\ \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_{\tau x} \\ v_{\tau y} \\ v_{\tau z} \end{bmatrix} \quad (10.61)$$

și forma simbolică echivalentă:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_O + \underline{\varepsilon} \cdot \mathbf{r} + \underline{\omega} \cdot \mathbf{v}_{\tau} \quad (10.62)$$

În urma analizei efectuate mai sus se pot pune în evidență câteva constatări referitoare la distribuția de viteze și accelerații în mișcarea elicoidală. Astfel:

– atât distribuția de viteze cât și cea de accelerații se pot obține prin suprapunerea a două câmpuri de viteze și, respectiv, accelerații – unul de translație în lungul unei axe fixe și unul de rotație în jurul acestei axe;

– corpul nu are puncte de viteză nulă; în cazul particular al unei translații uniforme în lungul axei de rotație ( $\bar{a}_O = 0$ ), punctele acesteia pot avea accelerația nulă;

– punctele de viteză și accelerație minime se află pe axa de rotație.

Un caz particular al mișcării elicoidale îl constituie *mișcarea de șurub*, folosită în general la transformarea unei mișcări de rotație în mișcare de translație sau invers. Între parametrii poziționali ai corpului există o relație de legătură de forma  $z_O = C\theta$  ( $C = \text{const.}$ ), corpul având astfel numai un singur grad de libertate. Punctele corpului care execută o astfel de mișcare descriu traiectoriile

elicoidale analizate în cap.9.3.3. Din relația (9.142) se deduce relația de legătură:

$$z_O = \frac{p}{2\pi} \theta \quad (10.63)$$

unde  $p = \text{const.}$  este pasul elicei. Această relație se extinde și la nivelul vitezei și accelerației cu care se execută translația menționată:

$$v_O = \frac{p}{2\pi} \omega \quad a_O = \frac{p}{2\pi} \varepsilon \quad (10.64)$$

**Problema 10.1.** Un șurub cu filet pătrat, cu pasul  $p$ , este rotit fără deplasare axială cu o turație  $n$  (fig.10.14). El antrenează o culisă filetată care se poate deplasa în lungul șurubului, fără a se putea roti. Să se calculeze viteza cu care are loc translația culisei.

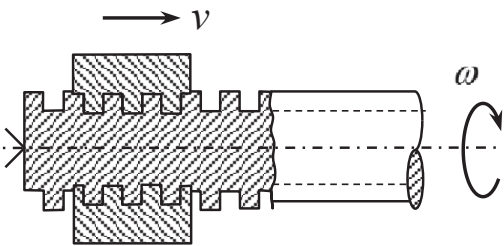


Fig.10.14

**Date:**  $p = 10 \text{ mm}$ ,  $n = 120 \text{ rot/min}$ ;

**Cerute:**  $\omega$ ,  $v$ ;

**Rezolvare:** Blocarea axială a șurubului determină o translație în sens invers a culisei. Relația de transformare a turației în viteză unghiulară este:

$$\omega = \frac{2\pi[\text{rad/rot}] \cdot n[\text{rot/min}]}{60[\text{sec/min}]} = \frac{\pi n}{30} [\text{rad/sec}] \quad (10.65)$$

Pentru viteza culisei se utilizează prima relație (10.64):

$$v = \frac{p}{2\pi} \cdot \frac{\pi n}{30} = 20 \text{ mm/sec} \quad (10.66)$$

## 10.4 Mișcarea plan-paralelă

### 10.4.1 Caracteristici generale ale mișcării

Mișcarea plan-paralelă a corpului solid rigid, deosebit de importantă pentru aplicațiile tehnice, se definește prin aceea că *trei puncte necoliniare ale corpului (un plan al acestuia) rămân tot timpul conținute într-un același plan fix din spațiu – planul mișcării* (fig.10.15).

Se observă că toate punctele corpului aflate pe o perpendiculară la planul mișcării descriu traiectorii identice în plane paralele cu acesta; vitezele și accelerațiile lor sunt egale cu cele ale punctelor aflate în acest plan.

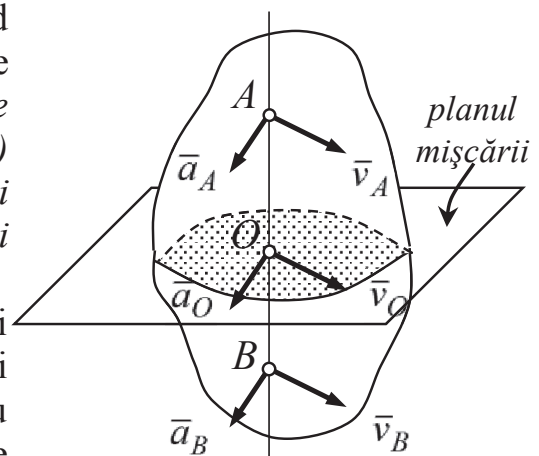


Fig.10.15

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B = \vec{v}_O \quad \vec{a}_A = \vec{a}_B = \vec{a}_O \quad (10.67)$$

În aceste condiții studiul mișcării plan-paralele va fi redus la cel al punctelor corpului conținute în planul mișcării.

Fără a reduce din generalitate, sistemul de referință mobil (*SRM*) se alege cu axele  $Ox$  și  $Oy$  în planul mișcării. Poziția corpului în raport cu sistemul de referință fix (*SRF*) este astfel cunoscută prin coordonatele punctului  $O$  și prin unghiul de rotație al acestor axe în raport cu cele fixe (fig.10.16). Variabilele independente:

$$x_o = x_o(t) \quad y_o = y_o(t) \quad \theta = \theta(t) \quad (10.68)$$

indică faptul că un corp aflat în mișcare plan-paralelă are trei grade de libertate – două translații în planul mișcării și o rotație în jurul unei axe perpendiculară pe acesta.

Componenta de translație a mișcării are loc cu parametrii cinematici ai punctului  $O$ , respectiv:

$$\left. \begin{cases} \bar{r}_O = x_O \bar{i}_1 + y_O \bar{j}_1 \quad (z_O = 0) & \text{în } SRF \\ \bar{v}_O = \dot{\bar{r}}_O = v_{Ox} \bar{i} + v_{Oy} \bar{j} \quad (v_{Oz} = 0) \\ \bar{a}_O = \dot{\bar{v}}_O = a_{Ox} \bar{i} + a_{Oy} \bar{j} \quad (a_{Oz} = 0) \end{cases} \right\} \text{în } SRM \quad (10.69)$$

Parametrii unghiulari ai componentei de rotație se stabilesc în modul descris în cap.10.3.2, relațiile (10.41) ÷ (10.43). Se menționează relațiile finale:

$$\left. \begin{cases} \bar{\omega} = \omega_z \bar{k} = \dot{\theta} \bar{k} = \omega \bar{k} \\ \bar{\varepsilon} = \varepsilon_z \bar{k} = \ddot{\theta} \bar{k} = \varepsilon \bar{k} \end{cases} \right\} \quad (10.70)$$

Prelucrând prima relație a lui Euler se obțin proiecțiile vitezei unui punct oarecare:

$$\bar{v} = \bar{v}_O + \bar{\omega} \times \bar{r} = v_{Ox} \bar{i} + v_{Oy} \bar{j} + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} \rightarrow \begin{cases} v_x = v_{Ox} - y\omega \\ v_y = v_{Oy} + x\omega \\ v_z = 0 \end{cases} \quad (10.71)$$

Din cea de a doua relație a lui Euler se obțin proiecțiile accelerației:

$$\bar{a} = \bar{a}_O + \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) = a_{Ox} \bar{i} + a_{Oy} \bar{j} + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \varepsilon \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ -y\omega & x\omega & 0 \end{vmatrix} \quad (10.72)$$

$$\begin{cases} a_x = a_{Ox} - y\varepsilon - x\omega^2 \\ a_y = a_{Oy} + x\varepsilon - y\omega^2 \\ a_z = 0 \end{cases} \quad (10.72')$$

Se confirmă astfel că vectorii vitezei și accelerației pentru oricare punct al

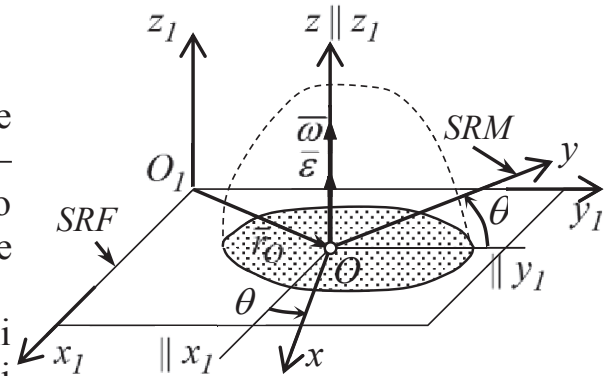


Fig.10.16

corpului sunt paraleli cu planul mișcării. Se recunoaște deasemenea suprapunerea a două câmpuri de viteze și, respectiv, accelerații – unul corespunzător unei translații în planul mișcării cu  $\bar{v}_O$  și  $\bar{a}_O$  și altul corespunzător rotației cu  $\bar{\omega}$  și  $\bar{\varepsilon}$  în jurul unei axe perpendiculare pe acest plan.

Pornind de la caracteristicile mișcării plan-paralele, expuse mai sus, studiul distribuției de viteze și accelerații se poate face pentru punctele corpului situate în planul mișcării. Cele două sisteme de referință, fix și mobil, se reprezintă numai prin axele conținute în acest plan. Viteza și accelerația unghiulară se reprezintă ca în fig.10.17 și se consideră pozitive în sens trigonometric.

Ca și în celelalte tipuri de mișcări, toți parametrii cinematici se raportează la sistemul de referință mobil.

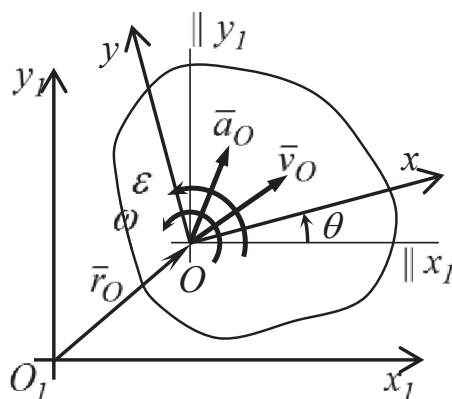


Fig.10.17

### 10.4.2 Puncte speciale în planul mișcării

Se identifică într-o primă etapă punctele corpului aflate în planul mișcării a căror viteză este nulă. Fie  $I(x_I, y_I)$  un astfel de punct având în SRM poziția și viteza:

$$\begin{cases} \bar{r}_I = x_I \bar{i} + y_I \bar{j} \\ \bar{v}_I = \bar{v}_O + \bar{\omega} \times \bar{r}_I = 0 \end{cases} \quad (10.73)$$

Din relațiile (10.71) se deduce:

$$\begin{cases} v_{Ix} = v_{Ox} - y_I \omega = 0 \\ v_{Iy} = v_{Oy} + x_I \omega = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_I = -\frac{v_{Oy}}{\omega} \\ y_I = \frac{v_{Ox}}{\omega} \end{cases} \quad (10.74)$$

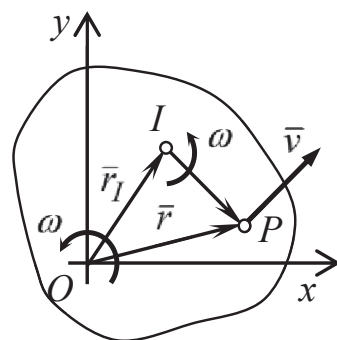


Fig.10.18

Se constată că la un moment dat există un singur punct al corpului care are viteza nulă; el se poate afla oriunde în planul mișcării, putând excede limitele corpului fizic. Deoarece  $\bar{v}_O$  și  $\bar{\omega}$  sunt mărimi variabile în raport cu timpul, acest punct nu are o poziție fixă.

Proprietatea esențială a punctului de viteză nulă este pusă în evidență calculând viteza unui punct oarecare  $P$  (fig.10.18):

$$\bar{v} = \bar{v}_O + \bar{\omega} \times \bar{r} = \bar{v}_O + \bar{\omega} \times (\bar{r}_I + \bar{IP}) = \underbrace{\bar{v}_O + \bar{\omega} \times \bar{r}_I}_{\bar{v}_I = 0} + \bar{\omega} \times \bar{IP} \quad (10.75)$$

Caracteristicile vectorului acestei viteze sunt:

$$\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{IP} \quad \begin{cases} |\bar{v}| = |\bar{\omega}| |\bar{IP}| \sin(\bar{\omega}, \bar{IP}) = \omega IP \sin \pi/2 = \omega IP \\ \text{dir. } \bar{v} \perp \bar{IP}; \text{ sens } \bar{v} \rightarrow \bar{\omega} \end{cases} \quad (10.76)$$



Se recunosc caracteristicile vitezei unui punct în mișcare de rotație în jurul lui  $I$  (rel.10.44). Așa cum s-a arătat mai sus, punctul  $I$  are o poziție variabilă în timp și din acest motiv el este numit *centru instantaneu de rotație (CIR)*.

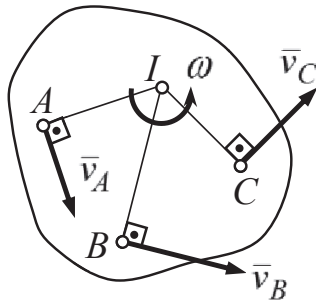


Fig.10.19

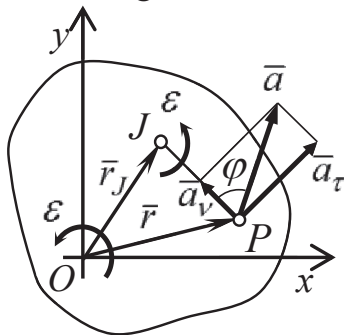


Fig.10.20

Distribuția de viteze pentru toate punctele corpului aflate în planul mișcării corespunde unei mișcări de rotație în jurul CIR. Astfel, vitezele punctelor  $A$ ,  $B$  și  $C$  din fig.10.19 au modulele proporționale cu distanțele la CIR:

$$|\bar{v}_A| = \omega IA \quad |\bar{v}_B| = \omega IB \quad |\bar{v}_C| = \omega IC \quad (10.77)$$

Vitezele sunt perpendiculare pe razele respective și au sensul dat de viteza unghiulară  $\omega$ . Rezultă că poziția CIR poate fi determinată dacă se cunosc direcțiile a numai două viteze ale corpului, la intersecția perpendiculararelor pe acestea.

Un studiu asemănător se poate face și pentru accelerații. Fie  $J(x_J, y_J)$  punctul din planul mișcării a cărei accelerație este nulă:

$$\begin{cases} \bar{r}_J = x_J \bar{i} + y_J \bar{j} \\ \bar{a}_J = \bar{a}_O + \bar{\varepsilon} \times \bar{r}_J + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}_J) = 0 \end{cases} \quad (10.78)$$

Din relațiile (10.72) se deduc coordonatele acestuia:

$$\begin{cases} a_{Jx} = a_{Ox} - y_J \varepsilon - x_J \omega^2 = 0 \\ a_{Jy} = a_{Oy} + x_J \varepsilon - y_J \omega^2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_J = \frac{a_{Ox} \omega^2 - a_{Oy} \varepsilon}{\omega^4 + \varepsilon^2} \\ y_J = \frac{a_{Oy} \omega^2 + a_{Ox} \varepsilon}{\omega^4 + \varepsilon^2} \end{cases} \quad (10.79)$$

Și în acest caz există în planul mișcării un singur punct al corpului de accelerație nulă, variabil în timp ca poziție. Se observă că coordonatele punctului  $J$  sunt diferite de cele ale punctului de viteză nulă  $I$  și, în consecință:

$$\bar{v}_J \neq 0 \quad \bar{a}_I \neq 0 \quad (10.80)$$

Punctele  $I$  și  $J$  coincid doar în cazul unui centru de rotație permanent, respectiv în absența componentei de translație a mișcării. În cazul particular în care componenta de rotație a mișcării plan-paralele este absentă sau atunci când viteza unghiulară ia la un moment dat valoarea  $\bar{\omega} = 0$ , centrul instantaneu de rotație se va găsi la infinit.

Pentru accelerația unui punct oarecare  $P$  (fig.10.20) se poate scrie:

$$\begin{aligned} \bar{a} &= \bar{a}_O + \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) = \bar{a}_O + \bar{\varepsilon} \times (\bar{r}_J + \overline{JP}) + \bar{\omega} \times [(\bar{\omega} \times (\bar{r}_J + \overline{JP}))] = \\ &= \underbrace{\bar{a}_O + \bar{\varepsilon} \times \bar{r}_J + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}_J)}_{\bar{a}_J = 0} + \bar{\varepsilon} \times \overline{JP} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \overline{JP}) = \bar{a}_\tau + \bar{a}_v \end{aligned} \quad (10.81)$$

Se poate recunoaște în relația de mai sus accelerația specifică unei mișcări de rotație, de această dată în jurul punctului  $J$ . Caracteristicile componentei tangențiale sunt:

$$\bar{a}_\tau = \bar{\varepsilon} \times \overline{JP} \quad \begin{cases} |\bar{a}_\tau| = |\bar{\varepsilon}| |\overline{JP}| \sin(\bar{\varepsilon}, \overline{JP}) = \varepsilon \cdot JP \cdot \sin \pi/2 = \varepsilon JP \\ \text{dir. } \bar{a}_\tau \perp JP; \text{ sens } \bar{a}_\tau \rightarrow \bar{\varepsilon} \end{cases} \quad (10.82)$$

Pentru componenta normală se face dezvoltarea produsului dublu vectorial prin produse scalare:

$$\bar{a}_\nu = \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \overline{JP}) = \bar{\omega}(\bar{\omega} \cdot \overline{JP}) - \overline{JP}(\bar{\omega} \cdot \bar{\omega}) = -\omega^2 \overline{JP} \quad (10.83)$$

și se pun în evidență caracteristicile:

$$\begin{cases} |\bar{a}_\nu| = \omega^2 JP \\ \text{dir. } \bar{a}_\nu \text{ col. } JP, \text{ sens } \bar{a}_\nu : P \rightarrow J \end{cases} \quad (10.84)$$

Pentru accelerația totală se calculează modulul și unghiul făcut cu raza  $JP$ :

$$|\bar{a}| = \sqrt{|\bar{a}_\tau|^2 + |\bar{a}_\nu|^2} = JP \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \quad \text{tg } \varphi = \frac{|\bar{a}_\tau|}{|\bar{a}_\nu|} = \frac{\varepsilon JP}{\omega^2 JP} = \frac{\varepsilon}{\omega^2} \quad (10.85)$$

Punctul  $J$  este numit *centrul instantaneu al accelerațiilor*. Deși corpul nu execută o rotație instantanee în jurul acestui punct, cum se întâmplă în cazul *CIR*, distribuția de accelerații pentru toate punctele corpului aflate în planul mișcării corespunde unei astfel de situații. (fig.10.21).

Se constată că mișcarea plan-paralelă, prezentată în analiza din capitolul precedent ca o compunere între o translație cu parametrii cinematici ai punctului  $O$  și o rotație în jurul unei axe  $Oz$  perpendiculară pe planul mișcării, poate fi tratată și ca o rotație în jurul unei axe instantanee de rotație, deasemenea perpendiculară pe planul mișcării în centrul instantaneu de rotație.

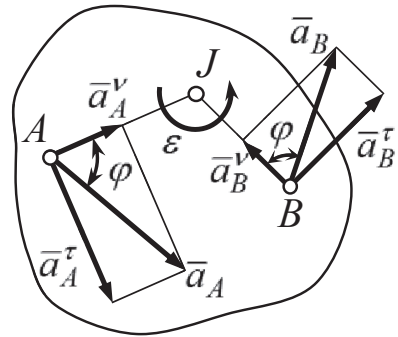


Fig.10.21

**Problema 10.2.** O bară rectilinie  $AB$ , poziționată prin unghiul  $\alpha$ , se reazemă cu ambele extremități pe două drepte perpendiculare una pe cealaltă (fig.10.22, a). Extremitatea  $A$  este deplasată cu o viteză dată pe dreapta orizontală. Să se găsească centrul instantaneu de rotație al barei, locul geometric al acestuia față de un sistem de referință fix și față de sistemul de referință mobil atașat barei; să se calculeze vitezele pentru extremitatea  $B$ , mijlocul  $M$  și să se găsească cea mai mică viteză.

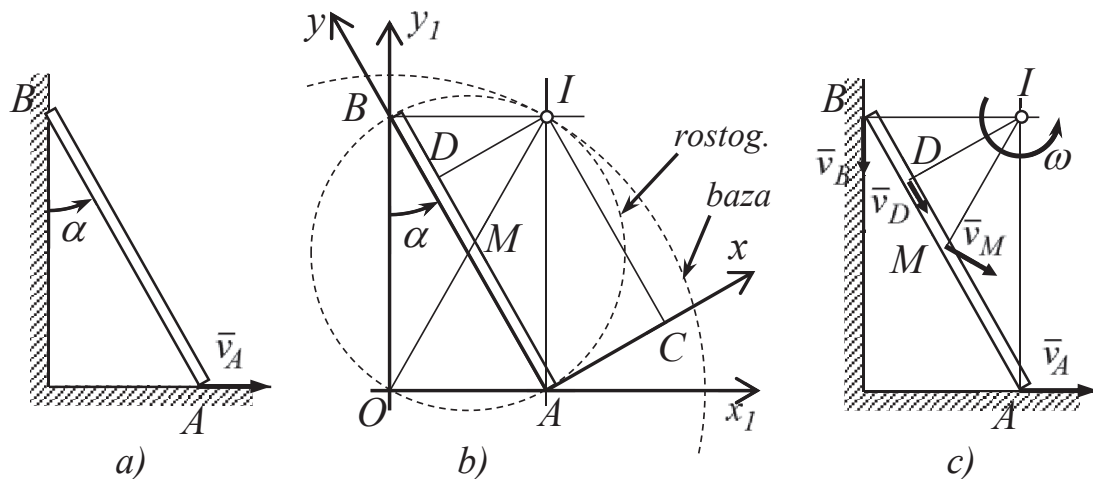


Fig.10.22

Date:  $AB = 2l$ ,  $\alpha = \alpha(t)$ ,  $|\bar{v}_A| = v$ ,  $AM = MB$ ;

Cerute:  $I(x, y)$ ,  $I(x_1, y_1)$  – coordonatele CIR în SRF și SRM;

$f(x, y) = 0$ ,  $f_1(x_1, y_1) = 0$  – locul geometric al CIR în SRM și SRF;

$\omega$ ,  $\bar{v}_B$ ,  $\bar{v}_M$ ,  $\bar{v}_{min}$

Rezolvare: Sistemul de referință fix  $Ox_1y_1$  se alege suprapus direcțiilor fixe pe care se reazemă bara iar sistemul de referință mobil  $Axy$  are o axă suprapusă acesteia (fig.10.22, b). În mișcarea plan-paralelă direcțiile vitezelor tuturor punctelor sunt perpendiculare pe razele care le unesc cu CIR (fig.10.19). Reciproc, CIR se va afla la intersecția perpendiculararelor pe direcțiile a două viteze. Vitezele extremităților barei sunt coliniare cu dreptele fixe; perpendiculararele în A și B pe aceste direcții se vor intersecta în punctul I căutat. În cele două sisteme de referință acest punct are coordonatele:

$$I \text{ în SRF } \begin{cases} x_1 = OA = 2l \sin \alpha \\ y_1 = OB = 2l \cos \alpha \end{cases} \quad (10.86)$$

$$I \text{ în SRM } \begin{cases} x = AC = 2l \cos \alpha \sin \alpha \\ y = AD = 2l \cos^2 \alpha \end{cases}$$

Curba reprezentând locul geometric al CIR în sistemul de referință fix este cunoscută în Mecanică sub denumirea de *bază*; cea care reprezintă locul geometric al CIR față de sistemul de referință mobil este numită *rostogolitoare*. Ecuația bazei se obține eliminând parametrul variabil în raport cu timpul, în cazul de față unghiul  $\alpha$ , între cele două coordonate. Se obține:

$$f_1(x_1, y_1) = x_1^2 + y_1^2 - 4l^2 = 0 \quad (10.87)$$

Se recunoaște ecuația unui cerc cu centrul în O, de rază  $OI = 2l$ . Se procedează în același mod cu coordonatele punctului I în sistemul de referință mobil; se obține ecuația rostogolitoarei:

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 2ly = 0 \quad (10.88)$$

Locul geometric este un cerc cu centrul în punctul M, de rază  $MI = l$ . Se observă că cele două locuri geometrice (în problema de față, două cercuri) sunt reciproc

tangente în  $CIR$ ; în timpul mișcării barei curba mobilă se rostogolește fără alunecare peste curba fixă. Se calculează viteza unghiulară:

$$\omega = \frac{|\bar{v}_A|}{IA} = \frac{v}{2l \sin \alpha} \quad (10.89)$$

și, în continuare, distribuția de viteze pentru punctele cerute (fig.10.22,  $c$ ):

$$|\bar{v}_B| = \omega IB = v \operatorname{tg} \alpha$$

$$|\bar{v}_M| = \omega IM = \frac{v}{2 \cos \alpha} \quad (10.90)$$

$$|\bar{v}_{min}| = |\bar{v}_D| = \omega ID = v \sin \alpha$$

**Problema 10.3.** Bara rectilinie  $AB$  se reazemă cu extremitatea  $A$  în interiorul unei adâncituri de formă semicirculară și în punctul  $C$  aflat la marginea acesteia (fig.10.23). Poziția la un moment dat a barei este cunoscută prin unghiul  $\theta$ . Punctul  $A$  este deplasat pe semicerc cu viteză constantă. Să se studieze distribuția de viteze și de accelerații.

**Date:**  $OA = R, AB = l, \theta = \theta(t)$

$$|\bar{v}_A| = v = \text{const.}$$

**Cerute:**  $I(x_I, y_I), J(x_J, y_J)$

$$\omega, \varepsilon, \bar{v}_B, \bar{v}_C, \bar{a}_A, \bar{a}_B, \bar{a}_C$$

**Rezolvare:** Punctul  $A$  al barei are o mișcare circulară uniformă în jurul centrului geometric  $O$ ; viteza lui este perpendiculară pe raza  $OA$  iar accelerația este coliniară cu aceasta.

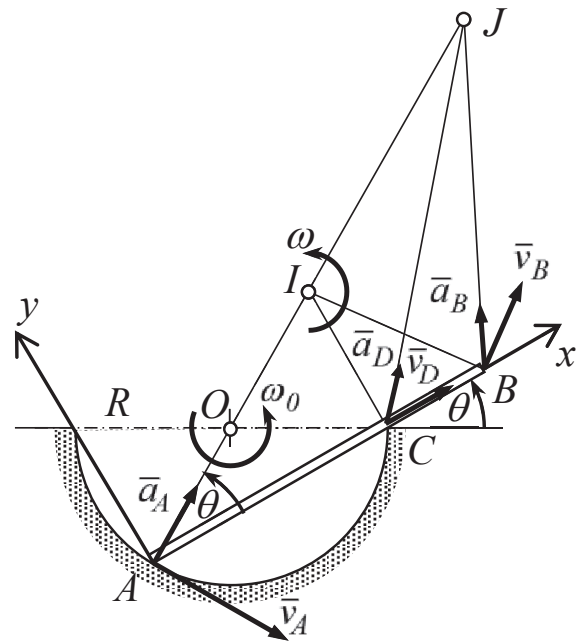


Fig.10.23

$$|\bar{v}_A| = v = \omega_0 R \rightarrow \omega_0 = \frac{v}{R} \quad (10.91)$$

$$|\bar{a}_A| = \omega_0^2 R = \frac{v^2}{R} \quad (10.92)$$

Punctul  $C$  al barei, aflat în contact cu marginea semicercului, are o viteză coliniară cu bara. Centrul instantaneu de rotație se va găsi la intersecția prelungirii razei  $OA$  cu perpendiculara în  $C$  pe  $AB$ . Se observă că triunghiul dreptunghic  $ACI$  are ipotenuza  $IA = 2R$ . Alegând un sistem de referință mobil  $Axy$ , cu axa  $x$  suprapusă barei date, coordonatele  $CIR$  în acest sistem vor fi:

$$x_I = AC = 2R \cos \theta \quad y_I = IC = 2R \sin \theta \quad (10.93)$$

Pentru viteza și accelerația unghiulară ale barei  $AB$  se obțin relațiile:

$$\omega = \frac{|\bar{v}_A|}{2R} = \frac{v}{2R} = \text{const} \quad (10.94)$$

$$\varepsilon = \dot{\omega} = 0 \quad (10.95)$$

Din relațiile (10.85) se deduce:

$$\text{tg} \varphi = \frac{\varepsilon}{\omega^2} = 0 \rightarrow \varphi = 0 \quad (10.96)$$

$$JA = \frac{|\bar{a}_A|}{\omega^2} = 4R \quad (10.97)$$

Rezultă că și centrul instantaneu al accelerațiilor  $J$  se va găsi pe prelungirea razei  $OA$  în sensul indicat de accelerația punctului  $A$ . În sistemul de referință ales, coordonatele centrului accelerațiilor sunt:

$$x_J = 4R \cos \theta \quad y_J = 4R \sin \theta \quad (10.98)$$

Pentru vitezele cerute se fac calculele:

$$|\bar{v}_B| = \omega IB = \omega \sqrt{(x_B - x_I)^2 + (y_B - y_I)^2} = \frac{v}{2R} \sqrt{l^2 + 4Rl \cos \theta + 4R^2} \quad (10.99)$$

$$|\bar{v}_C| = \omega IC = v \sin \theta \quad (10.100)$$

Direcțiile acestor viteze sunt perpendiculare pe razele  $IB$  și respectiv  $IC$ , în sensul dat de  $\omega$ . Pentru accelerațiile acestor puncte se obține:

$$|\bar{a}_B| = JB \omega^2 = \omega^2 \sqrt{(x_B - x_J)^2 + (y_B - y_J)^2} = \frac{v^2}{4R^2} \sqrt{l^2 - 8Rl \cos \theta + 16R^2} \quad (10.101)$$

$$|\bar{a}_C| = JC \omega^2 = \omega^2 \sqrt{(x_C - x_J)^2 + (y_C - y_J)^2} = \frac{v^2}{2R} \sqrt{1 + 3 \sin^2 \theta} \quad (10.102)$$

Din cauza absenței accelerației unghiulare  $\varepsilon$ , cele două accelerații sunt coliniare cu direcțiile  $JB$  și respectiv  $JC$ , având sensul către centrul  $J$ .

### 10.4.3 Studiul vectorial al vitezelor și accelerațiilor

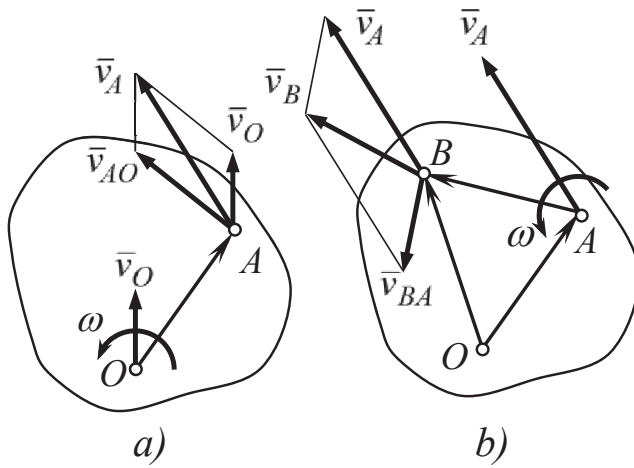


Fig.10.24

Relația lui Euler pentru viteza unui punct  $A$  (fig.10.24,  $a$ ) are forma:

$$\begin{aligned} \bar{v}_A &= \bar{v}_O + \bar{\omega} \times \overline{OA} = \\ &= \bar{v}_O + \bar{v}_{AO} \end{aligned} \quad (10.103)$$

în care prin  $\bar{v}_{AO}$  s-a notat viteza punctului  $A$  față de  $O$ , originea sistemului de referință mobil atașat corpului. Această viteză este perpendiculară pe  $OA$  și are sensul dat de viteza unghiulară  $\omega$ . Pentru un alt punct  $B$  viteza este:

$$\bar{v}_B = \bar{v}_O + \bar{\omega} \times \overline{OB} \quad (10.104)$$

Se face diferența între cele două viteze:

$$\bar{v}_B - \bar{v}_A = \bar{\omega} \times (\overline{OB} - \overline{OA}) = \bar{\omega} \times \overline{AB} \quad (10.105)$$

și se obține viteza punctului  $B$ :

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA} \quad (10.106)$$

Această relație, în care nu mai apare viteza  $\bar{v}_O$ , este cunoscută drept *relația lui Euler pentru viteze în mișcarea plan-paralelă*. Reprezentarea grafică corespunzătoare acestora este ilustrată în fig.10.24,  $b$ . Viteza relativă a punctului  $B$  față de  $A$  are caracteristicile:

$$\bar{v}_{BA} = \bar{\omega} \times \overline{AB} \quad \begin{cases} |\bar{v}_{BA}| = |\bar{\omega}| \cdot |\overline{AB}| \cdot \sin(\bar{\omega}, \overline{AB}) = \omega \cdot AB \\ \text{dir. } \bar{v}_{BA} \perp AB, \text{ sens } \bar{v}_{BA} \rightarrow \omega \end{cases} \quad (10.107)$$

Se poate proceda în mod asemănător pentru accelerații. Cu notațiile din fig.10.25,  $a$ , se scrie pentru accelerația punctului  $A$ :

$$\bar{a}_A = \bar{a}_O + \bar{\varepsilon} \times \overline{OA} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \overline{OA}) = \bar{a}_O + \bar{a}_{AO}^\tau + \bar{a}_{AO}^v = \bar{a}_O + \bar{a}_{AO} \quad (10.108)$$

în care se recunoaște accelerația punctului  $A$  față de originea  $O$  și componentele ei tangențială și normală<sup>\*)</sup>.

<sup>\*)</sup> Pentru simplificarea notării accelerațiilor, acolo unde este cazul, indicii  $\tau$  și  $v$  se așează în partea superioară a simbolului.

Pentru un alt punct  $B$  al corpului accelerația este:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_O + \bar{\varepsilon} \times \overline{OB} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \overline{OB}) \quad (10.109)$$

Se face diferența între cele două accelerații:

$$\begin{aligned} \bar{a}_B - \bar{a}_A &= \bar{\varepsilon} \times (\overline{OB} - \overline{OA}) + \\ &+ \bar{\omega} \times [\bar{\omega} \times (\overline{OB} - \overline{OA})] = \quad (10.110) \\ &= \bar{\varepsilon} \times \overline{AB} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \overline{AB}) \end{aligned}$$

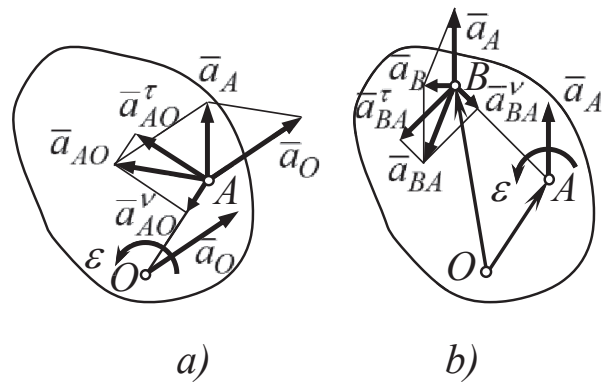


Fig.10.25

și se explicitază accelerația punctului  $B$  în funcție de cea a punctului  $A$ :

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^{\tau} + \bar{a}_{BA}^{\nu} = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA} \quad (10.111)$$

S-a eliminat astfel accelerația originii sistemului de referință mobil  $\bar{a}_O$ . Această expresie, cunoscută drept *relația lui Euler pentru accelerații în mișcarea plan-paralelă*, este ilustrată în fig.10.25, b). Componentele accelerației relative a punctului  $B$  în raport cu  $A$  au următoarele caracteristici:

$$\bar{a}_{BA}^{\tau} = \bar{\varepsilon} \times \overline{AB} \begin{cases} |\bar{a}_{BA}^{\tau}| = |\bar{\varepsilon}| \cdot |\overline{AB}| \cdot \sin(\bar{\varepsilon}, \overline{AB}) = \varepsilon \cdot AB \\ \text{dir. } \bar{a}_{BA}^{\tau} \perp AB, \text{ sens } \bar{a}_{BA}^{\tau} \rightarrow \varepsilon \end{cases} \quad (10.112)$$

$$\bar{a}_{BA}^{\nu} = \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \overline{AB}) = -\omega^2 \overline{AB} \begin{cases} |\bar{a}_{BA}^{\nu}| = \omega^2 \cdot AB \\ \text{dir. } \bar{a}_{BA}^{\nu} \text{ col. } AB, \text{ sens } \bar{a}_{BA}^{\nu} : B \rightarrow A \end{cases} \quad (10.113)$$

**Problema 10.4.** Pentru bara  $AB$  din fig.10.22, a) (problema 10.2) se cunosc viteza și accelerația extremității  $A$ . Să se determine viteza și accelerația extremității  $B$ , precum și viteza și accelerația unghiulară a barei.

**Date:**  $AB = 2l$ ,  $\alpha = \alpha(t)$ ,

$$|\bar{v}_A| = v, |\bar{a}_A| = a;$$

**Cerute:**  $\bar{v}_B$ ,  $\bar{a}_B$ ,  $\omega$ ,  $\varepsilon$ .

**Rezolvare:** Relația de legătură între viteze este:

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA} \quad (10.114)$$

Se observă că viteza  $\bar{v}_{BA}$  este perpendiculară pe bara  $AB$  iar  $\bar{v}_B$  are direcția  $OB$ . Vitezele din această relație se însumează după regula paralelogramului (fig.10.26, a); pentru stabilirea relațiilor geometrice între viteze este utilă și însumarea după regula poligonului (fig.10.26, b). Din această ultimă reprezentare se deduce:

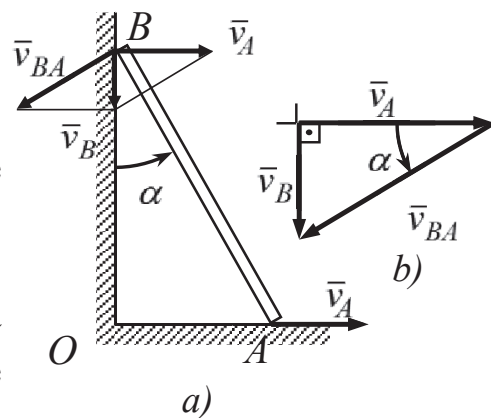


Fig.10.26

$$|\bar{v}_{BA}| = \frac{|\bar{v}_A|}{\sin \alpha} = \frac{v}{\sin \alpha} \quad (10.115) \quad |\bar{v}_B| = |\bar{v}_A| \operatorname{tg} \alpha = v \operatorname{tg} \alpha \quad (10.116)$$

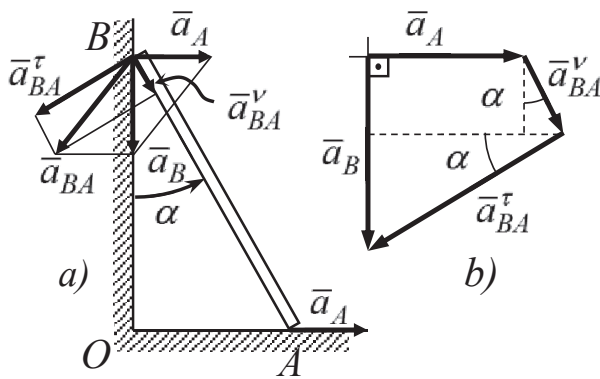


Fig.10.27

Viteza unghiulară a barei se calculează cu relația:

$$\omega = \frac{|\bar{v}_{BA}|}{AB} = \frac{v}{2l \sin \alpha} \quad (10.117)$$

Sensul acesteia este dat de  $\bar{v}_{BA}$ ; în cazul de față sensul este cel trigonometric. S-au obținut aceleași rezultate ca în problema 10.2.

Pentru calculul accelerațiilor se pornește de la ecuația vectorială:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA} = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^v + \bar{a}_{BA}^\tau \quad (10.118)$$

În această relație se cunoaște componenta normală:

$$|\bar{a}_{BA}^v| = AB\omega^2 = \frac{v^2}{2l \sin^2 \alpha} \quad (10.119)$$

având direcția barei  $AB$  și sensul de la  $B$  către  $A$ . Necunoscute sunt componenta tangențială  $\bar{a}_{BA}^\tau$  care este perpendiculară pe bară și accelerația rezultantă  $\bar{a}_B$  care are direcția  $OB$ . Însușirile vectoriale după regula paralelogramului sunt reprezentate în fig.10.27, a) iar cea după regula poligonului în fig.10.27, b). Din această ultimă reprezentare se deduce geometric:

$$|\bar{a}_{BA}^\tau| = \frac{|\bar{a}_A| + |\bar{a}_{BA}^v| \sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{l}{\cos \alpha} \left( a + \frac{v^2}{2l \sin \alpha} \right) \quad (10.120)$$

$$|\bar{a}_B| = |\bar{a}_{BA}^v| \cos \alpha + |\bar{a}_{BA}^\tau| \sin \alpha = a \operatorname{tg} \alpha + \frac{v^2}{2l \sin^2 \alpha \cos \alpha} \quad (10.121)$$

Se determină în final accelerația unghiulară a barei:

$$\varepsilon = \frac{|\bar{a}_{BA}^\tau|}{AB} = \frac{l}{2l \cos \alpha} \left( a + \frac{v^2}{2l \sin \alpha} \right) \quad (10.122)$$

al cărei sens, dat de  $\bar{a}_{BA}^\tau$ , este de asemenea cel trigonometric.

#### 10.4.4 Metode grafo-analitice

Determinarea pe cale grafo-analitică a distribuției de viteze și accelerații permite o evaluare relativ simplă și imediată a acestor parametri pentru o poziție dată a unui corp aflat în mișcare plan-paralelă. Este necesară reprezentarea grafică a elementelor geometrice semnificative ale corpului în poziția respectivă; tot la scară se reprezintă și vitezele și accelerațiile punctelor de interes ale corpului. Unele dintre acestea pot fi determinate prin calcul, altele pot fi evaluate în baza acestor reprezentări grafice; corectitudinea evaluării depinde de acuratețea construcției grafice și de precizia măsurării.



Metodele grafo-analitice nu sunt eficiente dacă determinările trebuie să fie repetate pentru toată succesiune de poziții ale corpului în cadrul unui ciclu cinematic sau atunci când se dorește obținerea unor rezultate foarte precise; în acest caz este preferabilă utilizarea metodelor analitice.

Pentru determinarea distribuției de viteze se prezintă *metoda centrului instantaneu de rotație* și *metoda planului vitezelor*. Pentru distribuția de accelerații se prezintă *metoda planului accelerațiilor*<sup>\*)</sup>.

a) Metoda centrului instantaneu de rotație. S-a arătat în cap.10.4.2 că distribuția de viteze pentru toate punctele corpului corespunde unei rotații instantanee în jurul *CIR* – unicul punct al corpului a cărui viteză este nulă la momentul respectiv. Viteza oricărui alt punct al corpului este perpendiculară pe raza care îl unește cu *CIR* și are sensul dat de viteza unghiulară.

Pentru anumite corpuri identificarea poziției *CIR* se poate face cu ușurință examinând condițiile funcționale. Astfel, la roata din fig.10.28, roată care se rostogolește fără alunecare peste o suprafață de sprijin fixă (problema 6.1), punctul de pe periferia roții care intră în contact cu aceasta are la momentul respectiv viteză nulă și devine astfel centru instantaneu de rotație. Pentru câteva puncte de interes vitezele se calculează cu relațiile:

$$|\bar{v}_A| = 2R\omega \quad |\bar{v}_C| = R\omega \quad |\bar{v}_B| = |\bar{v}_D| = R\omega\sqrt{2} \quad (10.123)$$

Punctele roții aflate pe diametrul care trece prin centrul instantaneu de rotație sunt proporționale cu distanțele la punctul *I*; vârfurile acestor viteze, reprezentate la scară, se vor găsi pe o aceeași dreaptă.

O situație asemănătoare se întâlnește la scripetele mobil din fig.10.29 format din două discuri solidarizate între ele; pe discul mic este înfășurat un fir mobil iar pe discul mare un fir a cărui extremitate este fixă. În timpul mișcării scripetelui punctul de pe periferia discului mare care devine punct de tangență la firul fix are în acel moment viteză nulă; el devine astfel centru instantaneu de rotație. Pentru punctele de interes ale roții aflate pe diametrul orizontal vitezele sunt:

$$|\bar{v}_C| = R\omega \quad |\bar{v}_A| = (R+r)\omega \quad (10.124)$$

În general, pentru determinarea poziției centrului instantaneu de rotație sunt necesare direcțiile vitezelor pentru două puncte din configurația corpului; perpendicularele pe aceste direcții se intersectează în *CIR*. Lungimile razelor care unesc *CIR* cu punctele de interes se determină grafic sau, atunci când este posibil, se calculează din relațiile geometrice care se pot stabili pentru construcția respectivă. Se exemplifică metoda pentru cazul bielei unor mecanisme plane uzuale.

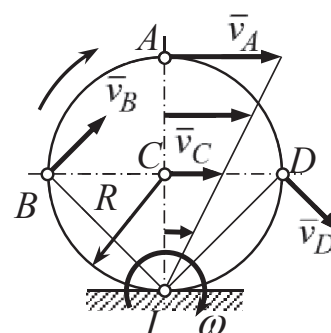


Fig.10.28

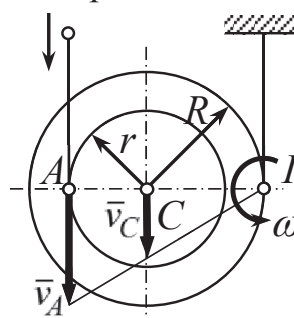


Fig.10.29

<sup>\*)</sup> Metoda bazată pe centrul instantaneu al accelerațiilor este destul de greoaie și nu prezintă interes pentru aplicații

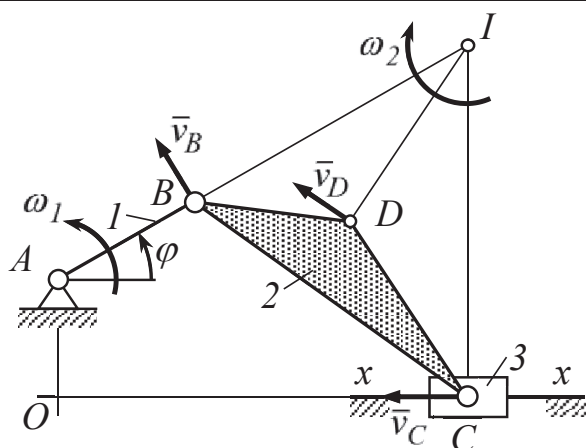


Fig.10.30

ei va avea direcția  $x-x$ . Perpendiculara pe direcția vitezei  $\bar{v}_B$  va fi în prelungirea manivelei  $AB$ ; centrul instantaneu de rotație al bielei se va găsi la intrecerea acesteia cu perpendiculara în  $C$  pe direcția  $x-x$ . Din construcție rezultă distanțele  $IB, IC, ID$ . Viteza unghiulară a bielei este:

$$\omega_2 = \frac{|\bar{v}_B|}{IB} = \frac{AB}{IB} \omega_1 \quad (10.126)$$

Sensul acesteia este dat de  $\bar{v}_B$ . Se calculează în continuare vitezele:

$$|\bar{v}_C| = \omega_2 IC \quad |\bar{v}_D| = \omega_2 ID \quad (10.127)$$

Direcțiile acestor viteze sunt perpendiculare pe  $IC$  și respectiv  $ID$  iar sensul lor este dat de  $\omega_2$ . În poziția particulară în care unghiul de poziție al manivelei este  $\varphi = \pi/2$  dreptele perpendiculare pe direcțiile vitezelor  $\bar{v}_B$  și  $\bar{v}_C$  sunt paralele între ele iar  $CIR$  se află la infinit. În acest caz  $\omega_2 = 0$  și biela  $BC$  execută o translație instantanee; punctele ei au în acel moment aceeași viteză.

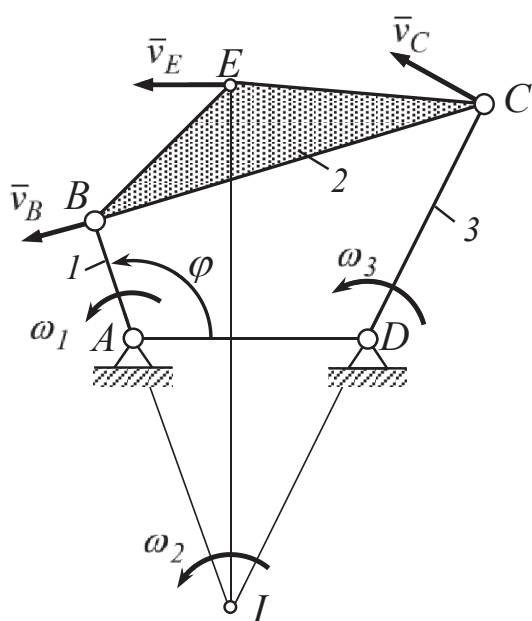


Fig.10.31

**Problema 10.5.** Mecanismul bielă-manivelă (fig. 10.30).

Date:  $OA, AB, BC, BD, DC,$

$$\varphi = \varphi(t), \omega_1;$$

Cerute:  $\bar{\omega}_2, \bar{v}_B, \bar{v}_C, \bar{v}_D;$

Rezolvare: Articulația  $B$  are viteza:

$$|\bar{v}_B| = \omega_1 AB \quad (10.125)$$

perpendiculară pe  $AB$  în sensul lui  $\omega_1$ .

Direcția vitezei punctului  $C$  este coliniară cu suportul culisei și în consecință viteza

**Problema 10.6.** În fig 10.31 este dat

un mecanism patrulater articulat compus din manivela 1, biela de formă triunghiulară 2 și balansierul 3; manivela și balansierul sunt articulate în puncte fixe și pot executa mișcări de rotație în jurul acestora. Cunoscând că manivela este elementul conducător, pentru o poziție dată a acesteia să se determine distribuția de viteze la punctele de interes ale bielei.

Date:  $AD, AB, BC, CD, BE, CE,$

$$\varphi = \varphi(t), \omega_1;$$

Cerute:  $\omega_2, \omega_3, \bar{v}_B, \bar{v}_C, \bar{v}_E$

Rezolvare: Cu datele dimensionale, și corespunzător valorii unghiului  $\varphi$ , se construiește la scară mecanismul patrulater  $ABCD$ .

Viteza punctului  $B$ , perpendiculară pe  $AB$  în sensul dat de  $\omega_1$ , are modulul:

$$|\bar{v}_B| = \omega_1 AB \quad (10.128)$$

În mod analog, direcția vitezei punctului  $C$  este perpendiculară pe balansierul  $CD$ . Perpendicularele pe direcțiile acestor viteze au direcțiile elementelor  $AB$  și  $CD$ , la intersecția lor aflându-se centrul instantaneu  $I$  al bielei. Din construcție rezultă distanțele  $IB$ ,  $IC$  și  $IE$ .

Se calculează viteza unghiulară a bielei  $BC$ :

$$\omega_2 = \frac{|\bar{v}_B|}{IB} \quad (10.129)$$

al cărei sens este dat de  $\bar{v}_B$ . În continuare:

$$|\bar{v}_C| = \omega_2 IC \quad |\bar{v}_E| = \omega_2 IE \quad (10.130)$$

au direcțiile și sensurile indicate în fig.10.31.

b) Metoda planului vitezelor are la bază ecuație lui Euler pentru viteze:

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA} \quad (10.131)$$

Cele mai frecvente aplicații ale metodei se regăsesc la corpurile cu mișcare plan-paralelă din configurația mecanismelor plane; din acest motiv în descrierea metodei se vor utiliza unele noțiuni specifice acestora. Mecanismele plane sunt sisteme de corpuri compuse din *elemente* (în general corpuri reductibile la bare sau plăci) legate între ele prin articulații sau culise. Mișcarea este generată prin regimul cinematic impus unuia dintre elemente, considerat *element conducător*. Cunoscând dimensiunile elementelor și poziția pentru care se face analiza, se determină vitezele punctelor de interes, de regulă centrele articulațiilor sau culiselor menționate, precum și vitezele unghiulare ale elementelor.

Metoda constă în determinarea pe cale grafică a mărimii și, după caz, a direcției și sensului vitezelor necunoscute. În acest scop ecuațiile vectoriale de tip Euler se transpun grafic sub forma unor poligoane de viteze construite la scară într-un plan specific, numit *planul vitezelor*. În acest plan există un punct special numit *polul vitezelor* și notat  $p_v$ , care este corespondentul tuturor punctelor fixe sau de viteză nulă (*CIR*) din configurația mecanismului.

Orice punct mobil real al mecanismului are un punct corespondent în planul vitezelor, diferit de  $p_v$ ; de obicei punctele corespondente se notează prin literele mici echivalente ale punctelor reale. Un vector cu originea în  $p_v$  și cu vârful în punctul corespondent va reprezenta la scară viteza absolută a punctului real. Viteza relativă a unui punct real în raport cu altul va fi reprezentată în planul vitezelor prin vectorul care unește punctele corespondente ale acestora.

Etapale metodei sunt următoarele:

– se construiește la o scară oarecare mecanismul în poziția dată; din construcție vor rezulta direcțiile tuturor elementelor;

– se scriu ecuațiile vectoriale pentru vitezele punctelor de interes; ordinea în care sunt analizate aceste ecuații pornește de la observația că o ecuație vectorială în plan nu poate avea mai mult de două necunoscute (modulele a două viteze sau modulul și direcția unei singure viteze);

– se analizează caracteristicile fiecărei viteze, respectiv modulul, direcție și sensul; pentru facilitarea transpunerii grafice se marchează fiecare termen al ecuației vectoriale prin sublinierea cu două linii a vitezelor cunoscute integral și cu o singură linie a vitezelor cunoscute doar ca direcție, însoțind aceste marcaje cu descrierea direcției (paralel sau perpendicular elementelor mecanismului);

– se alege factorul de scară pentru viteze, notat  $k_v$ , reprezentând numărul unităților de lungime atribuite unității de măsură a vitezei, ca de exemplu  $[k_v] = cm\ desen / (m/s)$ ;

– se alege polul  $p_v$  în planul vitezelor; desenarea unor axe prin acest punct este opțională;

– pornind din  $p_v$  se construiesc segmentele corespunzătoare vitezelor absolute cunoscute; lungimea unui segment se obține înmulțind modulul cu factorul de scară  $k_v$ ;

– se continuă construcția cu direcțiile vitezelor necunoscute, cu observația că cele absolute vor trece prin polul vitezelor; poligonul se închide prin punctul de intersecție al acestor direcții;

– se identifică în poligonul astfel construit vectorii vitezelor necunoscute și sensurile acestora; se măsoară lungimile segmentelor respective;

– se calculează modulele acestor viteze împărțind aceste lungimi la  $k_v$ ;

– se calculează vitezele unghiulare ale elementelor.

După încheierea operațiunii se pot reprezenta pe schița originală a mecanismului vectorii vitezelor absolute și vitezele unghiulare pentru a avea o imagine de ansamblu a mișcării acestuia.

Metoda descrisă mai sus este relativ simplă și ușor de utilizat, oferind în final informații valorice și ilustrative despre mișcarea elementelor mecanismului și despre distribuția de viteze în punctele de interes ale acestora. Precizia determinării este, în mod evident, dependentă de acuratețea construcției grafice. În cazul în care se dorește efectuarea determinărilor pentru toată succesiunea de poziții a mecanismului în cadrul unui ciclu cinematic, metoda este laborioasă și mai puțin eficientă.

c) Metoda planului accelerațiilor are la bază ecuația lui Euler pentru accelerații:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA} = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^v + \bar{a}_{BA}^r \quad (10.132)$$

Modul de lucru este identic cu cel descris în cadrul metodei planului vitezelor. Polul accelerațiilor, notat  $p_a$ , va corespunde tuturor punctelor fixe sau care în poziția dată au accelerația nulă. Factorul de scară pentru accelerații, notat  $k_a$ , va reprezenta numărul unităților de lungime atribuit unei unități de măsură a accelerației, ca de exemplu  $[k_a] = cm\ desen / (m/s^2)$ .

Componenta normală a oricărei accelerații relative este cunoscută, deoarece se calculează în funcție de viteza unghiulară a elementului respectiv, determinată în urma studierii vitezelor.

**Problema 10.7.** La mecanismul din fig.10.31 se cunosc dimensiunile, respectiv lungimile tuturor barelor. Elementul conducător este manivela  $AB$  care se rotește în jurul articulației fixe  $A$  cu un regim cinematic cunoscut. Să se determine distribuția de viteze și accelerații pentru punctele de legătură dintre elemente în poziția reprezentată în desen.

**Date:**  $AB, BC, BD, DC, DE,$   
 $\omega_1, \varepsilon_1;$

**Cerute:**  $\bar{v}_B, \bar{v}_C, \bar{v}_D, \bar{v}_E, \omega_2, \omega_4;$   
 $\bar{a}_B, \bar{a}_C, \bar{a}_D, \bar{a}_E, \varepsilon_2, \varepsilon_4.$

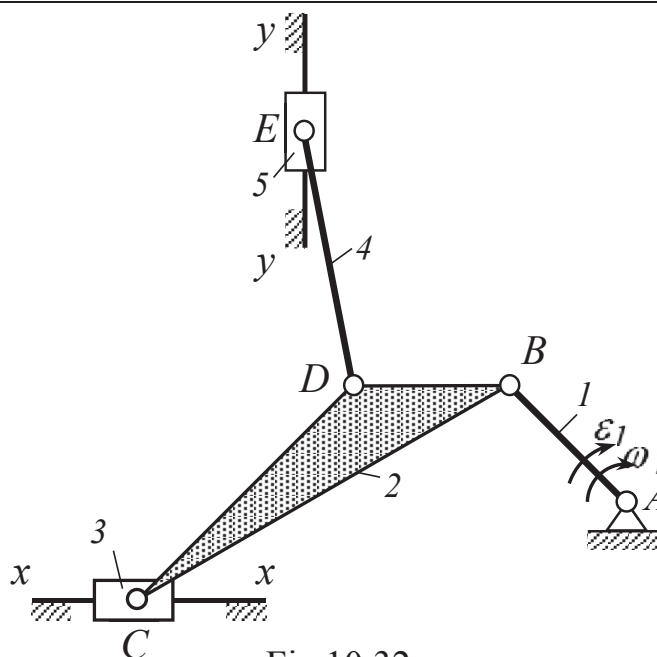


Fig.10.32

**Rezolvare:** Se consideră mecanismul construit la scară în poziția pentru care se face calculul, astfel că direcțiile tuturor elementelor sunt cunoscute.

Construcțiile grafice din planul vitezelor ca și cele din planul accelerațiilor pot fi executate pe aceleași desene; în problema de față s-a preferat, pentru claritate, realizarea unor desene distincte pentru fiecare ecuație vectorială. Factorii de scară  $k_v$  și  $k_a$  se aleg corespunzător.

Manivela  $1$ , are o mișcare de rotație în jurul articulației fixe  $A$  și în consecință:

$$\begin{cases} |\bar{v}_B| = \omega_1 \cdot AB \\ \text{dir.} \bar{v}_B \perp AB, \text{ sens } \bar{v}_B \rightarrow \omega_1 \end{cases} \quad (10.133)$$

Elementul  $2$  are o mișcare plan-paralelă; viteza punctului  $C$  se determină cu relația:

$$\frac{\bar{v}_C}{\parallel xx} = \frac{\bar{v}_B}{\perp AB} + \frac{\bar{v}_{CB}}{\perp BC} \quad (10.134)$$

în care:

$$\begin{cases} |\bar{v}_C| = ? \\ \text{dir.} \bar{v}_C \parallel xx, \text{ sens } \bar{v}_C = ? \end{cases} \quad (10.135) \quad \begin{cases} |\bar{v}_{CB}| = \omega_2 \cdot BC = ? \\ \text{dir.} \bar{v}_{CB} \perp BC, \text{ sens } \bar{v}_{CB} \rightarrow \omega_2 = ? \end{cases} \quad (10.136)$$

În ecuația (10.134) s-au marcat detaliile rezultate în urma acestei analize; ecuația are ca necunoscute modulele a două viteze și poate fi rezolvată pe cale grafo-analitică. Construcția grafică din planul vitezelor este detaliată în fig.10.33, *a*). Prin polul vitezelor se construiește mai întâi direcția vitezei  $\bar{v}_B$  pe care se ia segmentul  $p_v b = k_v |\bar{v}_B|$ . Prin punctul  $b$  se trasează în continuare direcția vitezei  $\bar{v}_{CB}$  iar prin  $p_v$  se trasează direcția vitezei  $\bar{v}_C$ ; la intersecția acestor drepte se află punctul  $c$  în care se închide poligonul vitezelor. Pe acest poligon se marchează vectorii vitezelor respective.

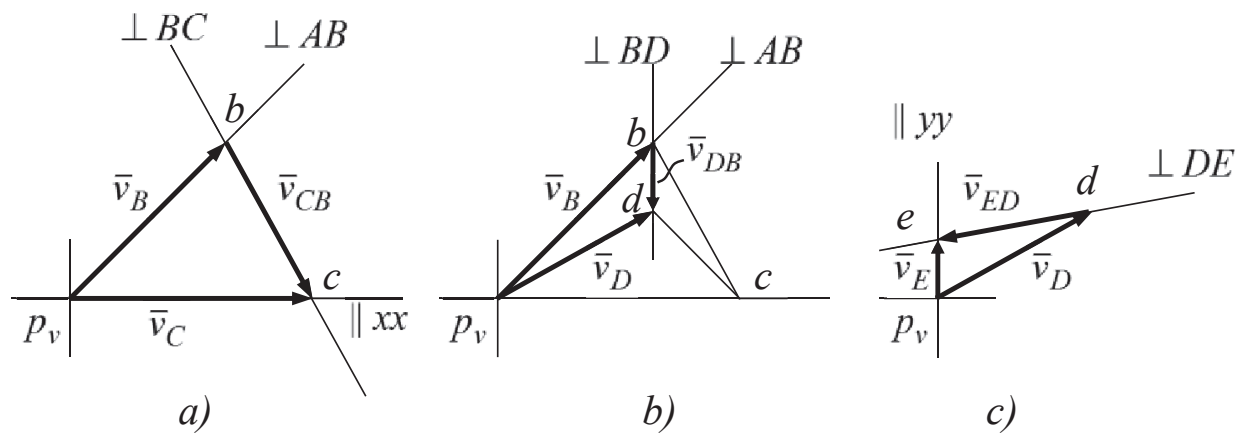


Fig.10.33

Din construcție rezultă lungimile segmentelor  $p_v c$  și  $bc$  cu care se calculează:

$$|\bar{v}_C| = \frac{l}{k_v} \cdot p_v c \quad (10.137)$$

$$|\bar{v}_{CB}| = \frac{l}{k_v} \cdot bc \quad (10.138)$$

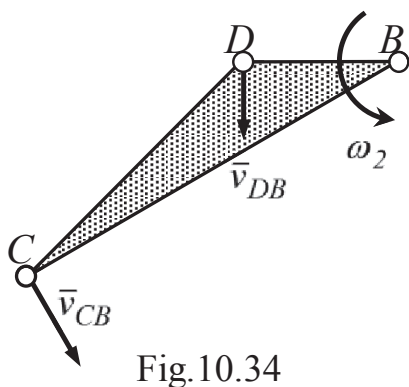


Fig.10.34

Viteza unghiulară a elementului 2 va fi:

$$\omega_2 = \frac{|\bar{v}_{CB}|}{BC} \quad (10.139)$$

Sensul acesteia este dat de viteza  $\bar{v}_{CB}$  (fig.10.34).

Pentru calculul vitezei punctului  $D$  se scrie ecuația vectorială:

$$\bar{v}_D = \underbrace{\bar{v}_B}_{\perp AB} + \underbrace{\bar{v}_{DB}}_{\perp BC} \quad (10.140)$$

în care pentru viteza  $\bar{v}_{DB}$ , reprezentată în fig.10.34, se cunosc caracteristicile:

$$\begin{cases} |\bar{v}_{DB}| = \omega_2 \cdot BD \\ \text{dir. } \bar{v}_{DB} \perp BC, \text{ sens } \bar{v}_{DB} \rightarrow \omega_2 \end{cases} \quad (10.141)$$

În planul vitezelor acesteia îi corespunde segmentul  $bd = k_v |\bar{v}_{DB}|$ . Ecuația vectorială (10.140) este transpusă în planul vitezelor în fig. 10.32, b). Din această construcție rezultă segmentul  $p_v d$  astfel că

$$|\bar{v}_D| = \frac{l}{k_v} \cdot p_v d \quad (10.142)$$

Direcția și sensul vitezei  $\bar{v}_D$  rezultă tot din această construcție grafică.

La același rezultat se poate ajunge pornind de la viteza punctului  $C$  și rezolvându-se ecuația vectorială:

$$\bar{v}_D = \underbrace{\bar{v}_C}_{\parallel xx} + \underbrace{\bar{v}_{DC}}_{\perp CD} \quad (10.143)$$

în care:

$$\begin{cases} |\bar{v}_{DC}| = \omega_2 \cdot CD \\ \text{dir. } \bar{v}_{DC} \perp CD, \text{ sens } \bar{v}_{DC} \rightarrow \omega_2 \end{cases} \quad (10.144)$$

În fig.10.33, b) viteza  $\bar{v}_{DC}$  este reprezentată de segmentul  $cd = k_v |\bar{v}_{DC}|$ .

Se poate remarca cu ușurință că triunghiul  $bcd$  format din segmentele corespunzătoare vitezelor relative  $\bar{v}_{CB}$ ,  $\bar{v}_{DB}$  și  $\bar{v}_{DC}$  este asemenea cu triunghiul real  $BCD$  datorită perpendicularității acestor viteze pe laturile triunghiului; triunghiul vitezelor relative este rotit cu  $\pi/2$  în sensul vitezei unghiulare  $\omega_2$ .

Elementul 3 are tot o mișcare plan-paralelă astfel că pentru viteza punctul  $E$  se poate scrie:

$$\bar{v}_E = \bar{v}_D + \bar{v}_{ED} \quad (10.145)$$

$\parallel yy$                        $\perp DE$

în care

$$\begin{cases} |\bar{v}_E| = ? \\ \text{dir. } \bar{v}_E \parallel yy, \text{ sens } \bar{v}_E = ? \end{cases} \quad (10.146) \quad \begin{cases} |\bar{v}_{ED}| = \omega_4 \cdot DE = ? \\ \text{dir. } \bar{v}_{ED} \perp DE, \text{ sens } \bar{v}_{ED} \rightarrow \omega_4 = ? \end{cases} \quad (10.147)$$

În planul vitezelor construcția grafică corespunzătoare este reprezentată în fig.10.33, c). Prin extremitatea vectorului  $\bar{v}_D$  se construiește o dreaptă perpendiculară pe  $DE$  iar prin polul vitezelor o dreaptă paralelă cu suportul  $yy$  pe care translatează culisa  $E$ . Poligonul vitezelor se închide în punctul  $e$  de intersecție al acestor drepte; din construcție rezultă segmentele  $p_v e$  și  $d e$  cu care se calculează:

$$|\bar{v}_E| = \frac{l}{k_v} \cdot p_v e \quad (10.148) \quad |\bar{v}_{ED}| = \frac{l}{k_v} \cdot d e \quad (10.149)$$

Viteza unghiulară a elementului  $DE$  se determină cu relația:

$$\omega_4 = \frac{|\bar{v}_{ED}|}{DE} \quad (10.150)$$

Sensul acesteia este dat de  $\bar{v}_{ED}$  (fig.10.35).

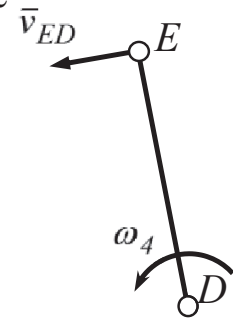


Fig.10.35

În mișcarea de rotație a manivelei  $l$  accelerația punctului  $B$  este:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_B^v + \bar{a}_B^\tau \quad (10.151)$$

în care cele două componente au caracteristicile:

$$\begin{cases} |\bar{a}_B^v| = \omega_l^2 \cdot AB \\ \text{dir. } \bar{a}_B^v \parallel AB, \text{ sens } \bar{a}_B^v : B \rightarrow A \end{cases} \quad (10.152) \quad \begin{cases} |\bar{a}_B^\tau| = \varepsilon_l \cdot AB \\ \text{dir. } \bar{a}_B^\tau \perp AB; \text{ sens } \bar{a}_B^\tau \rightarrow \varepsilon_l \end{cases} \quad (10.153)$$

Corespunzător mișcării plan-paralele a elementului 2 se poate scrie ecuația:

$$\bar{a}_C = \bar{a}_B + \bar{a}_{CB} \quad \rightarrow \quad \bar{a}_C = \bar{a}_B^v + \bar{a}_B^\tau + \bar{a}_{CB}^v + \bar{a}_{CB}^\tau \quad (10.154)$$

$\parallel xx$                        $\parallel AB$      $\perp AB$                        $\parallel BC$      $\perp BC$

Punctul  $C$  are o translație impusă în lungul direcției  $xx$ :

$$\begin{cases} |\bar{a}_C| = ? \\ \text{dir. } \bar{a}_C \parallel xx; \text{ sens } \bar{a}_C = ? \end{cases} \quad (10.155)$$

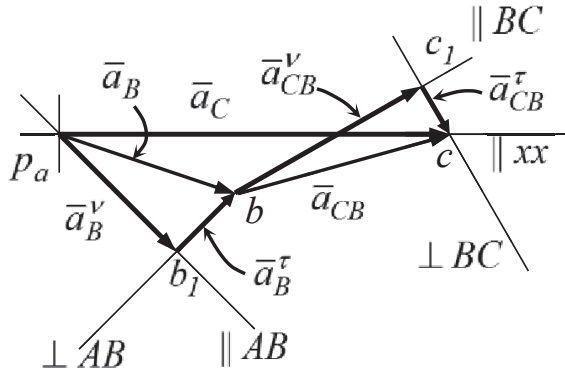


Fig.10.36

Accelerația punctului  $C$  față de  $B$  are componentele:

$$\begin{cases} |\bar{a}_{CB}^v| = \omega_2^2 \cdot BC \\ \text{dir. } \bar{a}_{CB}^v \parallel BC; \text{ sens } \bar{a}_{CB}^v : C \rightarrow B \end{cases} \quad (10.156)$$

$$\begin{cases} |\bar{a}_{CB}^\tau| = \varepsilon_2 \cdot BC = ? \\ \text{dir. } \bar{a}_{CB}^\tau \parallel BC; \text{ sens } \bar{a}_{CB}^\tau \rightarrow \varepsilon_2 = ? \end{cases} \quad (10.157)$$

Ecuția (10.154) se rezolvă grafo-analitic în modul arătat în fig.10.36. Se alege un factor de scară pentru accelerații  $k_a$  și se construiesc segmentele corespunzătoare accelerațiilor cunoscute integral  $p_a b_1 = k_a |\bar{a}_B^v|$ ,  $b_1 b = k_a |\bar{a}_B^\tau|$ ,  $b c_1 = k_a |\bar{a}_{CB}^v|$ . Prin  $c_1$  se construiește direcția accelerației  $\bar{a}_{CB}^\tau$  iar prin polul  $p_a$  direcția accelerației  $\bar{a}_C$ . Poligonul accelerațiilor se închide în punctul  $c$ ; din construcție rezultă la scară segmentele  $c_1 c$  și  $p_a c$  cu care se calculează accelerațiile:

$$|\bar{a}_C| = \frac{I}{k_a} \cdot p_a c \quad (10.158)$$

$$|\bar{a}_{CB}^\tau| = \frac{I}{k_a} \cdot c_1 c \quad (10.159)$$

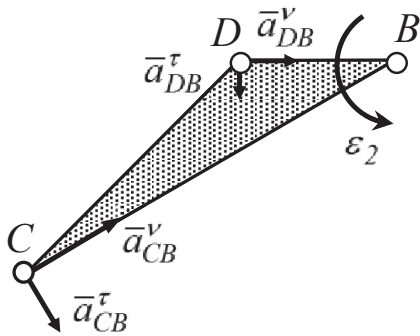


Fig.10.37

Accelerația unghiulară a elementului 2 se calculează cu relația:

$$\varepsilon_2 = \frac{|\bar{a}_{CB}^\tau|}{BC} \quad (10.160)$$

Sensul acesteia este dat de accelerația  $\bar{a}_{CB}^\tau$  (fig.10.37).

Accelerația punctului  $D$  este determinată de ecuația:

$$\bar{a}_D = \bar{a}_B + \bar{a}_{DB} \rightarrow \bar{a}_D = \frac{\bar{a}_B^v}{\parallel AB} + \frac{\bar{a}_B^\tau}{\perp AB} + \frac{\bar{a}_{DB}^v}{\parallel BD} + \frac{\bar{a}_{DB}^\tau}{\perp BD} \quad (10.161)$$

Componentele accelerației punctului  $D$  în raport cu  $B$  sunt descrise prin relațiile:

$$\begin{cases} |\bar{a}_{DB}^v| = \omega_2^2 \cdot BD \\ \text{dir. } \bar{a}_{DB}^v \parallel BD; \text{ sens } \bar{a}_{DB}^v : D \rightarrow B \end{cases} \quad (10.162)$$

$$\begin{cases} |\bar{a}_{DB}^\tau| = \varepsilon_2 \cdot BD \\ \text{dir. } \bar{a}_{DB}^\tau \perp BD; \text{ sens } \bar{a}_{DB}^\tau \rightarrow \varepsilon_2 \end{cases} \quad (10.163)$$

Ecuția vectorială (10.161) este transpusă grafic în planul accelerațiilor în fig.10.38 în care la segmentele accelerației punctului  $B$  se adaugă segmentele  $b d_1 = k_a |\bar{a}_{DB}^v|$  și  $d_1 d = k_a |\bar{a}_{DB}^\tau|$ .



În urma construcției grafice la scară rezultă segmentul  $p_a d$  cu care se determină:

$$|\bar{a}_D| = \frac{l}{k_a} \cdot p_a d \quad (10.164)$$

Se calculează în continuare accelerația punctului  $E$  care se află pe direcția de translație a culisei 5. Corespunzător mișcării plan-paralele a elementului 4 se scrie ecuația vectorială:

$$\bar{a}_E = \bar{a}_D + \bar{a}_{ED} \rightarrow \frac{\bar{a}_E}{|v_y|} = \frac{\bar{a}_D}{|v_x|} + \frac{\bar{a}_{ED}^v}{|DE|} + \frac{\bar{a}_{ED}^r}{\perp DE} \quad (10.165)$$

Componentelor accelerației relative a punctului  $E$  în raport cu  $D$  au caracteristicile:

$$\begin{cases} |\bar{a}_{ED}^v| = \omega_4^2 \cdot DE \\ \text{dir. } \bar{a}_{ED}^v \parallel DE; \text{ sens } \bar{a}_{ED}^v : E \rightarrow D \end{cases} \quad (10.166)$$

$$\begin{cases} |\bar{a}_{ED}^r| = \varepsilon_4 \cdot DE = ? \\ \text{dir. } \bar{a}_{ED}^r \perp DE; \text{ sens } \bar{a}_{ED}^r \rightarrow \varepsilon_4 = ? \end{cases} \quad (10.167)$$

Ecuația vectorială (10.165), transpusă în planul accelerațiilor, este reprezentată în fig.10.39; la segmentul  $p_a d$ , corespunzător accelerației  $\bar{a}_D$ , se adaugă segmentul  $de_1 = k_a |\bar{a}_{ED}^v|$ . Prin  $e_1$  și  $p_a$  se duc direcțiile accelerațiilor necunoscute; poligonul se închide în punctul  $e$  de intersecție al acestora. Rezultă:

$$|\bar{a}_E| = \frac{l}{k_a} \cdot p_a e \quad (10.168) \quad |\bar{a}_{ED}^r| = \frac{l}{k_a} \cdot e_1 e \quad (10.169)$$

$$\varepsilon_4 = \frac{|\bar{a}_{ED}^r|}{DE} \quad (10.170)$$

Sensul accelerației unghiulare  $\varepsilon_4$  este dat de  $\bar{a}_{ED}^r$  și este reprezentat în fig.10.40.

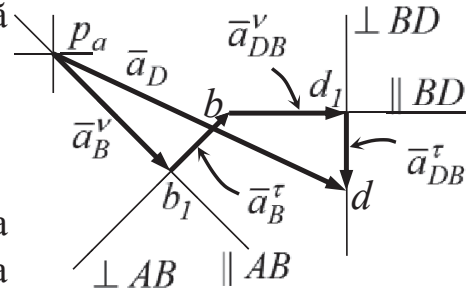


Fig.10.38

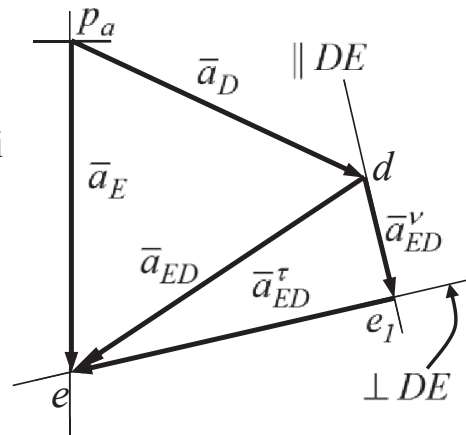


Fig.10.39

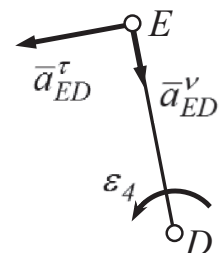


Fig.10.40

### 10.4.5 Metoda analitică

Relațiile vectoriale dintre parametrii cinematici ai unei mișcări plane pot fi proiectate pe axele unui sistem de referință. Se obține un sistem de ecuații scalare din care se pot explicita relațiile efective pentru calculul parametrilor necunoscuți. Într-un context mai larg, aceste relații pot fi înglobate într-un algoritm de calcul programabil. Pe baza acestuia se pot face determinări numerice exacte și rapide pentru un ciclu cinematic, eventualele reprezentări grafice având doar un rol ilustrativ.

Un corp posedă un sistem de referință mobil propriu  $Oxy$ , numit *sistem local*. Sistemul de referință fix  $O_1XY$  la care se raportează mișcarea mai multor corpuri se va numi *sistemul global*<sup>\*)</sup>.

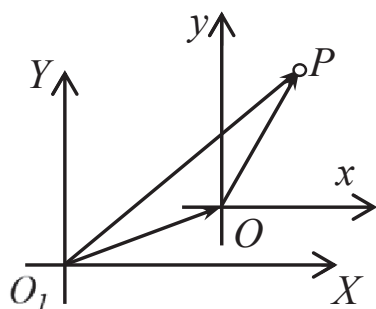


Fig.10.41

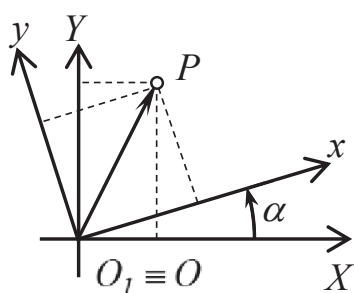


Fig.10.42

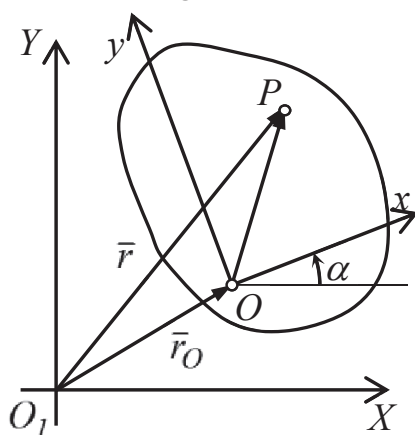


Fig.10.43

Se consideră un punct  $P$  având coordonatele  $(x, y)$  în sistemul local și  $(X, Y)$  în sistemul global. În cazul unui sistem local traslatat față de cel global (fig.10.41), între vectorii de poziție există legătura:

$$\overline{O_1P} = \overline{O_1O} + \overline{OP} \quad (10.171)$$

care se traduce prin relația între coordonate:

$$X = X_O + x \quad Y = Y_O + y \quad (10.172)$$

Această relație poate fi pusă sub forma matriceală:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_O \\ Y_O \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (10.173)$$

Dacă sistemul local este rotit față de cel global cu un unghi  $\alpha$  (fig.10.42), legătura între coordonate se exprimă prin relațiile:

$$\begin{cases} X = x \cos \alpha - y \sin \alpha \\ Y = x \sin \alpha + y \cos \alpha \end{cases} \quad (10.174)$$

Relația matriceală echivalentă este:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (10.175)$$

S-a arătat că mișcarea plan-paralelă poate fi considerată ca o compunere între o translație cu coordonatele originii sistemului său de referință și o rotație de unghi  $\alpha$  (fig.10.43). Relația vectorială pentru poziția punctului  $P$ :

$$\vec{r} = \vec{r}_O + \overline{OP} \quad (10.176)$$

se exprimă matriceal prin combinarea relațiilor de mai sus:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_O \\ Y_O \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (10.177)$$

Din această relație se obțin ecuațiile scalare:

$$X = X_O + x \cos \alpha - y \sin \alpha \quad Y = Y_O + x \sin \alpha + y \cos \alpha \quad (10.178)$$

Unghiul de rotație  $\alpha$  făcut de axa  $Ox$  cu o paralelă în  $O$  la  $O_1X$  este un unghi orientat, pozitiv în sens trigonometric. Derivatele sale, respectiv viteza unghiulară  $\omega$  și accelerația unghiulară  $\varepsilon$  sunt pozitive dacă sensul lor corespunde celui trigonometric.

<sup>\*)</sup> Notația cu majuscule a sistemului global s-a adoptat pentru a se evita confuzia cu sistemele locale numerotate.

Viteza punctului  $P$  se exprimă prin relația generală:

$$\bar{v} = \bar{v}_O + \bar{v}_{PO} \quad (10.179)$$

Viteza  $\bar{v}_{PO}$  este perpendiculară pe raza  $OP$  și are sensul dat de  $\omega$  (fig.10.44). Proiecțiile locale ale acestei viteze (cf. cap.9.32) sunt:

$$v_x = -y\omega \quad v_y = x\omega \quad (10.180)$$

Ecuția (10.179) se poate pune sub forma matriceală:

$$\begin{bmatrix} v_X \\ v_Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{OX} \\ v_{OY} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} \quad (10.181)$$

din care rezultă ecuațiile scalare:

$$\begin{cases} v_X = v_{OX} + v_x \cos\alpha - v_y \sin\alpha \\ v_Y = v_{OY} + v_x \sin\alpha + v_y \cos\alpha \end{cases} \quad (10.182)$$

Pentru accelerația punctului  $P$  se scrie relația:

$$\bar{a} = \bar{a}_O + \bar{a}_{PO} \quad (10.183)$$

în care proiecțiile locale ale accelerației  $\bar{a}_{PO}$  (fig.10.45) sunt:

$$a_x = -x\omega^2 - y\varepsilon \quad a_y = -y\omega^2 + x\varepsilon \quad (10.184)$$

Ecuția matriceală corespunzătoare relației (10.183) și ecuațiile scalare generate sunt:

$$\begin{bmatrix} a_X \\ a_Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{OX} \\ a_{OY} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix} \quad (10.185)$$

$$\begin{cases} a_X = a_{OX} + a_x \cos\alpha - a_y \sin\alpha \\ a_Y = a_{OY} + a_x \sin\alpha + a_y \cos\alpha \end{cases} \quad (10.186)$$

În cazul al unei bare rectilinii  $AB$  (fig.10.46) se poate alege punctul  $A$  drept origine a sistemului local iar axa  $Ax$  se suprapune direcției barei. Coordonatele locale ale punctului  $B$  sunt în acest caz:

$$x = AB \quad y = 0 \quad (10.187)$$

Coordonatele globale ale acestui punct sunt definite prin relația matriceală:

$$\begin{bmatrix} X_B \\ Y_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_A \\ Y_A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} AB \\ 0 \end{bmatrix} \quad (10.188)$$

care conduce la ecuațiile scalare:

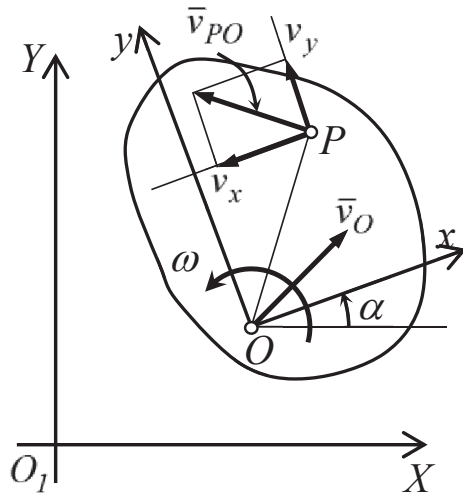


Fig.10.44

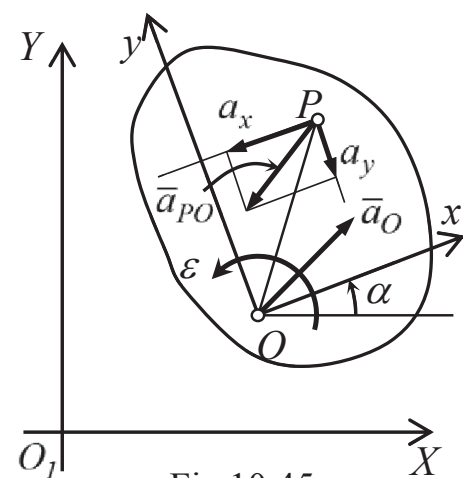


Fig.10.45

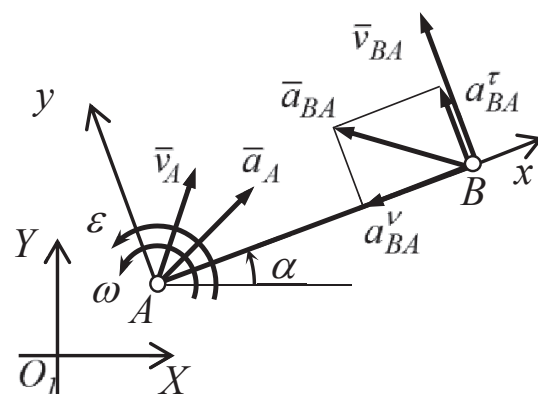


Fig.10.46

$$\begin{cases} X_B = X_A + AB \cos \alpha \\ Y_B = Y_A + AB \sin \alpha \end{cases} \quad (10.189)$$

În ecuația lui Euler pentru viteze:

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA} \quad (10.190)$$

viteza relativă a punctului  $B$  față de  $A$  are componentele:

$$v_x = -y\omega = 0 \quad v_y = x\omega = AB\omega = v_{BA} \quad (10.191)$$

Forma matriceală a acestei ecuații vectoriale este:

$$\begin{bmatrix} v_{BX} \\ v_{BY} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{AX} \\ v_{AY} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ v_{BA} \end{bmatrix} \quad (10.192)$$

iar ecuațiile scalare care provin din ea sunt:

$$\begin{cases} v_{BX} = v_{AX} - v_{BA} \sin \alpha \\ v_{BY} = v_{AY} + v_{BA} \cos \alpha \end{cases} \quad (10.193)$$

În ecuația lui Euler pentru accelerații:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA} = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^v + \bar{a}_{BA}^\tau \quad (10.194)$$

accelerația relativă a punctului  $B$  față de  $A$  are componentele:

$$a_x = -x\omega^2 - y\varepsilon = -AB\omega^2 \equiv a_{BA}^v \quad a_y = -y\omega^2 + x\varepsilon = AB\varepsilon \equiv a_{BA}^\tau \quad (10.195)$$

În acest caz ecuația matriceală este:

$$\begin{bmatrix} a_{BX} \\ a_{BY} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{AX} \\ a_{AY} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{BA}^v \\ a_{BA}^\tau \end{bmatrix} \quad (10.196)$$

din care se obțin ecuațiile scalare corespondente:

$$\begin{cases} a_{BX} = a_{AX} + a_{BA}^v \cos \alpha - a_{BA}^\tau \sin \alpha \\ a_{BY} = a_{AY} + a_{BA}^v \sin \alpha + a_{BA}^\tau \cos \alpha \end{cases} \quad (10.197)$$

Trebuie pus în evidență și avantajul că, în urma efectuării calculelor, parametrii unghiulari  $\omega$  și  $\varepsilon$  vor rezulta cu semnele corespunzătoare convenției menționate mai înainte; valorile lor pozitive vor indica un sens corespunzător celui trigonometric.

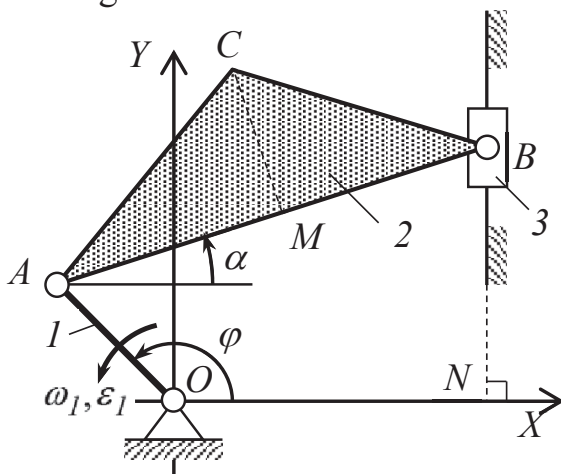


Fig.10.47

**Problema 10.8** La mecanismul bielă-manivelă din fig.10.47 se cunosc dimensiunile și legea de mișcare a manivelei conducătoare. Să se stabilească un algoritm pentru calculul cinematic integral al mecanismului.

Date:  $OA, AB, X_B = ON, x_C = AM, y_C = MC; \varphi = \varphi(t), \omega_1, \varepsilon_1$

Cerute:  $(X, Y, v, a)$  pentru  $A, B, C;$   
 $\alpha, \omega_2, \varepsilon_2$

Rezolvare: Din ecuația matriceală:

$$\begin{bmatrix} X_A \\ Y_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} AB \\ 0 \end{bmatrix} \quad (10.198)$$

se obțin coordonatele punctului  $A$ :

$$X_A = AB\cos\varphi \quad Y_A = AB\sin\varphi \quad (10.199)$$

Punctul  $B$  se mișcă pe un suport paralel cu axa  $OY$  astfel că rezultă ecuațiile:

$$\begin{bmatrix} X_B \\ Y_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_A \\ Y_A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} AB \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} X_B = X_A + AB\cos\alpha \\ Y_B = Y_A + AB\sin\alpha \end{cases} \quad (10.200)$$

Cu observația că în configurația dată unghiul de poziție  $\alpha$  are valori numai în cadranul I, în care funcția *sinus* este pozitivă, se deduc relațiile:

$$\cos\alpha = \frac{X_B - X_A}{AB} \quad \sin\alpha = +\sqrt{1 - \cos^2\alpha} \quad (10.201)$$

cu care se calculează apoi  $Y_B$ . Coordonatele globale ale punctului  $C$  sunt:

$$\begin{bmatrix} X_C \\ Y_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_A \\ Y_A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_C \\ y_C \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} X_C = X_A + x_C \cos\alpha - y_C \sin\alpha \\ Y_C = Y_A + x_C \sin\alpha + y_C \cos\alpha \end{cases} \quad (10.202)$$

Viteza punctului  $A$  este:

$$v_A = \omega_1 \cdot OA \quad (10.203)$$

cu proiecțiile date de relațiile:

$$\begin{bmatrix} v_{AX} \\ v_{AY} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ v_A \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} v_{AX} = -v_A \sin\varphi \\ v_{AY} = v_A \cos\varphi \end{cases} \quad (10.204)$$

Viteza punctului  $B$  are direcția suportului de translație al culisei astfel că  $v_{BX} = 0$

și  $v_{BY} \equiv v_B$ .

$$\begin{bmatrix} 0 \\ v_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{AX} \\ v_{AY} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ v_{BA} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} 0 = v_{AX} - v_{BA} \sin\alpha \\ v_B = v_{AY} + v_{BA} \cos\alpha \end{cases} \quad (10.205)$$

Din prima ecuație se extrage viteza relativă a lui  $B$  față de  $A$  și viteza unghiulară a bielei 2:

$$v_{BA} = \frac{v_{AX}}{\sin\alpha} \quad (10.206)$$

$$\omega_2 = \frac{v_{BA}}{AB} \quad (10.207)$$

cu care se calculează apoi  $v_B$ . Viteza relativă a punctului  $C$  față de  $A$  se calculează în funcție de  $\omega_2$  și de coordonatele locale ale acestuia:

$$v_x = -y_C \omega_2 \quad v_y = x_C \omega_2 \quad (10.208)$$

Viteza  $v_C$  are proiecțiile pe axele sistemului fix:

$$\begin{bmatrix} v_{CX} \\ v_{CY} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{AX} \\ v_{AY} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} v_{CX} = v_{AX} + v_x \cos\alpha - v_y \sin\alpha \\ v_{CY} = v_{AY} + v_x \sin\alpha + v_y \cos\alpha \end{cases} \quad (10.209)$$

Valoarea totală a acestei viteze este:

$$v_C = \sqrt{v_{CX}^2 + v_{CY}^2} \quad (10.210)$$

Pentru accelerația punctului  $A$  se poate scrie:

$$a_A^v = -\omega_1^2 \cdot OA \quad a_A^\tau = \varepsilon_1 \cdot OA \quad a_A = \sqrt{(a_A^v)^2 + (a_A^\tau)^2} \quad (10.211)$$

Proiecțiile pe axele sistemului fix se calculează cu relațiile:

$$\begin{bmatrix} a_{AX} \\ a_{AY} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_A^v \\ a_A^\tau \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} a_{AX} = a_A^v \cos\varphi - a_A^\tau \sin\varphi \\ a_{AY} = a_A^v \sin\varphi + a_A^\tau \cos\varphi \end{cases} \quad (10.212)$$

Accelerația punctului  $B$  are direcția suportului de translație al culisei, astfel că  $a_{BX} = 0$  și  $a_{BY} \equiv a_B$ . Pentru aceasta se pot scrie ecuațiile:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ a_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{AX} \\ a_{AY} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{BA}^v \\ a_{BA}^\tau \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} 0 = a_{AX} + a_{BA}^v \cos\alpha - a_{BA}^\tau \sin\alpha \\ a_B = a_{AY} + a_{BA}^v \sin\alpha + a_{BA}^\tau \cos\alpha \end{cases} \quad (10.213)$$

Accelerația relativă a punctului  $B$  față de  $A$  are componenta normală:

$$a_{BA}^v = -\omega_2^2 \cdot AB \quad (10.214)$$

Componenta tangențială a acesteia și accelerația unghiulară a bielei se vor calcula cu relațiile

$$a_{BA}^\tau = \frac{a_{AX} + a_{BA}^v \cos\alpha}{\sin\alpha} \quad (10.215) \quad \varepsilon_2 = \frac{a_{BA}^\tau}{AB} \quad (10.216)$$

după care se evaluează accelerația  $a_B$  cu relația de mai sus. Accelerația relativă a punctului  $C$  față de  $A$  are componentele locale:

$$a_x = -x_C \omega_2^2 - y_C \varepsilon_2 \quad a_y = -y_C \omega_2^2 + x_C \varepsilon_2 \quad (10.217)$$

Pentru accelerația totală se scriu relațiile

$$\begin{bmatrix} a_{CX} \\ a_{CY} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{AX} \\ a_{AY} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} a_{CX} = a_{AX} + a_x \cos\alpha - a_y \sin\alpha \\ a_{CY} = a_{AY} + a_x \sin\alpha + a_y \cos\alpha \end{cases} \quad (10.218)$$

Valoarea acesteia este dată de relația:

$$a_C = \sqrt{a_{CX}^2 + a_{CY}^2} \quad (10.219)$$

Din relațiile deduse mai sus se pot extrage numai relațiile finale pentru fiecare parametru, relații care se pot dispune în ordinea logică a efectuării calculului; se obține astfel algoritmul grupat în tab.10.2.

Dacă analiza se face pentru un ciclu cinematic, algoritmul va fi precedat de relațiile care generează valorile parametrilor cinematici ai elementului conducător  $\varphi, \omega_1, \varepsilon_1$ . În descrierea legii de mișcare parametrul independent poate fi timpul  $t$  sau unghiul  $\varphi$ . În ciclul cinematic pot apare și poziții critice în care continuarea mișcării este nedeterminată. În aplicația de față o asemenea poziție este cea în care bara  $AB$  este perpendiculară pe suportul translației ( $\alpha = 0$ ).

Pe baza algoritmului se poate alcătui în continuare un program de calcul într-unul din limbajele de programare uzuale. Se exemplifică programarea algoritmului aplicației într-o secvență de procedură în Turbo-Pascal.

**Tabelul 10.2**

Nr.	Relația de calcul	Nume	Secvența de program
1	$X_A = AB \cos \varphi$	xa	{date x=AM, y=MC, xb=XB, lab=AB, loa=OA}
2	$Y_A = AB \sin \varphi$	ya	.
3	$\cos \alpha = (X_B - X_A) / AB$	ca	.
4	$\sin \alpha = +\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$	sa	{legea de miscare}
5	$Y_B = Y_A + AB \sin \alpha$	yb	fi:=...;
6	$X_C = X_A + x_C \cos \alpha - y_C \sin \alpha$	xc	om1:=...;
7	$Y_C = Y_A + x_C \sin \alpha + y_C \cos \alpha$	yc	eps1:=...;
8	$v_A = \omega_1 \cdot OA$	va	cfi:=cos(fi);
9	$v_{AX} = -v_A \sin \varphi$	vax	sfi:=sin(fi);
10	$v_{AY} = v_A \sin \varphi$	vay	{calcul pozitii}
11	$v_{BA} = v_{AX} / \sin \alpha$	vba	xa:=lab*cfi;
12	$v_B = v_{AY} + v_{BA} \cos \alpha$	vb	ya:=lab*sfi;
13	$\omega_2 = v_{BA} / AB$	om2	ca:=(xb-xa)/lab;
14	$v_x = -y_C \omega_2$	vx	sa:=sqrt(1-ca*ca);
15	$v_y = x_C \omega_2$	vy	yb:=ya+lab*sa;
16	$v_{CX} = v_{AX} + v_x \cos \alpha - v_y \sin \alpha$	vcx	xc:=xa+x*ca-y*sa;
17	$v_{CY} = v_{AY} + v_x \sin \alpha + v_y \cos \alpha$	vcy	yc:=ya+x*sa+y*ca;
18	$v_C = \sqrt{v_{CX}^2 + v_{CY}^2}$	vc	{calcul viteze}
19	$a_A^v = -\omega_1^2 \cdot OA$	aan	va:=om1*loa;
20	$a_A^\tau = \varepsilon_1 \cdot OA$	aat	vax:=-va*sfi;
21	$a_A = \sqrt{(a_A^v)^2 + (a_A^\tau)^2}$	aa	vay:=va*sfi;
22	$a_{AX} = a_A^v \cos \varphi - a_A^\tau \sin \varphi$	aax	vba:=vax/sa;
23	$a_{AY} = a_A^v \sin \varphi + a_A^\tau \cos \varphi$	aay	vb:=vay+vba*ca;
24	$a_{BA}^v = -\omega_2^2 \cdot AB$	aban	om2:=vba/lab;

Tabelul 10.2 (continuare)

25	$a_{BA}^{\tau} = (a_{AX} + a_{BA}^V \cos \alpha) / \sin \alpha$	abat	$\begin{aligned} \text{aban} &:= -\text{om2} * \text{om2} * \text{lab}; \\ \text{abat} &:= (\text{aax} + \text{aban} * \text{ca}) / \text{sa}; \\ \text{eps2} &:= \text{abat} / \text{lab}; \\ \text{ab} &:= \text{aay} + \text{aban} * \text{sa} + \text{abat} * \text{ca}; \\ \text{ax} &:= -x * \text{om2} * \text{om2} - y * \text{eps2}; \\ \text{ay} &:= -y * \text{om2} * \text{om2} + x * \text{eps2}; \\ \text{acx} &:= \text{aax} + \text{ax} * \text{ca} - \text{ay} * \text{sa}; \\ \text{acy} &:= \text{aay} + \text{ax} * \text{sa} + \text{ay} * \text{ca}; \\ \text{ac} &:= \text{sqrt}(\text{acx} * \text{acx} + \\ &\quad \text{acy} * \text{acy}); \end{aligned}$
26	$\varepsilon_2 = a_{BA}^{\tau} / AB$	eps2	
27	$a_B = a_{AY} + a_{BA}^V \sin \alpha + a_{BA}^{\tau} \cos \alpha$	ab	
28	$a_x = -x_C \omega_2^2 - y_C \varepsilon_2$	ax	
29	$a_y = -y_C \omega_2^2 + x_C \varepsilon_2$	ay	
30	$a_{CX} = a_{AX} + a_x \cos \alpha - a_y \sin \alpha$	acx	
31	$a_{CY} = a_{AY} + a_x \sin \alpha + a_y \cos \alpha$	acy	
32	$a_C = \sqrt{a_{CX}^2 + a_{CY}^2}$	ac	

### 10.5 Mișcarea corpului cu un punct fix

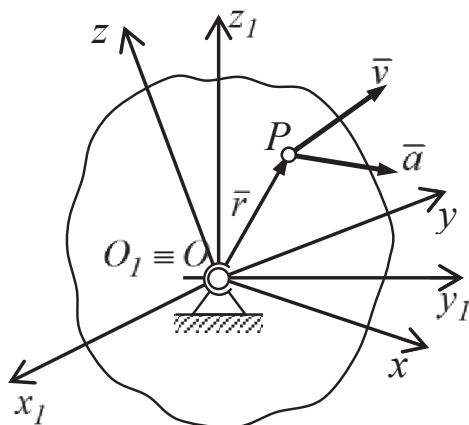


Fig.10.48

În aceasta mișcare *un punct al corpului rămâne tot timpul într-un punct fix din spațiu*; legătura corespunzătoare este articulația sferică (fig.10.48). Cele două sisteme de referință, respectiv sistemul fix  $O_1x_1y_1z_1$  și sistemul mobil  $Oxyz$ , se aleg pentru comoditatea tratării cu originile în acest punct fix:

$$\bar{r}_O = 0 \quad \bar{v}_O = 0 \quad \bar{a}_O = 0 \quad (10.220)$$

După cum s-a arătat în cap.6.2, o articulație sferică răpește corpului trei grade de libertate (din cele șase posibile în cazul general al unui solid rigid liber), respectiv cele trei translații. În

consecință, corpul cu un punct fix va avea celelalte trei grade de libertate, respectiv cele trei rotații. Parametrii poziționali independenți corespunzători sunt unghiurile prin care sistemul mobil, solidar cu corpul, se poziționează față de sistemul fix.

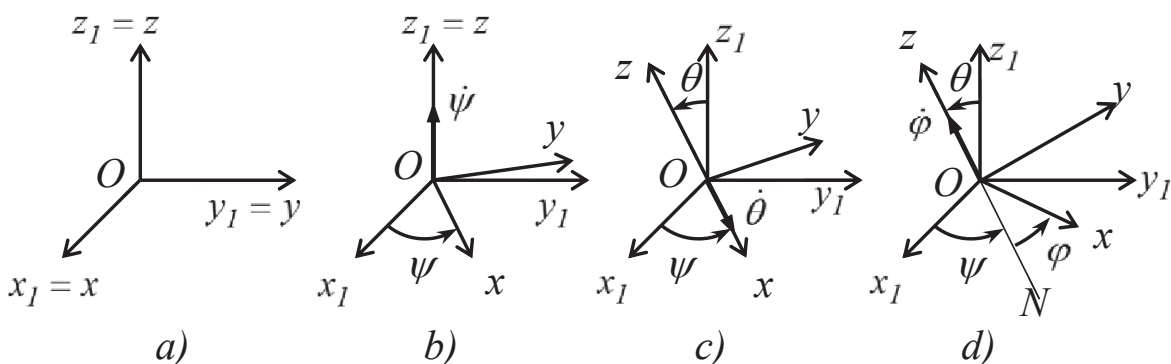


Fig.10.49



Definirea acestor unghiuri, numite *unghiurile lui Euler*, poate fi mai ușor urmărită prin succesiunea ilustrată în fig.10.49. Pornind de la situația în care cele două sisteme sunt suprapuse (fig.10.49, a), se face mai întâi o rotație de unghi  $\psi$  în jurul axei  $Oz_1$  (fig.10.49. b). Se menține apoi fixă axa  $Ox$  și se execută o rotație de unghi  $\theta$  în jurul acesteia (fig.10.49, c). Păstrând în continuare fixă poziția axei  $Oz$ , se face o rotație de unghi  $\varphi$  în jurul ei (fig.10.49. d); linia  $ON$  reprezintă poziția axei  $Ox$  înaintea acestei rotații\*).

Pentru mișcarea corpului cu un punct fix parametrii poziționali sunt funcțiile:

$$\psi = \psi(t) \quad \theta = \theta(t) \quad \varphi = \varphi(t) \quad (10.221)$$

Variația lor în raport cu timpul este reprezentată de derivatele  $\dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}$  care corespund vitezelor unghiulare parțiale cu care s-au efectuat rotațiile descrise mai sus. Vectorii acestor viteze unghiulare au direcțiile axelor de rotație (fig.10.50). Rotația corpului în jurul punctului fix  $O$  se face cu:

$$\bar{\omega} = \omega_x \bar{i} + \omega_y \bar{j} + \omega_z \bar{k} \quad \bar{\varepsilon} = \varepsilon_x \bar{i} + \varepsilon_y \bar{j} + \varepsilon_z \bar{k} \quad (10.222)$$

Viteza unghiulară  $\bar{\omega}$  este o rezultantă celor trei viteze unghiulare parțiale și în consecință proiecțiile ei pe axele sistemului de referință mobil vor fi:

$$\begin{cases} \omega_x = \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi \\ \omega_y = \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi \\ \omega_z = \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta \end{cases} \quad (10.223)$$

Datorită modului în care au fost alese axele de coordonate, relațiile lui Euler pentru viteza și accelerația unui punct oarecare  $P$  vor avea o formă simplificată:

$$\begin{cases} \bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r} \\ \bar{a} = \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) \end{cases} \quad (10.224)$$

Proiecțiile acestora pe axele sistemului de coordonate mobil, solidar cu corpul, se deduc pornind de la relațiile generale stabilite în cap.10.2. Pentru viteză acestea sunt:

$$\begin{cases} v_x = z\omega_y - y\omega_z \\ v_y = x\omega_z - z\omega_x \\ v_z = y\omega_x - x\omega_y \end{cases} \quad (10.225)$$

corespunzător relației matriceale:

\*) Unghiurile lui Euler, utilizate mai mult în calculele poziționale din Astronomie, păstrează și în Mecanică următoarele denumiri:  $\psi$  – unghiul de precesie,  $\theta$  – unghiul de nutație,  $\varphi$  – unghiul rotației proprii,  $ON$  – linia nodurilor.

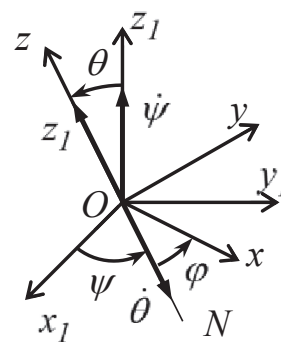


Fig.10.50

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (10.226)$$

Proiecțiile accelerației se calculează cu relațiile:

$$\begin{cases} a_x = z\varepsilon_y - y\varepsilon_z + \omega_y(y\omega_x - x\omega_y) - \omega_z(x\omega_z - z\omega_x) \\ a_y = x\varepsilon_z - z\varepsilon_x + \omega_z(z\omega_y - y\omega_z) - \omega_x(y\omega_x - x\omega_y) \\ a_z = y\varepsilon_x - x\varepsilon_y + \omega_x(x\omega_z - z\omega_x) - \omega_y(z\omega_y - y\omega_z) \end{cases} \quad (10.227)$$

iar relația matriceală corespondentă este:

$$\begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\varepsilon_z & \varepsilon_y \\ \varepsilon_z & 0 & -\varepsilon_x \\ -\varepsilon_y & \varepsilon_x & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} \quad (10.228)$$

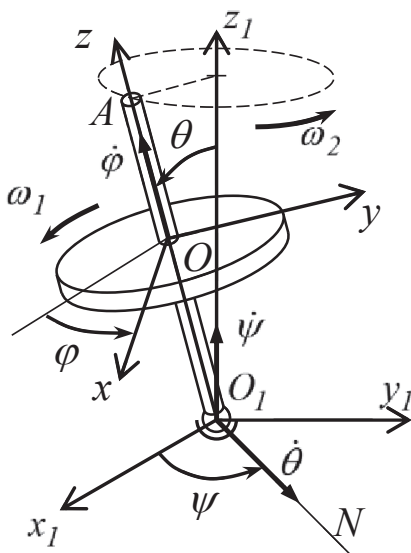


Fig.10.51

**Problema 10.9** În fig.10.51 este reprezentat un giroscop necentrat, format dintr-un disc și un ax având o articulație sferică la una dintre extremități; giroscopul se rotește cu  $\omega_1$  în jurul axei sale de simetrie în timp ce aceasta se rotește cu  $\omega_2$  în jurul unei axe fixe care trece prin articulația sferică. Să se identifice unghiurile lui Euler și să se calculeze viteza unghiulară totală.

*Date:*  $\omega_1, \omega_2$

*Cerute:*  $\psi, \theta, \varphi, \omega$

*Rezolvare:* Se alege un sistem de referință mobil cu axa  $Oz$  suprapusă axului giroscopului și cu axele  $Ox$  și  $Oy$  în planul discului. Aceasta va face unghiul de nutație  $\theta$  cu axa fixă  $O_1z_1$ . Linia nodurilor  $O_1N$

este perpendiculară pe planul format de axele  $O_1z_1$  și  $O_1z$ ; ea se află în planul fix  $O_1x_1y_1$  și face unghiul de precesie  $\psi$  cu  $O_1x_1$ . Unghiul de rotație proprie  $\varphi$  este făcut de axa  $Ox$  cu direcția sa inițială. Vitezele unghiulare corespunzătoare variației unghiurilor lui Euler sunt reprezentate în fig.10.50. În ipoteza că extremitatea  $A$  a axului giroscopului descrie o traiectorie circulară în jurul axei  $O_1z_1$ , unghiul  $\theta$  este constant și în consecință:

$$\dot{\psi} = \omega_2 \quad \dot{\varphi} = \omega_1 \quad \dot{\theta} = 0 \quad (10.229)$$

Se fac înlocuirile în relațiile (10.222) și se calculează în final:

$$\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2} = \sqrt{\dot{\psi}^2 + \dot{\varphi}^2 + 2\dot{\psi}\dot{\varphi}\cos\theta} = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + 2\omega_1\omega_2\cos\theta} \quad (10.230)$$

În sistemul de referință mobil considerat, relațiile pentru calculul poziției vitezei și accelerației unui punct oarecare al giroscopului iau forma generală stabilită în cap.10.2

## 11. MIȘCĂRI COMPUSE

### 11.1 Generalități

Un punct material sau un corp solid rigid se poate deplasa în raport cu un sistem de referință mobil (*SRM*) în timp ce acesta se deplasează față de un sistem de referință fix (*SRF*). În fig.11.1 se exemplifică aceste mișcări pentru cazul unui punct material  $P$ . Se introduc următoarele definiții:

– *mișcarea absolută* ( $MA$ ) – punctul  $P$  față de sistemul de referință fix *SRF*;

– *mișcarea relativă* ( $MR$ ) – punctul  $P$  față de sistemul de referință mobil *SRM*;

– *mișcarea de transport* ( $MT$ ) – sistemul de referință mobil *SRM* față de cel fix *SRF*.

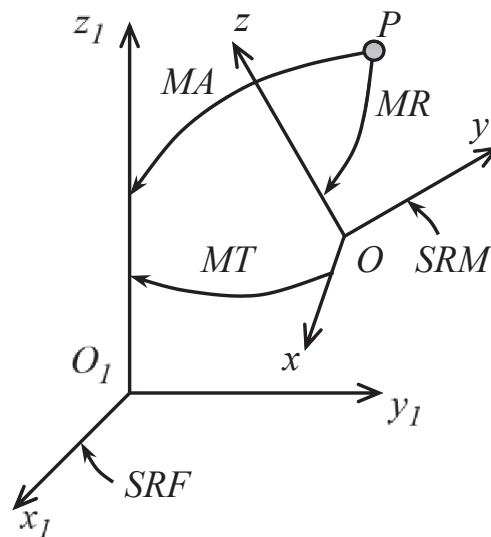


Fig.11.1

Mișcarea absolută este compusă din cea relativă și cea de transport<sup>\*)</sup>. În general sunt cunoscuți parametrii cinematici cu care se efectuează acestea și se determină cei ai mișcării asolute.

Deoarece parametrii cinematici se raportează și în acest caz în sistemul de referință mobil, derivarea în raport cu timpul capătă o formă specifică. Astfel, în cazul general, un vector oarecare (fig.11.2), având expresia analitică:

$$\bar{V} = V_x \bar{i} + V_y \bar{j} + V_z \bar{k} \quad (11.1)$$

se derivează conform relației:

$$\dot{\bar{V}} = \frac{d\bar{V}}{dt} = \dot{V}_x \bar{i} + \dot{V}_y \bar{j} + \dot{V}_z \bar{k} + V_x \dot{\bar{i}} + V_y \dot{\bar{j}} + V_z \dot{\bar{k}} \quad (11.2)$$

Derivatele în raport cu timpul ale versorilor sistemului de referință mobil sunt date de *relațiile lui Poisson*:

$$\dot{\bar{i}} = \bar{\omega} \times \bar{i} \quad \dot{\bar{j}} = \bar{\omega} \times \bar{j} \quad \dot{\bar{k}} = \bar{\omega} \times \bar{k} \quad (11.3)$$

demonstrate în cap.10.1, în care  $\bar{\omega}$  este viteza unghiulară cu care sistemul de referință mobil se rotește față de cel fix. Termenul  $d\bar{V}/dt$  reprezintă *derivata absolută* în raport cu timpul a vectorului  $\bar{V}$ . Prin expresia:

<sup>\*)</sup> În multe lucrări capitolul dedicat mișcărilor compuse este intitulat *Mișcarea Relativă*. Pentru studiul cinematic se consideră mai adecvată denumirea adoptată.

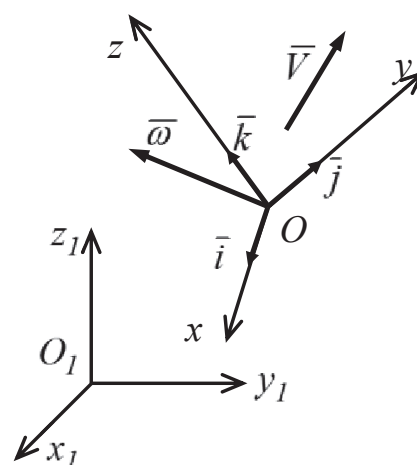


Fig.11.2

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial t} = \dot{V}_x \bar{i} + \dot{V}_y \bar{j} + \dot{V}_z \bar{k} \quad (11.4)$$

se va înțelege *derivata locală* a vectorului  $\bar{V}$  în raport cu timpul, ca și cum acesta ar fi fix (operatorul  $\partial$  nu semnifică în cazul de față derivata parțială). Expresia formată din ultimii trei termeni ai relației (11.2) se prelucrează în modul următor:

$$V_x(\bar{\omega} \times \bar{i}) + V_y(\bar{\omega} \times \bar{j}) + V_z(\bar{\omega} \times \bar{k}) = \bar{\omega} \times (V_x \bar{i} + V_y \bar{j} + V_z \bar{k}) = \bar{\omega} \times \bar{V} \quad (11.5)$$

Relația (11.2) ia forma finală:

$$\dot{\bar{V}} = \frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + \bar{\omega} \times \bar{V} \quad (11.6)$$

Dacă vectorul  $\bar{V}$  este constant în sistemul de referință mobil, atunci derivata locală este nulă și deci

$$\dot{\bar{V}} = \bar{\omega} \times \bar{V} \quad (11.7)$$

Derivata absolută este egală cu cea locală atunci când  $\bar{\omega} = 0$  (*SRM* în translație față de *SRF*) sau în cazul particular  $\bar{V} \parallel \bar{\omega}$ .

## 11.2 Mișcări compuse ale punctului material

### 11.2.1 Studiul vectorial și matriceal al parametrilor cinematici

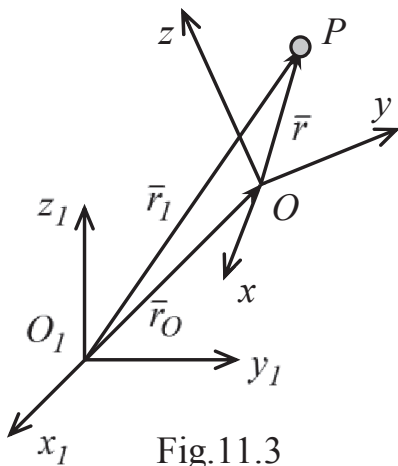


Fig.11.3

Între vectorii de poziție ai unui punct material în cele două sisteme de referință (fig.11.3) există relația:

$$\bar{r}_1 = \bar{r}_O + \bar{r} \quad (11.8)$$

Se derivează această relație în raport cu timpul:

$$\dot{\bar{r}}_1 = \dot{\bar{r}}_O + \dot{\bar{r}} = \dot{\bar{r}}_O + \frac{\partial \bar{r}}{\partial t} + \bar{\omega} \times \bar{r} \quad (11.9)$$

Se definesc următoarele viteze:

–  $\bar{v}_a = \dot{\bar{r}}_1$  – viteza absolută a punctului  $P$  în raport cu *SRF*;

–  $\bar{v}_r = \frac{\partial \bar{r}}{\partial t}$  – viteza relativă a punctului  $P$  în raport cu *SRM*;

–  $\bar{v}_t = \dot{\bar{r}}_O + \bar{\omega} \times \bar{r} = \bar{v}_O + \bar{\omega} \times \bar{r}$  – viteza de transport.

În relația de definiție a vitezei de transport se recunoaște relația lui Euler pentru viteze din mișcarea generală a solidului rigid (cap.10.2). Se poate considera că viteza de transport este viteza față de *SRF* a unui punct solidar cu sistemul de referință mobil în care se găsește la momentul respectiv punctul  $P$  și care efectuează instantaneu transportul acestuia; în momentul următor un alt punct va avea acest rol. Cu aceste precizări relația (11.9) ia forma:

$$\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_t \quad (11.10)$$

Pentru studiul accelerațiilor se derivează în raport cu timpul relația (11.9):

$$\ddot{\vec{r}}_I = \ddot{\vec{r}}_O + \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t^2} + \bar{\omega} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} + \dot{\bar{\omega}} \times \vec{r} + \bar{\omega} \times \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} + \bar{\omega} \times \vec{r} \right) \quad (11.11)$$

Ca și în cazul vitezelor se definesc următoarele accelerații:

–  $\bar{a}_a = \ddot{\vec{r}}_I$  – accelerația absolută a punctului  $P$  față de  $SRF$ ;

–  $\bar{a}_r = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t^2}$  – accelerația relativă a punctului  $P$  față de  $SRM$ ;

–  $\bar{a}_t = \ddot{\vec{r}}_O + \dot{\bar{\omega}} \times \vec{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \vec{r}) = \bar{a}_O + \bar{\varepsilon} \times \vec{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \vec{r})$  – accelerația de transport; se recunoaște și în acest caz relația lui Euler pentru accelerații din mișcarea generală a solidului rigid și sunt valabile observațiile menționate la viteza de transport;

–  $\bar{a}_{cor} = 2(\bar{\omega} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}) = 2(\bar{\omega} \times \bar{v}_r)$  – accelerație complementară cunoscută în

Mecanică sub denumirea de *accelerația lui Coriolis*; ea exprimă variația vitezei relative  $\bar{v}_r$ , ca direcție, datorată rotirii cu  $\bar{\omega}$  a sistemului de referință mobil.

Regrupând termenii definiți mai sus, relația (11.11) devine:

$$\bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_t + \bar{a}_{cor} \quad (11.12)$$

Viteza unghiulară  $\bar{\omega}$  se referă la mișcarea de transport și, în consecință, pentru accelerația Coriolis se introduce relația

$$\bar{a}_{cor} = 2(\bar{\omega}_t \times \bar{v}_r) \quad (11.13)$$

deoarece atât pentru mișcarea absolută cât și pentru mișcarea relativ poate exista, după caz, câte o viteză unghiulară. Caracteristicile accelerației Coriolis se determină după regulile obișnuite ale unui produs vectorial. Modulul se calculează cu relația

$$|\bar{a}_{cor}| = 2|\bar{\omega}_t| |\bar{v}_r| \sin(\bar{\omega}_t, \bar{v}_r) \quad (11.14)$$

Direcția acesteia este perpendiculară pe direcțiile celor doi vectori iar sensul se stabilește cu regula șurubului drept. Din definiția de mai sus a accelerației Coriolis rezultă că aceasta este nulă atunci când  $\bar{\omega}_t = 0$ , respectiv când mișcarea de transport este o translație sau dacă  $\bar{\omega}_t \parallel \bar{v}_r$ .

Un caz particular, frecvent în aplicații, este cel în care cele trei mișcări – absolută, relativă și de transport, sunt efectuate în același plan. Viteza relativă este conținută în planul mișcării iar viteza unghiulară este perpendiculară pe acesta (fig.11.4). Relația (11.14) ia forma:

$$|\bar{a}_{cor}| = 2|\bar{\omega}_t| |\bar{v}_r| = 2\omega_t v_r \quad (11.15)$$

Accelerația Coriolis se va găsi în planul mișcării iar direcția și sensul ei se determină rotind vectorul  $\bar{v}_r$  cu  $90^\circ$  în sensul lui  $\bar{\omega}_t$ .

Dacă relația (11.10) se rescrie sub forma:

$$\bar{v}_a = \bar{v}_O + \bar{v}_r + \bar{\omega} \times \vec{r} \quad (11.16)$$

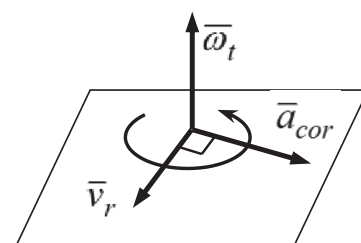


Fig.11.4

și toți vectorii au dezvoltări în sistemul de referință mobil, pentru calculul proiecțiilor se poate scrie, în baza celor arătate în cap.10.2, relația matriceală:

$$\begin{bmatrix} v_{ax} \\ v_{ay} \\ v_{az} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{rx} \\ v_{ry} \\ v_{rz} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{Ox} \\ v_{Oy} \\ v_{Oz} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (11.17)$$

concentrată în forma simbolică<sup>\*)</sup>:

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_r + \mathbf{v}_O + \underline{\omega} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{v}_r + \mathbf{v}_O + \mathbf{v}_{PO} \quad (11.18)$$

În mod asemănător, pentru accelerații se pornește de la relația (11.12) pusă sub forma:

$$\bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_O + \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) + 2(\bar{\omega} \times \bar{v}_r) \quad (11.19)$$

Relația matriceală care permite calculul proiecțiilor este:

$$\begin{bmatrix} a_{ax} \\ a_{ay} \\ a_{az} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{rx} \\ a_{ry} \\ a_{rz} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{Ox} \\ a_{Oy} \\ a_{Oz} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\varepsilon_z & \varepsilon_y \\ \varepsilon_z & 0 & -\varepsilon_x \\ -\varepsilon_y & \varepsilon_x & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_{POx} + 2v_{rx} \\ v_{POy} + 2v_{ry} \\ v_{POz} + 2v_{rz} \end{bmatrix} \quad (11.20)$$

iar cea simbolică are forma concentrată:

$$\mathbf{a}_a = \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_O + \underline{\varepsilon} \cdot \mathbf{r} + \underline{\omega} \cdot (\mathbf{v}_{PO} + 2\mathbf{v}_r) \quad (11.21)$$

În aceste relații  $\underline{\omega}$  și  $\underline{\varepsilon}$  reprezintă matricile antisimetrice asociate vectorilor  $\bar{\omega}$  și  $\bar{\varepsilon}$  ai mișcării de transport. Vectorul coloană  $\mathbf{v}_{PO} = \underline{\omega} \cdot \mathbf{r}$  reprezintă viteza locală a punctului  $P$  față de  $O$  și este definit matriceal prin relația (10.32).

**Problema 11.1** Bara  $OA$  (fig.11.5) se rotește în jurul articulației fixe  $O$ ; simultan o culisă se deplasează în lungul barei. Cunoscând legile lor de mișcare, să se determine viteza și accelerația centrului  $P$  într-o poziție oarecare.

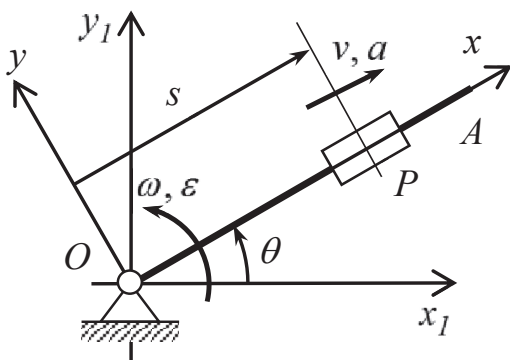


Fig.11.5

**Date:**  $\theta = \frac{1}{2} \varepsilon_0 t^2$ ,  $s = \frac{1}{2} a_0 t^2$  ( $a_0, \varepsilon_0 = \text{const.}$ )

**Cerute:**  $\bar{v}_a, \bar{a}_a$

**Rezolvare:** Translația culisei în lungul barei este mișcarea relativă și se efectuează cu parametrii cinematici

$$v = \dot{s} = a_0 t \quad a = \ddot{s} = a_0 \quad (11.22)$$

Rotația barei în jurul articulației fixe este mișcarea de transport; parametrii cinematici unghiulari sunt:

<sup>\*)</sup> Se reamintește că forma simbolică este utilă în realizarea programelor de calculator care operează cu matrici.

$$\omega = \dot{\theta} = \varepsilon_0 t \quad \varepsilon = \ddot{\theta} = \varepsilon_0 \quad (11.23)$$

Ambele mișcări se efectuează în plan. Sistemele de referință se aleg în modul indicat în fig.11.5 ( $\bar{v}_O = 0, \bar{a}_O = 0$ ).

Cu notațiile din dezvoltarea teoretică se precizează:

$$\bar{r} = s\bar{i} \quad \bar{\omega}_t = \omega\bar{k} \quad \bar{\varepsilon}_t = \varepsilon\bar{k} \quad (11.24)$$

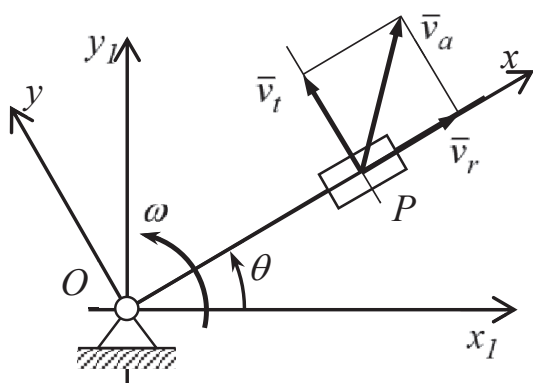


Fig.11.6

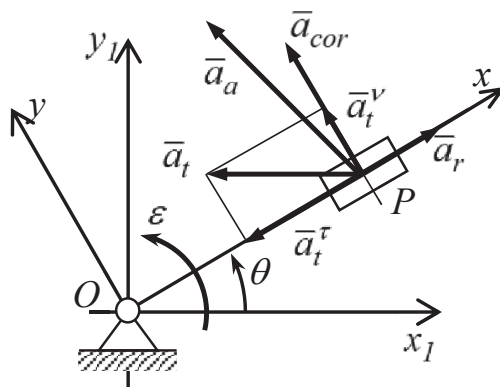


Fig.11.7

Vitezele se calculează cu relațiile:

$$\bar{v}_r = \frac{\partial \bar{r}}{\partial t} = \dot{s}\bar{i} = v\bar{i} \quad (11.25) \quad \bar{v}_t = \bar{\omega}_t \times \bar{r} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ s & 0 & 0 \end{vmatrix} = (\omega s)\bar{j} \quad (11.26)$$

Viteza absolută se calculează cu relația:

$$\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_t = v\bar{i} + (\omega s)\bar{j} \quad (11.27)$$

Însumarea vitezelor este reprezentată în fig.11.6.

Accelerațiile se determină cu relațiile:

$$\bar{a}_r = \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial t^2} = \ddot{s}\bar{i} = a\bar{i} \quad (11.28)$$

$$\bar{a}_t = \bar{\varepsilon}_t \times \bar{r} + \bar{\omega}_t \times (\bar{\omega}_t \times \bar{r}) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \varepsilon \\ s & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ 0 & \omega s & 0 \end{vmatrix} = \quad (11.29)$$

$$= (\varepsilon s)\bar{j} + (-\omega^2 s)\bar{i} = \bar{a}_t^\tau + \bar{a}_t^v$$

$$\bar{a}_{cor} = 2(\bar{\omega}_t \times \bar{v}_r) = 2 \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ v & 0 & 0 \end{vmatrix} = (2\omega v)\bar{j} \quad (11.30)$$

Accelerațiile sunt reprezentate în fig.11.7. Accelerația absolută are în final expresia:

$$\bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_t + \bar{a}_{cor} = (v - \omega^2 s)\bar{i} + (\varepsilon s + 2\omega v)\bar{j} \quad (11.31)$$

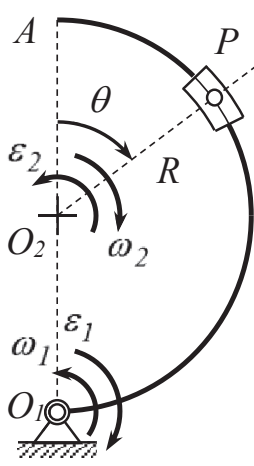


Fig.11.8

**Problema 11.2** Pe un semicerc care se rotește în jurul articulației fixe  $O_1$  alunecă simultan o culisă (fig.11.8). Să se calculeze viteza absolută și accelerația absolută pentru centrul  $P$  al culisei într-o poziție oarecare.

*Date:*  $R, \omega_1, \varepsilon_1, \omega_2, \varepsilon_2, \theta$ ;

*Cerute:*  $v_a, a_a$ .

*Rezolvare:* Mișcarea de transport este rotația semicercului în jurul articulației fixe  $O_1$  iar mișcarea relativă este rotația culisei în jurul centrului geometric  $O_2$  al semicercului, impusă de forma acestuia. Parametrii cinematici unghiulari ai acestor mișcări sunt:

$$\begin{cases} \omega_r = \omega_2 \\ \varepsilon_r = \varepsilon_2 \end{cases} \quad \begin{cases} \omega_t = \omega_1 \\ \varepsilon_t = \varepsilon_1 \end{cases} \quad (11.32)$$

iar sensurile lor sunt indicate în fig.11.8.

Viteza relativă se calculează cu relația:

$$v_r = \omega_r \cdot O_2P = R\omega_2 \quad (11.33)$$

și este tangentă la semicerc în sensul vitezei unghiulare  $\omega_r$  (fig.11.9). Raza  $O_1P$  a mișcării de transport se determină observând că triunghiul  $O_1O_2P$  este isoscel iar unghiul  $\theta$  este exterior acestuia.

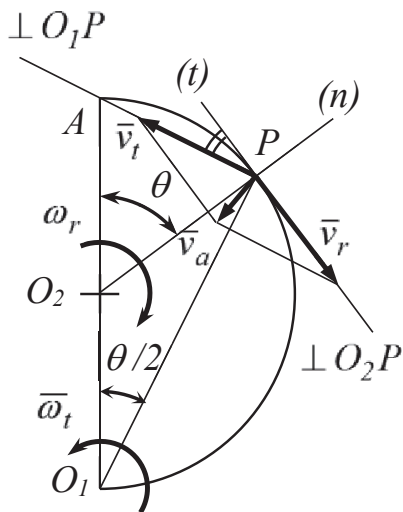


Fig.11.9

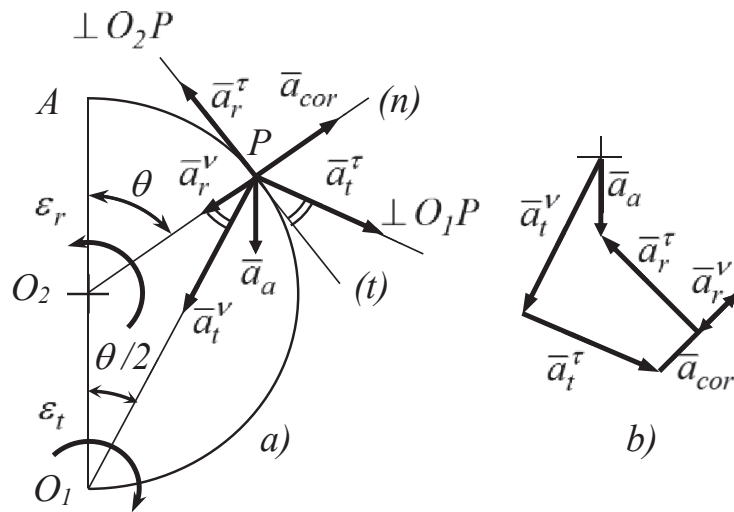


Fig.11.10

Viteza de transport se calculează cu relația:

$$v_t = \omega_t \cdot O_1P = 2R\omega_1 \cos \frac{\theta}{2} \quad (11.34)$$

și este perpendiculară pe  $O_1P$  în sensul vitezei unghiulare  $\omega_t$ .

Valoarea vitezei absolute se obține făcând însumarea acestor două viteze după regula paralelogramului:

$$v_a = \sqrt{v_r^2 + v_t^2 + 2v_r v_t \cos(\pi - \frac{\theta}{2})} \quad (11.35)$$



La același rezultat se ajunge proiectând aceste viteze pe direcțiile  $(n)$  și  $(t)$  – respectiv normala și tangenta în  $P$  la semicerc:

$$v_a = \sqrt{(v_r - v_t \cos \frac{\theta}{2})^2 + (v_t \sin \frac{\theta}{2})^2} \quad (11.36)$$

Accelerația relativă a culisei are forma vectorială:

$$\bar{a}_r = \bar{a}_r^v + \bar{a}_r^\tau \quad (11.37)$$

în care cele două componente au valorile:

$$a_r^v = R\omega_r^2 = R\omega_2^2 \quad (11.38) \quad a_r^\tau = R\varepsilon_t = R\varepsilon_2 \quad (11.39)$$

Direcțiile și sensurile lor sunt indicate în fig.11.10,  $a$ ).

Accelerația de transport are forma vectorială:

$$\bar{a}_t = \bar{a}_t^v + \bar{a}_t^\tau \quad (11.40)$$

iar componentele acesteia sunt:

$$a_t^v = \omega_t^2 \cdot O_1P = 2R\omega_1^2 \cos \frac{\theta}{2} \quad (11.41) \quad a_t^\tau = \varepsilon_t \cdot O_1P = 2R\varepsilon_1 \cos \frac{\theta}{2} \quad (11.42)$$

Direcțiile și sensurile acestora sunt deasemenea reprezentate în fig.11.10,  $a$ ).

Accelerația Coriolis se calculează cu relația:

$$a_{cor} = 2\omega_t v_r = 2R\omega_1\omega_2 \quad (11.43)$$

Ambele mișcări fiind coplanare, direcția și sensul acestei accelerații se obțin rotind  $v_r$  cu  $90^\circ$  în sensul vitezei unghiulare  $\omega_t$ .

Accelerația absolută se obține vectorial prin însumarea celor trei accelerații după regula poligonului (fig.11.10,  $b$ ). Valoarea acesteia este mai ușor de obținut însumând proiecțiile accelerațiilor pe direcțiile  $(n)$  și  $(t)$  menționate mai înainte:

$$a_a = \sqrt{(a_{cor} - a_r^v + a_t^\tau \sin \frac{\theta}{2} - a_t^v \cos \frac{\theta}{2})^2 + (a_r^\tau - a_t^v \sin \frac{\theta}{2} - a_t^\tau \cos \frac{\theta}{2})^2} \quad (11.44)$$

**Problema 11.3** Semicercul din fig.11.11 se rotește în jurul diametrului său orizontal; simultan o culisă alunecă pe semicerc. Să se determine viteza și accelerația culisei într-o poziție oarecare.

**Date:**  $R, \omega_1, \varepsilon_1, \omega_2, \varepsilon_2, \theta$ ;

**Cerute:**  $v_a, a_a$ .

**Rezolvare:** Mișcarea de transport este rotația semicercului în jurul diametrului orizontal  $AB$ ; mișcarea relativă este deplasarea culisei pe conturul semicircular. Parametrii cinematici unghiulari ai acestor mișcări sunt:

$$\begin{cases} \omega_r = \omega_2 \\ \varepsilon_r = \varepsilon_2 \end{cases} \quad \begin{cases} \omega_t = \omega_1 \\ \varepsilon_t = \varepsilon_1 \end{cases} \quad (11.45)$$

Viteza relativă se calculează cu relația:

$$v_r = \omega_r \cdot CP = R\omega_2 \quad (11.46)$$

și are direcția  $(t)$  a tangentei la semicerc; sensul este dat de  $\omega_r$  (fig.11.12,  $a$ ).

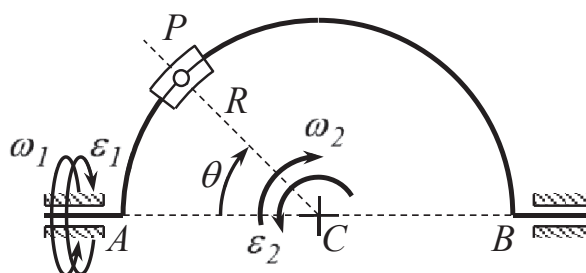


Fig.11.11

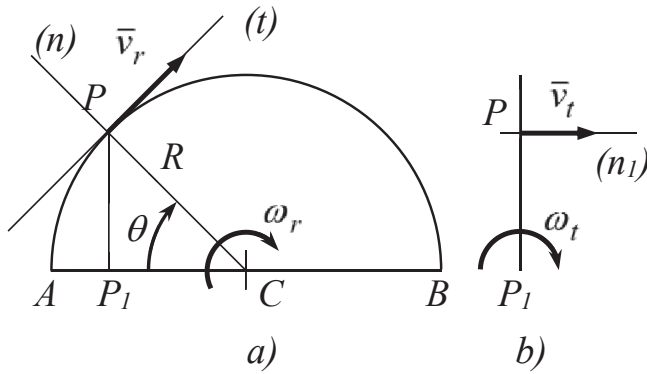


Fig.11.12

Viteza de transport este:

$$v_t = \omega_t \cdot P_1P = R\omega_t \sin \theta \quad (11.47)$$

și are direcția  $(n_1)$  perpendiculară pe planul semicercului; sensul este dat de  $\omega_t$  (fig.11.12, b). Pentru calculul vitezei absolute se utilizează relația:

$$v_a = \sqrt{v_r^2 + v_t^2} \quad (11.48)$$

Vectorul vitezei absolute se află în planul format de cele două direcții,  $(t)$  și  $(n_1)$ .

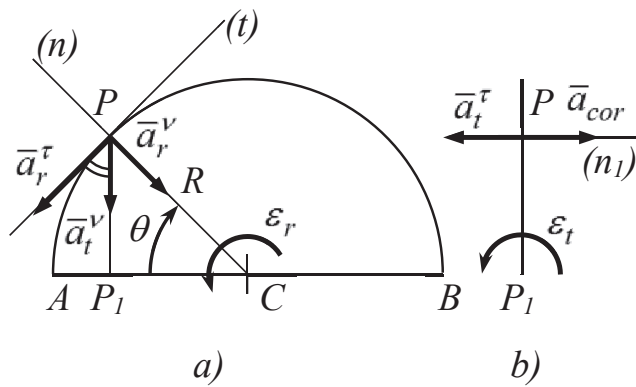


Fig.11.13

Accelerația relativă are forma vectorială:

$$\bar{a}_r = \bar{a}_r^v + \bar{a}_r^\tau \quad (11.49)$$

și componentele:

$$a_r^v = R\omega_r^2 = R\omega_2^2 \quad (11.50)$$

$$a_r^\tau = R\epsilon_t = R\epsilon_2 \quad (11.51)$$

pe direcțiile  $(n)$  și respectiv  $(t)$  (fig. 11.13, a). Accelerația de transport are expresia:

$$\bar{a}_t = \bar{a}_t^v + \bar{a}_t^\tau \quad (11.52)$$

Componenta normală se calculează cu relația:

$$a_t^v = \omega_t^2 \cdot P_1P = R\omega_1^2 \sin \theta \quad (11.53)$$

și are direcția razei  $P_1P$ ; sensul este de la  $P$  către  $P_1$  (fig.11.13, a). Componenta tangențială:

$$a_t^\tau = \epsilon_t \cdot P_1P = R\epsilon_1 \sin \theta \quad (11.54)$$

are direcția  $(n_1)$  perpendiculară pe planul semicercului iar sensul este dat de  $\epsilon_t$  (fig.11.13, b).

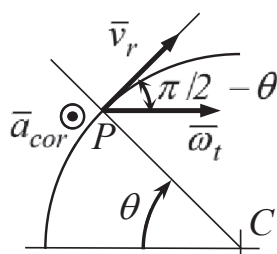


Fig.11.14

Accelerația Coriolis, definită prin relația generală:

$$\bar{a}_{cor} = 2(\bar{\omega}_t \times \bar{v}_r) \quad (11.55)$$

se evaluează în cazul de față după regulile specifice produsului vectorial:

$$a_{cor} = 2\omega_t v_r \sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = 2R\omega_1\omega_2 \cos \theta \quad (11.56)$$

Ea este perpendiculară pe planul format de vectorii  $\bar{v}_r$  și  $\bar{\omega}_t$  (fig.11.14) iar sensul se obține cu regula șurubului drept aplicată rotației vectorului  $\bar{\omega}_t$  către  $\bar{v}_r$ . În fig.11.13, b) aceasta are direcția normalei  $(n_1)$  la planul semicercului.

Accelerația absolută are o dispunere tridimensională în raport cu elementele grafice utilizate. Mărimea ei poate fi evaluată însumând proiecțiile

componentelor analizate mai sus pe cele trei direcții ( $n$ ), ( $t$ ) și ( $n_1$ ) perpendiculare între ele. Rezultă:

$$a_a = \sqrt{(a_r^\tau + a_t^\nu \cos \theta)^2 + (a_r^\nu + a_t^\tau \sin \theta)^2 + (a_{cor} - a_t^\tau)^2} \quad (11.57)$$

### 11.2.2 Metoda analitică

Metoda analitică, prezentată pe larg în cap.10.4.5 pentru studiul mișcării plan-paralele, poate fi extinsă și pentru situația în care există puncte materiale de interes care au mișcare relativă față de un corp aflat în mișcare plană. Este cazul, de exemplu, al culiselor care alunecă pe elemente rectilinii din configurația mecanismelor plane.

Legătura între poziția absolută a culisei  $B$  (în sistemul global  $YOX$ ) și cea relativă (în sistemul local  $yAx$ ) este dată de relațiile:

$$\begin{bmatrix} X_B \\ Y_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_A \\ Y_A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} AB \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} X_B = X_A + AB \cos \alpha \\ Y_B = Y_A + AB \sin \alpha \end{cases} \quad (11.58)$$

Viteza absolută a centrului  $B$  al culisei:

$$\bar{v}_a \equiv \bar{v}_B = \bar{v}_r + \bar{v}_t \quad (11.59)$$

are componenta relativă în lungul barei, pozitivă în sensul axei  $Ax$  a sistemului de referință local (fig.11.15). Componenta de transport este viteza punctului de pe bară în care se află centrul culisei și este determinată de relația lui Euler:

$$\bar{v}_t = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA} \quad (11.60)$$

în care:

$$v_{BA} = \omega AB \quad (11.61)$$

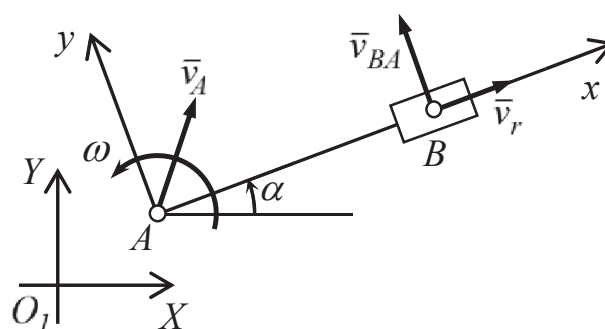


Fig.11.15

este perpendiculară pe  $AB$  în sensul vitezei unghiulare  $\omega$ . Corespunzător relației (11.59) se deduce:

$$\begin{bmatrix} v_{BX} \\ v_{BY} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{AX} \\ v_{AY} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_r \\ v_{BA} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} v_{BX} = v_{AX} + v_r \cos \alpha - v_{BA} \sin \alpha \\ v_{BY} = v_{AY} + v_r \sin \alpha + v_{BA} \cos \alpha \end{cases} \quad (11.62)$$

În cazul particular în care articulația  $A$  este fixă, bara  $AB$  execută o mișcare de rotație în plan,  $\bar{v}_A = 0$  și  $\bar{v}_t \equiv \bar{v}_{BA}$ . Relațiile de mai sus iau forma:

$$\begin{bmatrix} v_{BX} \\ v_{BY} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_r \\ v_t \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} v_{BX} = v_r \cos \alpha - v_t \sin \alpha \\ v_{BY} = v_r \sin \alpha + v_t \cos \alpha \end{cases} \quad (11.63)$$

Dacă bara  $AB$  execută numai o mișcare de translație, atunci  $\bar{\omega} = 0$  și deci  $\bar{v}_{BA} = 0$ . În acest caz:

$$\begin{bmatrix} v_{BX} \\ v_{BY} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{AX} \\ v_{AY} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_r \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} v_{BX} = v_{AX} + v_r \cos \alpha \\ v_{BY} = v_{AY} + v_r \sin \alpha \end{cases} \quad (11.64)$$

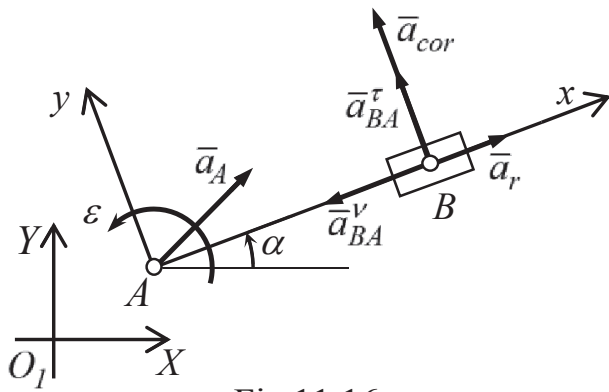


Fig.11.16

Accelerația absolută a punctului

$B$  este:

$$\bar{a}_a \equiv \bar{a}_B = \bar{a}_r + \bar{a}_t + \bar{a}_{cor} \quad (11.65)$$

Componenta relativă are direcția barei și este pozitivă în sensul axei locale  $Ax$  (fig.11.16). Componenta de transport se definește prin relația lui Euler pentru accelerații în mișcarea plan-paralelă:

$$\bar{a}_t = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA} = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^v + \bar{a}_{BA}^\tau \quad (11.66)$$

în care:

$$a_{BA}^v = -\omega^2 AB \quad a_{BA}^\tau = \varepsilon AB \quad (11.67)$$

Accelerația Coriolis este definită prin relațiile:

$$\bar{a}_{cor} = 2\bar{\omega} \times \bar{v}_r \quad \rightarrow \quad a_{cor} = 2\omega v_r \quad (11.68)$$

Direcția și sensul acestei accelerații se stabilesc în modul arătat în cap.11.2, rotind viteza relativă  $\bar{v}_r$  cu  $90^\circ$  în sensul vitezei unghiulare  $\bar{\omega}$ . Dacă ambele mărimi sunt pozitive, accelerația Coriolis va fi dirijată în sensul pozitiv al axei locale  $Ay$  (fig.11.16). Cu aceste precizări, ecuația matriceală corespunzătoare relației (11.65) va fi:

$$\begin{bmatrix} a_{BX} \\ a_{BY} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{AX} \\ a_{AY} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{BA}^v + a_r \\ a_{BA}^\tau + a_{cor} \end{bmatrix} \quad (11.69)$$

Din aceasta se deduc ecuațiile scalare:

$$\begin{cases} a_{BX} = a_{AX} + (a_{BA}^v + a_r) \cos \alpha - (a_{BA}^\tau + a_{cor}) \sin \alpha \\ a_{BY} = a_{AY} + (a_{BA}^v + a_r) \sin \alpha + (a_{BA}^\tau + a_{cor}) \cos \alpha \end{cases} \quad (11.70)$$

valabile în cazul unei mișcări de transport plan-paralelă. Dacă articulația  $A$  este fixă și bara are o mișcare de rotație plană în jurul acesteia,  $\bar{a}_A = 0$  și  $\bar{a}_t \equiv \bar{a}_{BA} = \bar{a}_t^v + \bar{a}_t^\tau$ . Relațiile de mai sus devin:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a_{BX} \\ a_{BY} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_t^v + a_r \\ a_t^\tau + a_{cor} \end{bmatrix} \quad \rightarrow \\ \rightarrow \begin{cases} a_{BX} = (a_t^v + a_r) \cos \alpha - (a_t^\tau + a_{cor}) \sin \alpha \\ a_{BY} = (a_t^v + a_r) \sin \alpha + (a_t^\tau + a_{cor}) \cos \alpha \end{cases} \end{aligned} \quad (11.71)$$

În cazul în care bara are o mișcare de translație,  $\bar{\omega} = \bar{\varepsilon} = 0$  și  $\bar{a}_{cor} = 0$ . Se obțin relațiile:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a_{BX} \\ a_{BY} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_{AX} \\ a_{AY} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_r \\ 0 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \\ \rightarrow \begin{cases} a_{BX} = a_{AX} + a_r \cos \alpha \\ a_{BY} = a_{AY} + a_r \sin \alpha \end{cases} \end{aligned} \quad (11.72)$$



Pentru mișcarea compusă a culisei  $B$  se cunoaște viteza absolută:

$$v_B = \omega_l AB \quad (11.81)$$

reprezentată în fig.11.18,  $a$ ). Relația vectorială:

$$\bar{v}_B \equiv \bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_t \quad (11.82)$$

ia forma matriceală:

$$\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ v_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_r \\ v_t \end{bmatrix} \quad (11.83)$$

din care se deduc ecuațiile scalare:

$$\begin{cases} -v_B \sin\varphi = v_r \cos\alpha - v_t \sin\alpha \\ v_B \cos\varphi = v_r \sin\alpha + v_t \cos\alpha \end{cases} \quad (11.84)$$

Rezolvând sistemul se determină cele două componente necunoscute:

$$v_r = v_B \sin(\alpha - \varphi) \quad (11.85) \quad v_t = v_B \cos(\alpha - \varphi) \quad (11.86)$$

Cele două viteze sunt reprezentate în fig.11.18,  $b$ ). Se calculează în continuare viteza unghiulară:

$$\omega_3 = \frac{v_t}{OB} \quad (11.87)$$

Viteza absolută a centrului culisei din punctul  $C$  este:

$$v_C = \omega_3 OC \quad (11.88)$$

Pentru mișcarea compusă din punctul  $C$ , pornind de la relația vectorială:

$$\bar{v}_C \equiv \bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_t \quad (11.89)$$

se scrie ecuația matriceală:

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ v_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_r \\ v_t \end{bmatrix} \quad (11.90)$$

Se observă că vitezele  $v_r$  și  $v_t$  sunt paralele cu axele sistemului de referință global  $YOX$ . Se deduce în continuare:

$$v_r = -v_C \sin\alpha \quad (11.91) \quad v_t = v_C \cos\alpha \quad (11.92)$$

Corpul 5 are o mișcare de translație paralelă cu axa  $OX$  a sistemului global; toate punctele lui au aceeași viteză și în consecință:

$$v_D = v_t \quad (11.91)$$

Pentru mișcarea compusă a culisei din punctul  $B$  există relația vectorială între accelerații:

$$\bar{a}_B \equiv \bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_t + \bar{a}_{cor} \quad (11.92)$$

care se poate detalia sub forma

$$\bar{a}_B^v + \bar{a}_B^r = \bar{a}_r + \bar{a}_t^v + \bar{a}_t^r + \bar{a}_{cor} \quad (11.93)$$

Se pot calcula direct componentele:

$$a_B^v = -\omega_l^2 AB \quad (11.94) \quad a_B^r = \varepsilon_l AB \quad (11.95)$$

$$a_t^v = -\omega_3^2 OB \quad (11.96) \quad a_{cor} = 2\omega_3 v_r \quad (11.97)$$

Din ecuația matriceală corespunzătoare relației (11.93):

$$\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_B^v \\ a_B^\tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_t^v + a_r \\ a_t^\tau + a_{cor} \end{bmatrix} \quad (11.98)$$

se deduce sistemul de ecuații scalare:

$$\begin{cases} a_B^v \cos\varphi - a_B^\tau \sin\varphi = (a_t^v + a_r) \cos\alpha - (a_t^\tau + a_{cor}) \sin\alpha \\ a_B^v \sin\varphi + a_B^\tau \cos\varphi = (a_t^v + a_r) \sin\alpha + (a_t^\tau + a_{cor}) \cos\alpha \end{cases} \quad (11.99)$$

în care sunt necunoscute accelerațiile  $a_r$  și  $a_t^\tau$ . Pentru rezolvare se grupează termenii cunoscuți:

$$\begin{cases} \Delta a_X = a_B^v \cos\varphi - a_B^\tau \sin\varphi - a_t^v \cos\alpha + a_{cor} \sin\alpha \\ \Delta a_Y = a_B^v \sin\varphi + a_B^\tau \cos\varphi - a_t^v \sin\alpha - a_{cor} \cos\alpha \end{cases} \quad (11.100)$$

iar sistemul de rezolvat ia forma simplificată:

$$\begin{cases} \Delta a_X = a_r \cos\alpha - a_t^\tau \sin\alpha \\ \Delta a_Y = a_r \sin\alpha + a_t^\tau \cos\alpha \end{cases} \quad (11.101)$$

După rezolvare se obține:

$$a_r = \Delta a_X \cos\alpha + \Delta a_Y \sin\alpha \quad (11.102) \quad a_t^\tau = -\Delta a_X \sin\alpha + \Delta a_Y \cos\alpha \quad (11.103)$$

Se calculează în continuare:

$$\varepsilon_3 = \frac{a_t^\tau}{OB} \quad (11.104) \quad a_C^v = -\omega_3^2 OC \quad (11.105) \quad a_C^\tau = \varepsilon_3 OC \quad (11.106)$$

Componentele sunt reprezentate grafic în fig.11.19 a) și b).

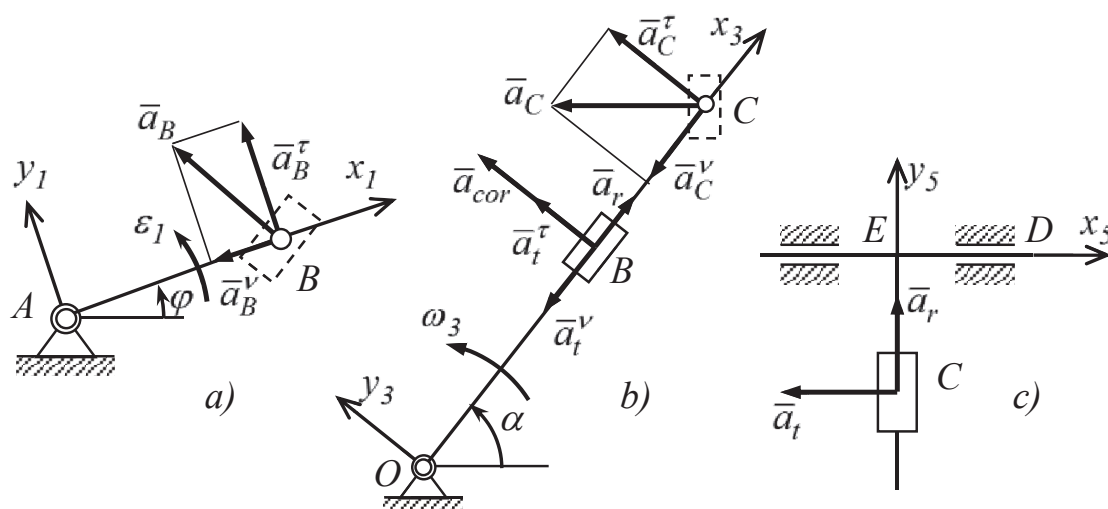


Fig.11.19

Pentru mișcarea compusă din punctul C relația între accelerații este:

$$\bar{a}_C \equiv \bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_t \quad (11.107)$$

Deoarece mișcarea de transport este o translație, accelerația Coriolis este nulă.

Din relația matriceală:

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_C^v \\ a_C^\tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_r \\ a_t \end{bmatrix} \quad (11.108)$$

se determină direct accelerațiile:

$$a_r = a_C^v \cos\alpha - a_C^\tau \sin\alpha \quad (11.109) \quad a_t = a_C^v \sin\alpha + a_C^\tau \cos\alpha \quad (11.110)$$

Aceste accelerații sunt reprezentate în fig.11.19, c). Corpul 5 are o mișcare de translație și toate punctele sale au aceeași accelerație. În consecință:

$$a_D = a_t \quad (11.111)$$

Relațiile de calcul finale se grupează în algoritmul prezentat în tab.11.1.

**Tabelul 11.1**

Nr.	Relația de calcul	Nr.	Relația de calcul
1	$OB = \sqrt{OA^2 + AB^2 + 2OA \cdot AB \sin\varphi}$	18	$a_B = \sqrt{(a_B^v)^2 + (a_B^\tau)^2}$
2	$\cos\alpha = AB \cos\varphi / OB$	19	$a_t^v = -\omega_3^2 OB$
3	$\sin\alpha = (OA + AB \sin\varphi) / OB$	20	$a_{cor} = 2\omega_3 v_r$
4	$X_C = OC \cos\alpha$	21	$\Delta a_X = a_B^v \cos\varphi - a_B^\tau \sin\varphi -$ $- a_t^v \cos\alpha + a_{cor} \sin\alpha$
5	$Y_C = OC \sin\alpha$		
6	$X_D = X_C + ED$	22	$\Delta a_Y = a_B^v \sin\varphi + a_B^\tau \cos\varphi -$ $- a_t^v \sin\alpha - a_{cor} \cos\alpha$
7	$Y_D = OH$		
8	$v_B = \omega_1 AB$	23	$a_r = \Delta a_X \cos\alpha + \Delta a_Y \sin\alpha$
9	$v_r = v_B \sin(\alpha - \varphi)$	24	$a_t^\tau = -\Delta a_X \sin\alpha + \Delta a_Y \cos\alpha$
10	$v_t = v_B \cos(\alpha - \varphi)$	25	$\varepsilon_3 = a_t^\tau / OB$
11	$\omega_3 = v_t / OB$	26	$a_C^v = -\omega_3^2 OC$
12	$v_C = \omega_3 OC$	27	$a_C^\tau = \varepsilon_3 OC$
13	$v_r = -v_C \sin\alpha$	28	$a_C = \sqrt{(a_C^v)^2 + (a_C^\tau)^2}$
14	$v_t = v_C \cos\alpha$	29	$a_r = a_C^v \cos\alpha - a_C^\tau \sin\alpha$
15	$v_D = v_t$	30	$a_t = a_C^v \sin\alpha + a_C^\tau \cos\alpha$
16	$a_B^v = -\omega_1^2 AB$	31	$a_D = a_t$
17	$a_B^\tau = \varepsilon_1 AB$		



## 11.3 Mișcări compuse ale solidului rigid

### 11.3.1 Definirea mișcărilor

În studiul mișcării compuse a corpului solid rigid se adoptă un mod de notare specific pentru sistemele de referință (fig.11.20). Astfel, triedrul  $T_0$  este sistemul de referință fix iar triedrele  $T_1$ ,  $T_2$ , ... sunt sisteme de referință mobile succesive. Corpul este solidar în acest caz cu triedrul  $T_2$ .

Parametrii cinematici care descriu mișcarea unui triedru (viteza și accelerația originii, viteza și accelerația unghiulară) se notează cu doi indici; primul indică numărul triedrului respectiv iar cel de al doilea numărul triedrului față de care are loc mișcarea.

Mișcările se definesc după cum urmează:

– mișcarea absolută:

$T_2$  față de  $T_0$ ;

– mișcarea relativă:

$T_2$  față de  $T_1$ ;

– mișcarea de transport:

$T_1$  față de  $T_0$ .

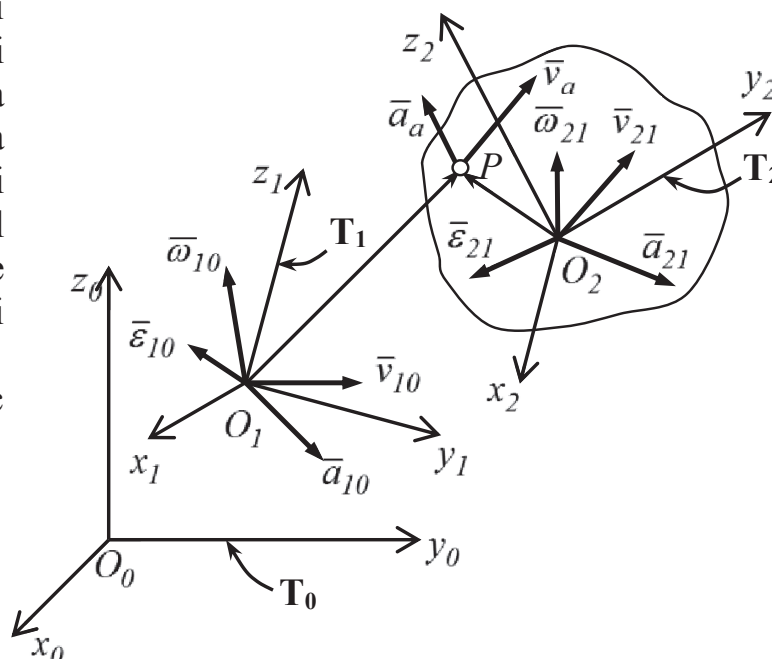


Fig.11.20

### 11.3.2 Parametrii cinematici în cazul general

Viteza absolută a unui punct oarecare  $P$  din configurația unui corp având ca sistem de referință propriu triedrul  $T_2$  se referă la deplasarea acestuia în raport cu sistemul de referință fix, în cazul de față triedrul  $T_0$ ; în relația:

$$\bar{v}_a \equiv \bar{v}_{P20} = \bar{v}_r + \bar{v}_t \quad (11.112)$$

componentele se determină utilizând relația lui Euler pentru viteze adaptată cu notațiile din fig.11.15. Viteza relativă este viteza punctului  $P$  din triedrul  $T_2$  față de triedrul  $T_1$ :

$$\bar{v}_r \equiv \bar{v}_{P21} = \bar{v}_{21} + \bar{\omega}_{21} \times \overline{O_2P} \quad (11.113)$$

Viteza de transport este viteza punctului  $P$  din triedrul  $T_1$  față de triedrul fix  $T_0$ :

$$\bar{v}_t \equiv \bar{v}_{P10} = \bar{v}_{10} + \bar{\omega}_{10} \times \overline{O_1P} \quad (11.114)$$

Rezultă pentru viteza absolută expresia:

$$\bar{v}_a = \bar{v}_{10} + \bar{v}_{21} + \bar{\omega}_{10} \times \overline{O_1P} + \bar{\omega}_{21} \times \overline{O_2P} \quad (11.115)$$

în care termenii de aceeași formă au fost dispuși în succesiunea crescătoare a triedrelor mobile.

Pentru accelerații se procedează în mod asemănător. În relația generală:

$$\bar{a}_a \equiv \bar{a}_{P20} = \bar{a}_r + \bar{a}_t + \bar{a}_{cor} \quad (11.116)$$

componentele sunt definite în mod analog vitezelor, utilizând însă relația lui Euler pentru accelerații. Astfel, accelerația relativă este dată de relația:

$$\bar{a}_r \equiv \bar{a}_{P21} = \bar{a}_{21} + \bar{\varepsilon}_{21} \times \overline{O_2P} + \bar{\omega}_{21} \times (\bar{\omega}_{21} \times \overline{O_2P}) \quad (11.117)$$

iar cea de transport de relația:

$$\bar{a}_t \equiv \bar{a}_{P10} = \bar{a}_{10} + \bar{\varepsilon}_{10} \times \overline{O_1P} + \bar{\omega}_{10} \times (\bar{\omega}_{10} \times \overline{O_1P}) \quad (11.118)$$

Accelerația Coriolis va fi:

$$\bar{a}_{cor} = 2(\bar{\omega}_t \times \bar{v}_r) = 2(\bar{\omega}_{10} \times \bar{v}_{P21}) \quad (11.119)$$

Însumarea acestor accelerații conduce la relația:

$$\begin{aligned} \bar{a}_a = \bar{a}_{10} + \bar{a}_{21} + \bar{\varepsilon}_{10} \times \overline{O_1P} + \bar{\varepsilon}_{21} \times \overline{O_2P} + \\ + \bar{\omega}_{10} \times (\bar{\omega}_{10} \times \overline{O_1P}) + \bar{\omega}_{21} \times (\bar{\omega}_{21} \times \overline{O_2P}) + 2(\bar{\omega}_{10} \times \bar{v}_{P21}) \end{aligned} \quad (11.120)$$

în care termenii de aceeași formă au fost dispuși, ca și cei ai vitezelor, în succesiunea crescătoare a triedrelor mobile.

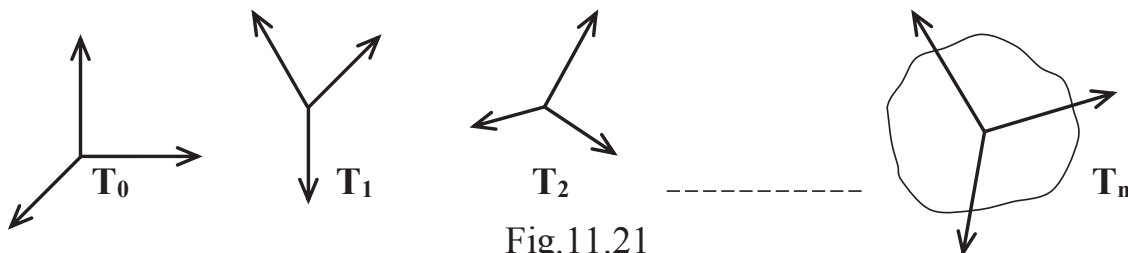


Fig.11.21

Relațiile deduse mai sus pentru cazul a două triedre mobile, pot fi generalizate pentru existența a  $n$  astfel de triedre succesive (fig.11.21) aflate în mișcare relativă unul față de celălalt.

Generalizarea relației (11.115) pentru viteza absolută poate fi făcută cu ușurință observând succesiunea de indici a termenilor:

$$\bar{v}_a = \sum_{i=1}^n \bar{v}_{i,i-1} + \sum_{i=1}^n (\bar{\omega}_{i,i-1} \times \overline{O_iP}) \quad (11.121)$$

Aceeași observație este valabilă și la însumarea termenilor accelerației absolute proveniți din accelerațiile relative și de transport din relația (11.120). Pentru deducerea unui termen general corespunzător sumei accelerațiilor Coriolis, este necesară reamintirea faptului că o astfel de accelerație reprezintă variația vitezei relative datorată vitezei unghiulare de transport. Pentru fiecare triedru mobil viteza unghiulară de transport se va raporta la sistemul de referință fix  $T_0$  ( $\bar{\omega}_{10}, \bar{\omega}_{20}, \bar{\omega}_{30}, \dots, \bar{\omega}_{n0}$ ).

Cu această observație se vor putea scrie relațiile care definesc accelerațiile Coriolis succesive:

$$\begin{aligned}
\bar{a}_{cor}^{(2I)} &= 2(\bar{\omega}_{10} \times \bar{v}_{P_{21}}) \\
\bar{a}_{cor}^{(32)} &= 2(\bar{\omega}_{20} \times \bar{v}_{P_{32}}) \\
&\dots \\
\bar{a}_{cor}^{(n,n-1)} &= 2(\bar{\omega}_{n-1,0} \times \bar{v}_{P_{n,n-1}})
\end{aligned}
\tag{11.122}$$

termenul general fiind ușor de dedus. Pentru accelerația absolută rezultă în final relația:

$$\bar{a}_a = \sum_{i=1}^n \bar{a}_{i,i-1} + \sum_{i=1}^n (\bar{\varepsilon}_{i,i-1} \times \overline{O_i P}) + \sum_{i=1}^n [\bar{\omega}_{i,i-1} \times (\bar{\omega}_{i,i-1} \times \overline{O_i P})] + 2 \sum_{i=2}^n (\bar{\omega}_{i-1,0} \times \bar{v}_{P_{i,i-1}})
\tag{11.123}$$

### 11.3.3 Parametri unghiulari ai mișcării absolute

Se utilizează relația (11.121) pentru două puncte  $A$  și  $B$  ale corpului (fig.11.22):

$$\bar{v}_A = \sum_{i=1}^n \bar{v}_{i,i-1} + \sum_{i=1}^n (\bar{\omega}_{i,i-1} \times \overline{O_i A})
\tag{11.124}$$

$$\bar{v}_B = \sum_{i=1}^n \bar{v}_{i,i-1} + \sum_{i=1}^n (\bar{\omega}_{i,i-1} \times \overline{O_i B})
\tag{11.125}$$

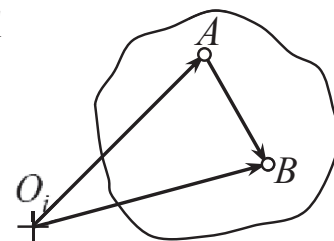


Fig.11.22

Prin scăderea primei relații din cea de a doua se obține:

$$\begin{aligned}
\bar{v}_B - \bar{v}_A &= \sum_{i=1}^n [\bar{\omega}_{i,i-1} \times (\overline{O_i B} - \overline{O_i A})] = \sum_{i=1}^n (\bar{\omega}_{i,i-1} \times \overline{AB}) = \\
&= \left( \sum_{i=1}^n \bar{\omega}_{i,i-1} \right) \times \overline{AB} = \bar{\omega}_a \times \overline{AB}
\end{aligned}
\tag{11.126}$$

sau, sub altă formă:

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{\omega}_a \times \overline{AB}
\tag{11.127}$$

Această expresie, analogă relației lui Euler pentru viteze în mișcarea generală a solidului rigid, leagă între ele vitezele absolute ale celor două puncte. S-a notat prin:

$$\bar{\omega}_a \equiv \bar{\omega}_{n,0} = \sum_{i=1}^n \bar{\omega}_{i,i-1}
\tag{11.128}$$

viteza unghiulară absolută a corpului corespunzătoare rotației acestuia în raport cu sistemul de referință fix (triedrul  $T_n$  față de  $T_0$ ). Se deduce că viteza unghiulară absolută este însumarea vitezelor unghiulare relative ale sistemelor de referință mobile intermediare.

Deducerea în același mod a accelerației unghiulare absolute, pornind de la relația (11.120), este foarte laborioasă. Un procedeu mai simplu constă în derivarea în raport cu timpul a relația (11.128) care definește viteza unghiulară absolută. Trebuie ținut cont însă și de faptul că fiecare viteză unghiulară se definește analitic prin proiecțiile ei pe axele triedrului propriu și în consecință la derivare se va utiliza relația (11.6).

$$\begin{aligned}
\frac{d\bar{\omega}_{10}}{dt} &= \frac{\partial \bar{\omega}_{10}}{\partial t} + \bar{\omega}_{10} \times \bar{\omega}_{10} = \bar{\varepsilon}_{10} \\
\frac{d\bar{\omega}_{21}}{dt} &= \frac{\partial \bar{\omega}_{21}}{\partial t} + \bar{\omega}_{20} \times \bar{\omega}_{21} = \bar{\varepsilon}_{21} + \bar{\omega}_{20} \times \bar{\omega}_{21} \\
\frac{d\bar{\omega}_{32}}{dt} &= \frac{\partial \bar{\omega}_{32}}{\partial t} + \bar{\omega}_{30} \times \bar{\omega}_{32} = \bar{\varepsilon}_{32} + \bar{\omega}_{30} \times \bar{\omega}_{32} \\
&\vdots \\
\frac{d\bar{\omega}_{n,n-1}}{dt} &= \frac{\partial \bar{\omega}_{n,n-1}}{\partial t} + \bar{\omega}_{n0} \times \bar{\omega}_{n,n-1} = \bar{\varepsilon}_{n,n-1} + \bar{\omega}_{n,0} \times \bar{\omega}_{n,n-1}
\end{aligned} \tag{11.129}$$

Se obține în final relația pentru accelerația unghiulară absolută:

$$\bar{\varepsilon}_a = \frac{d\bar{\omega}_a}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{d\bar{\omega}_{i,i-1}}{dt} = \sum_{i=1}^n \bar{\varepsilon}_{i,i-1} + \sum_{i=1}^n (\bar{\omega}_{i,0} \times \bar{\omega}_{i,i-1}) \tag{11.130}$$

## 11.4 Mișcări compuse particulare

### 11.4.1 Compuneri de translații

Dacă toate mișcările relative sunt niște translații, atât vitezele cât și accelerațiile unghiulare relative sunt nule; relațiile (11.121) și (11.123) iau formele simplificate:

$$\bar{v}_a = \sum_{i=1}^n \bar{v}_{i,i-1} \tag{11.131}$$

$$\bar{a}_a = \sum_{i=1}^n \bar{a}_{i,i-1} \tag{11.132}$$

Aceste relații indică faptul că viteza și accelerația absolută se obțin însumând vectorial vitezele și accelerațiile relative.

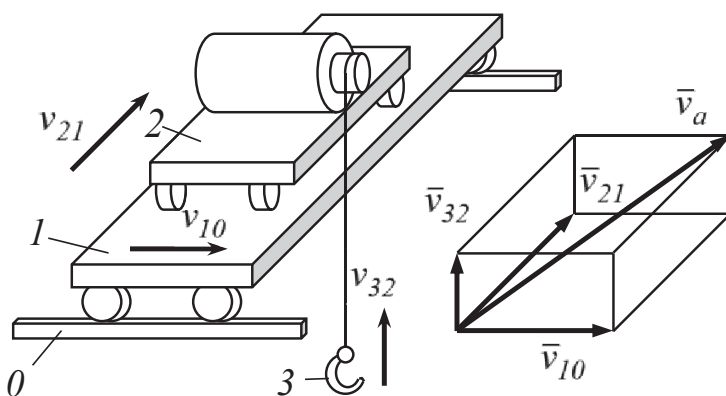


Fig.11.23

**Problema 11.4** Un pod rulant, reprezentat schematic în fig.11.23, este format din grindă 1 care se deplasează pe niște șine orizontale fixe 0 cu viteza  $v_{10}$  și accelerația  $a_{10}$ . În lungul grinzii alunecă transversal un cărucior 2 cu viteza  $v_{20}$  și accelerația  $a_{20}$  față de grindă. Pe cărucior este montat un sistem de

ridicare pe verticală a unui cablu la extremitatea căruia se află cârligul 3; viteza de ridicare a acestuia în raport cu căruciorul este  $v_{32}$  iar accelerația este  $a_{32}$ . Să se determine viteza absolută a cârligului.

**Rezolvare:** Cele trei viteze sunt reciproc perpendiculare și se însumează după regula paralelipipedului.

$$\bar{v}_a = \bar{v}_{10} + \bar{v}_{21} + \bar{v}_{32} \quad (11.133) \quad v_a = \sqrt{v_{10}^2 + v_{21}^2 + v_{32}^2} \quad (11.134)$$

În mod asemănător se pot însuma și accelerațiile:

$$\bar{a}_a = \bar{a}_{10} + \bar{a}_{21} + \bar{a}_{32} \quad (11.135) \quad a_a = \sqrt{a_{10}^2 + a_{21}^2 + a_{32}^2} \quad (11.136)$$

### 11.4.2 Compuneri de rotații paralele

Dacă toate mișcările relative și absolute sunt rotații în jurul unor axe paralele între ele, atunci vectorii vitezelor unghiulare respective, care au direcția acestor axe, alcătuiesc un sistem de vectori paraleli. Relația (11.128) care definește vectorial viteza unghiulară absolută poate fi proiectată pe direcția comună, luând o formă scalară analogă

$$\bar{\omega}_a \equiv \bar{\omega}_{n,0} = \sum_{i=1}^n \bar{\omega}_{i,i-1} \quad \rightarrow \quad \omega_a = \sum_{i=1}^n \omega_{i,i-1} \quad (11.137)$$

Semnele atribuite acestor viteze unghiulare se stabilesc în funcție de sensul lor în raport cu un sens pozitiv prestabilit.

Din cauza paralelismului vitezelor unghiulare, produsele vectoriale din relația (11.130) sunt nule astfel că și pentru accelerația unghiulară absolută se stabilesc relații asemănătoare:

$$\bar{\omega}_a \equiv \bar{\omega}_{n,0} = \sum_{i=1}^n \bar{\omega}_{i,i-1} \quad \rightarrow \quad \omega_a = \sum_{i=1}^n \omega_{i,i-1} \quad (11.138)$$

Este valabilă și în acest caz observația referitoare la semne. Relațiile dintre accelerațiile unghiulare au aceeași formă ca și cele dintre vitezele unghiulare.

**Problema 11.5** În fig.11.24 este reprezentată schematic o transmisie diferențială cu roți dințate cilindrice. Pinionul 1 antrenează roata satelit 2 care se rostogolește simultan peste coroana fixă 0 cu dantură interioară; mișcarea roții 2 determină rotirea brațului port-satelit 3. Cunoscând viteza unghiulară a pinionului și razele roților, se cere să se determine vitezele unghiulare absolute și relative precum și raportul de transmitere.

**Date:**  $\omega_{10}$ ,  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3 = R_1 + R_2$ ;

**Cerute:**  $\omega_{20}$ ,  $\omega_{30}$ ,  $\omega_{21}$ ,  $\omega_{32}$ ,  $i_{13}$ ;

**Rezolvare:** Sensurile de rotație ale roților 1 și 2 sunt puse în evidență în fig.11.25, a) iar cel al brațului port-satelit 3 în fig.11.25, b). Vectorii vitezelor unghiulare absolute și relative sunt reprezentați în fig.11.25, c). Punctul  $I_{20}$  în care roata 2 angrenează cu coroana fixă este centrul ei instantaneu de rotație; punctul  $I_{21}$  este un centru instantaneu de rotație relativ al roții 2 în raport cu pinionul 1.

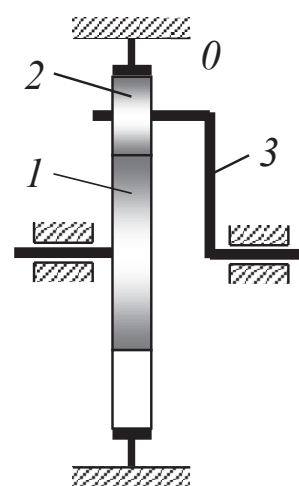


Fig.11.24

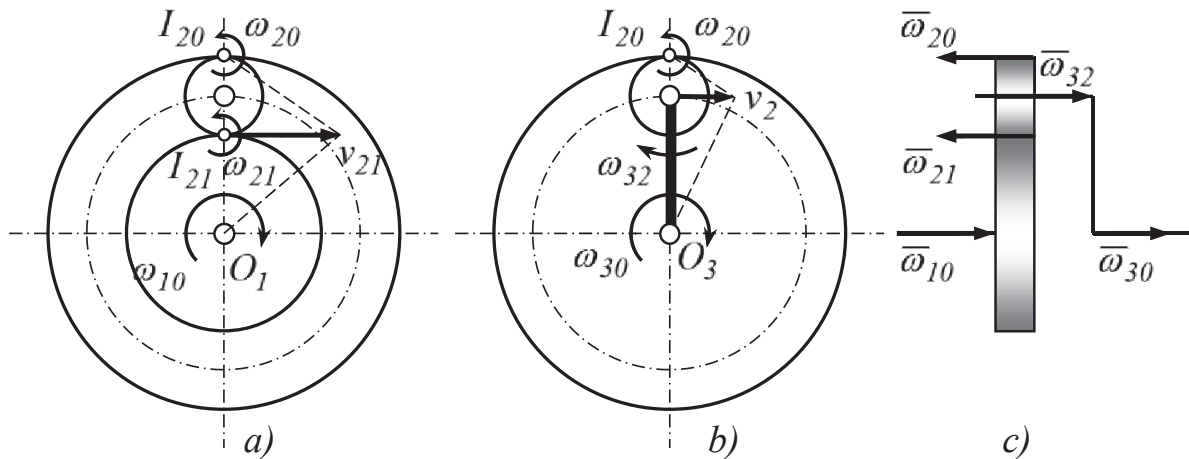


Fig.11.25

Pornind de la viteza comună în punctul de angrenare se stabilește viteza unghiulară absolută a roții 2:

$$v_1 = R_1 \omega_{10} = 2R_2 \omega_{20} \quad \rightarrow \quad \omega_{20} = \frac{R_1}{2R_2} \omega_{10} \quad (11.139)$$

În mod asemănător se stabilește viteza unghiulară absolută a brațului port-satelit:

$$v_2 = R_2 \omega_{20} = R_3 \omega_{30} \quad \rightarrow \quad \omega_{30} = \frac{R_2}{R_3} \omega_{20} = \frac{R_1}{2(R_1 + R_2)} \omega_{10} \quad (11.140)$$

Pentru roata 2 relația între vitezele unghiulare se proiectează pe direcția comună (fig.11.25, c):

$$\bar{\omega}_{20} = \bar{\omega}_{10} + \bar{\omega}_{21} \quad \rightarrow \quad -\omega_{20} = \omega_{10} - \omega_{21} \quad (11.141)$$

Viteza unghiulară relativă a acesteia față de pinionul 1 este:

$$\omega_{21} = \omega_{10} + \omega_{20} = \left(1 + \frac{R_1}{2R_2}\right) \omega_{10} \quad (11.142)$$

Pentru brațul port-satelit se procedează asemănător:

$$\bar{\omega}_{30} = \bar{\omega}_{10} + \bar{\omega}_{21} + \bar{\omega}_{32} = \bar{\omega}_{20} + \bar{\omega}_{32} \quad \rightarrow \quad \omega_{30} = -\omega_{20} + \omega_{32} \quad (11.143)$$

Se deduce viteza unghiulară relativă a brațului 3 față de roata 2:

$$\omega_{32} = \omega_{20} + \omega_{30} = \frac{R_1(R_1 + 2R_2)}{2R_2(R_1 + R_2)} \omega_{10} \quad (11.144)$$

Raportul de transmitere între axul de intrare și cel de ieșire al transmisiei va fi:

$$i_{12} = \frac{\omega_{10}}{\omega_{30}} = \frac{2(R_1 + R_2)}{R_1} \quad (11.145)$$

### 11.4.3 Compuneri de rotații concurente

Relațiile pentru parametrii cinematici unghiulari sunt cei stabiliți în cap.11.3.3, respectiv:

$$\bar{\omega}_a \equiv \bar{\omega}_{n,0} = \sum_{i=1}^n \bar{\omega}_{i,i-1} \quad (11.146)$$

$$\bar{\varepsilon}_a \equiv \bar{\varepsilon}_{n,0} = \sum_{i=1}^n \bar{\varepsilon}_{i,i-1} + \sum_{i=1}^n (\bar{\omega}_{i,0} \times \bar{\omega}_{i,i-1}) \quad (11.147)$$

**Problema 11.6** Pe o suprafață conică fixă  $0$  se rostogolește fără alunecare o rolă  $2$  antrenată de bara îndoită  $1$  (fig.11.26). Cunoșcând dimensiunile și mișcarea de antrenare, să se studieze mișcarea rolei.

**Date:**  $R, r, \alpha, \omega_{10}, \varepsilon_{10}$ ;

**Cerute:**  $\omega_{20}, \varepsilon_{20}, \omega_{21}, \varepsilon_{21}$ ;

**Rezolvare:** Axa de rotație a barei  $1$  coincide cu axa conului iar unghiul de îndoire  $\alpha$  coincide cu semi-unghiul la vârf al acestuia. Axa de rotație a barei și cea a rolei față de bară sunt concurente în punctul de îndoire  $O$ ; vitezele unghiulare respective au direcțiile acestor axe. Rola se rostogolește fără alunecare peste suprafața conică și în consecință punctul de tangență  $I_{20}$  este centrul ei instantaneu de rotație. Dreapta  $O-I_{20}$  servește drept axă instantanee de rotație pentru rolă și viteza ei unghiulară absolută va avea direcția acestei drepte. Suma vectorială corespunzătoare relației (11.146), respectiv:

$$\bar{\omega}_{20} = \bar{\omega}_{10} + \bar{\omega}_{21} \quad (11.148)$$

are reprezentarea grafică conform regulii paralelogramului în fig.11.26. Aplicând teorema sinusului în triunghiul formate de cele trei viteze unghiulare se obține:

$$\frac{\omega_{20}}{\sin \alpha} = \frac{\omega_{10}}{\sin \beta} = \frac{\omega_{21}}{\sin[\pi - (\alpha + \beta)]} \quad (11.149)$$

în care unghiul  $\beta$  se calculează din relația  $\operatorname{tg} \beta = r/R$ . Se obțin rezultatele:

$$\omega_{20} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \omega_{10} \quad (11.150) \quad \omega_{21} = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \beta} \omega_{10} \quad (11.151)$$

În ipoteza că  $\bar{\varepsilon}_{10}$  are același sens cu  $\bar{\omega}_{10}$ , relația (11.147) ia forma:

$$\bar{\varepsilon}_{20} = \underbrace{\bar{\varepsilon}_{10} + \bar{\varepsilon}_{21}}_{\bar{\varepsilon}' } + \underbrace{\bar{\omega}_{10} \times \bar{\omega}_{10}}_0 + \underbrace{\bar{\omega}_{20} \times \bar{\omega}_{21}}_{\bar{\varepsilon}''} \quad (11.152)$$

având reprezentarea grafică din fig.11.27. Procedând în același mod ca mai sus se găsește:

$$\varepsilon' = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \varepsilon_{10} \quad (11.153) \quad \varepsilon_{21} = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \beta} \varepsilon_{10} \quad (11.154)$$

Pentru componentă  $\varepsilon''$  se utilizează regulile de evaluare a unui produs vectorial:

$$|\bar{\varepsilon}''| = |\bar{\omega}_{20} \times \bar{\omega}_{21}| = |\bar{\omega}_{20}| |\bar{\omega}_{21}| \sin(\bar{\omega}_{20}, \bar{\omega}_{21}) = \omega_{20} \omega_{21} \sin \beta \quad (11.155)$$

Ea este perpendiculară pe planul vectorilor  $\bar{\omega}_{20}$  și  $\bar{\omega}_{21}$  iar sensul se stabilește aplicând regula șurubului drept la rotația lui  $\bar{\omega}_{20}$  către  $\bar{\omega}_{21}$ . În final se calculează accelerația unghiulară absolută a rolei:

$$\varepsilon_{20} = \sqrt{(\varepsilon')^2 + (\varepsilon'')^2} \quad (11.156)$$

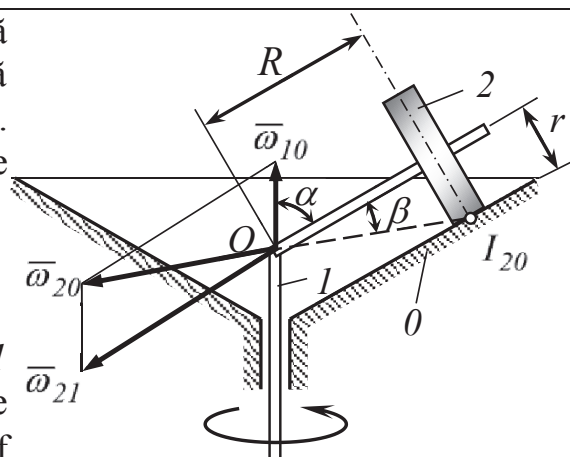


Fig.11.26

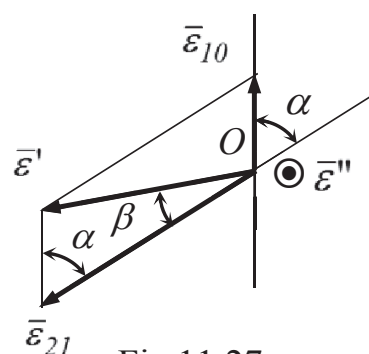


Fig.11.27

## 12. CINEMATICA SISTEMELOR DE CORPURI

### 12.1 Generalități

După cum s-a arătat anterior, un sistem de corpuri reprezintă un ansamblu de solide rigide aflate în interacțiune mecanică, unitar din punct de vedere constructiv și funcțional. Din punct de vedere cinematic elementele mobile ale unui sistem pot transmite sau transforma o mișcare primită din partea unui dispozitiv de antrenare sau din partea altui sistem.

*Transmisiile mecanice* au rolul de a prelua o mișcare de rotație de la un ax de intrare și de a o transmite către un ax de ieșire modificându-i parametrii unghiulari; elementele mobile sunt în general axe, arbori<sup>\*)</sup> și roți de diferite tipuri. Caracteristica funcțională a unui astfel de sistem este *raportul de transmitere*, respectiv raportul între turația axului de intrare și cea a axului de ieșire:

$$i = \frac{n_{in}}{n_{fin}} = \frac{\omega_{in}}{\omega_{fin}} \quad (12.1)$$

Se reamintește că legătura între turație și viteza unghiulară este definită prin relația

$$\omega = \frac{2\pi [\text{rad} / \text{rot}] \cdot n [\text{rot} / \text{min}]}{60 [\text{sec} / \text{min}]} = \frac{\pi n}{30} [\text{rad} / \text{sec}] \quad (12.2)$$

O transmisie mecanică (reductor, cutie de viteze, etc.) poate fi realizată constructiv și funcțional prin una sau mai multe transmisii simple alcătuind trepte succesive și fluxuri paralele de demultiplicare. Raportul de transmitere global se stabilește diferențiat în funcție de rapoartele treptelor respective.

*Mecanismele* sunt sisteme de corpuri complexe înglobând elemente cu forme constructive diverse și acoperind toată gama transformărilor de mișcări în plan sau în spațiu.

Mecanismul primește mișcarea prin intermediul unuia sau mai multor elemente conducătoare, numărul lor reprezentând numărul *gradelor de libertate* ale mecanismului.

În analiza cinematică a unui mecanism oarecare, pornind de la o lege de mișcare impusă unui element conducător, se determină pozițiile elementelor și parametrii lor unghiulari; se calculează pozițiile, vitezele și accelerațiile diferitelor puncte de interes din configurația mecanismului, incluzând printre acestea și punctele de legătură dintre elemente.

Dacă în timpul funcționării o succesiune de poziții ale mecanismului se repetă periodic, de exemplu atunci când elementul conducător are o mișcare de rotație sau de translație alternativă, mișcarea se încadrează într-un *ciclu cinematic*.

---

<sup>\*)</sup> Vom înțelege prin *arbore* un ax care transmite un cuplu; *axul* simplu are un rol pasiv de susținere a roților în lagăre.



Pentru analiză un mecanism real se modelează printr-o *schemă cinematică* în care elementele reale sunt reduse la forme geometrice simple (bare, plăci, roți, etc.), echivalente din punct de vedere funcțional. Partea fixă a mecanismului se numește *bază*.

O succesiune de elemente mobile dintr-un mecanism alcătuiește un *lanț cinematic*. Acesta poate fi *închis* dacă primul și ultimul element din lanț sunt legate la bază (de exemplu mecanismul bielă-manivelă, mecanismul patrulater, mecanismul cu culisă oscilantă, etc.), sau poate fi *deschis* dacă numai primul element este legat la bază (cazul, de exemplu, al unor roboți industriali). De regulă elementele conducătoare sunt legate la bază. La lanțurile cinematice deschise, cu mai multe grade de libertate, elementele motoare pot lega între ele elementele mobile.

## 12.2 Transmisii mecanice simple

a) *Transmisii prin fire*. Mișcarea se transmite de la o roată la alta prin elemente care posedă caracteristicile generale ale firelor (flexibile, inextensibile). În general axele roților sunt paralele. Se consideră că firul nu alunecă pe roată, fie datorită frecării (transmisii prin cabluri sau curele), fie datorită profilării conjugate a zonelor de contact (transmisii prin lanț). În aceste condiții vitezele periferice ale celor două roți sunt egale.

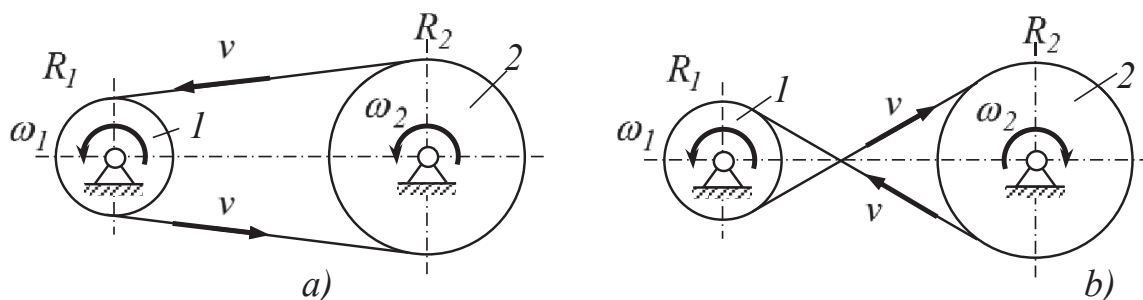


Fig.12.1

Pentru transmisile din fig.12.1 se poate scrie:

$$v = \omega_1 R_1 = \omega_2 R_2 \quad (12.3)$$

Raportul de transmitere va fi

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{R_2}{R_1} \quad (12.4)$$

La transmisiiile cu axe paralele raportul de transmitere este negativ dacă sensul de rotație se inversează (fig.12.1, a).

b) *Transmisii prin fricțiune*. Roțile acestor transmisii se află în contact nemijlocit exterior (fig.12.2, a), interior (fig.12.2, b) sau lateral (fig.12.2, c). În ipoteza că nu există alunecare între suprafețe, punctele de contact vor avea aceeași viteză. Relațiile de mai sus, stabilite pentru transmisiiile prin fire sunt valabile și în cazul transmisiiilor prin fricțiune. La transmisia laterală, prin deplasarea axială a roții 1 și modificarea pe această cale a razei  $R_2$ , se poate realiza o variație continuă a raportului de transmitere.

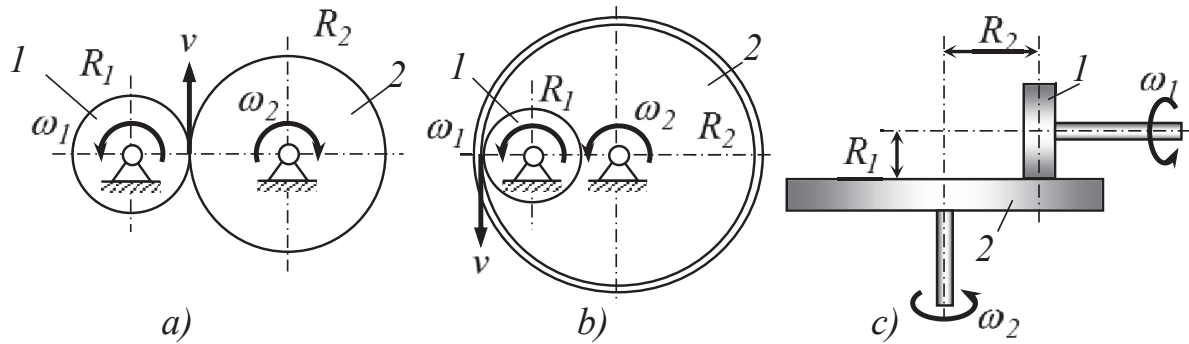


Fig.12.2

c) *Transmisii prin roți dințate cilindrice (angrenaje cilindrice).*

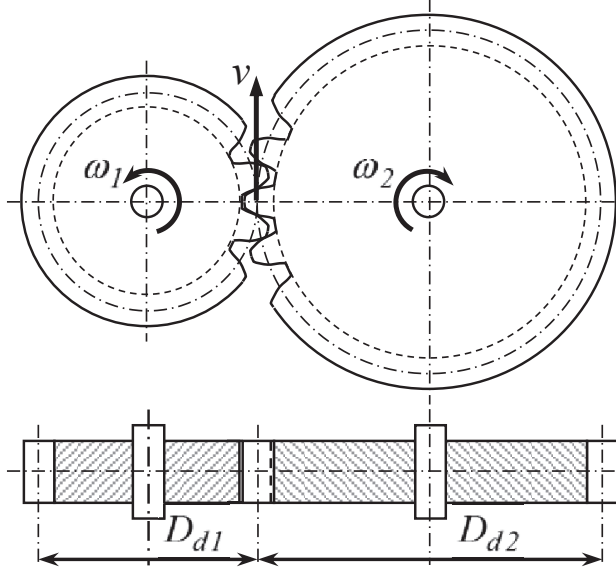


Fig.12.3

Mișcarea de rotație se transmite între axe paralele. Contactul teoretic este realizat între două suprafețe cilindrice, reciproc tangente, având în profil cercurile de divizare cu diametrele  $D_{d1}$  și respectiv  $D_{d2}$  (fig.12.3). Pentru orice roată dințată elementul geometric definitoriu este modulul  $m$ , mărime standardizată, respectiv raportul între diametrul cercului de divizare și numărul de dinți  $z$  al roții:

$$m = D_d / z \quad (12.5)$$

Angrenarea este posibilă dacă ambele roți au același modul. Pornind de la

viteza punctului de tangență al cercurilor de divizare:

$$v = \frac{\omega_1 D_{d1}}{2} = \frac{\omega_2 D_{d2}}{2} \quad (12.6)$$

se stabilește raportul de transmitere al angrenajului:

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{D_{d2}}{D_{d1}} = \frac{mz_2}{mz_1} = \frac{z_2}{z_1} \quad (12.7)$$

c) *Transmisii prin roți dințate conice (angrenaje conice).* În acest caz mișcarea de rotație se transmite între două axe concurente. Contactul teoretic este realizat între două suprafețe conice având vârful în punctul de intersecție al celor două axe și reciproc tangente după generatoare (fig.12.4). Profilul danturii este variabil în lungul liniei de contact; fără a intra în detalii constructive, se menționează că în cazul angrenajelor conice se ia în considerare un modul mediu, respectiv raportul între diametrul cercului de divizare mediu  $D_d$  și numărul de dinți  $z$  al roții.

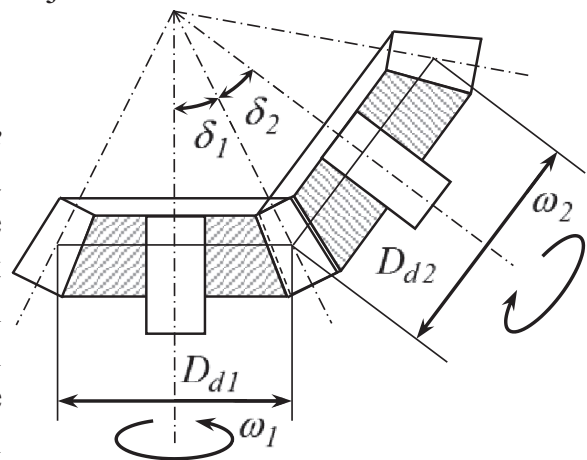


Fig.12.4

Pornind de la viteza punctului mediu de contact se stabilește raportul de transmitere:

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{D_{d2}}{D_{d1}} = \frac{mz_2}{mz_1} = \frac{z_2}{z_1} = \frac{\sin \delta_1}{\sin \delta_2} \quad (12.8)$$

### 12.3 Transmisii complexe prin fire

Sistemele de corpuri analizate din punct de vedere cinematic în cadrul prezentului capitol au în special un rol pregător pentru prezentarea în cele ce vor urma a metodelor de analiză dinamică. Aceste sisteme sunt alcătuite în general din corpuri simple cu mișcare plană (translație, rotație sau plan-paralelă); mișcarea se transmite de la un corp la altul prin fire. Sistemele se pot pune în mișcare gravitațional sau prin acțiunea unor dispozitive de antrenare.

Fiecare corp din sistem are un număr de parametri poziționali în funcție de felul mișcării, după cum urmează: pentru translație – o deplasare liniară, pentru rotație – o deplasare unghiulară, pentru o mișcare plan-paralelă – o deplasare liniară și una unghiulară. Derivatele de ordinul întâi și doi ale acestora reprezintă vitezele și respectiv accelerațiile, liniare sau unghiulare.

Se reamintește că mișcarea plan-paralelă a unui corp poate fi considerată atât ca o rotație în jurul centrului instantaneu de rotație cât și ca o compunere dintre o translație cu parametrii cinematici ai unui punct al corpului și o rotație în jurul acestuia; de regulă punctul respectiv este centrul de masă al corpului.

Un sistem poate avea unul sau mai multe grade de libertate; numărul acestora este egal cu cel al parametrilor poziționali independenți. În general acești parametri se atribuie acelor corpuri care generează mișcarea.

Scopul acestei analize cinematice este de a stabili niște relații între parametrii cinematici ai tuturor corpurilor în funcție de parametrii independenți, atât pentru deplasări cât și pentru viteze și accelerații.

Pentru simplificarea tratării se consideră că aceste sisteme pornesc din repaus, astfel că relațiile pentru poziția, viteza și accelerația unui corp au aceeași formă. Din acest motiv este mai comod ca analiza legăturii între parametri să se facă pentru viteze, extrapolându-se apoi relațiile obținute pentru deplasări și accelerații. Parametrii poziționali se raportează la poziția inițială.

*Problema 12.1.* Sistemul din fig.12.5, compus din patru corpuri, se pune în mișcare sub acțiunea greutateilor corpurilor pornind din repaus. Se cunosc razele roților. Corpul 4 se rostogolește fără alunecare pe o suprafață orizontală. Să se alcătuiască tabelul parametrilor cinematici luând ca bază corpul nr.1.

Date:  $r_2, R_2, r_3, r_4$

Cerute: tabelul cinematic în funcție de  $y_1, v_1, a_1$

Rezolvare: Se observă că corpul nr. 2 are centrul instantaneu de rotație în punctul de contact  $I_2$  cu ramura fixă a firului iar corpul nr.4, datorită rostogolirii fără alunecare, are centrul instantaneu de rotație  $I_4$  în punctul de contact cu linia orizontală.

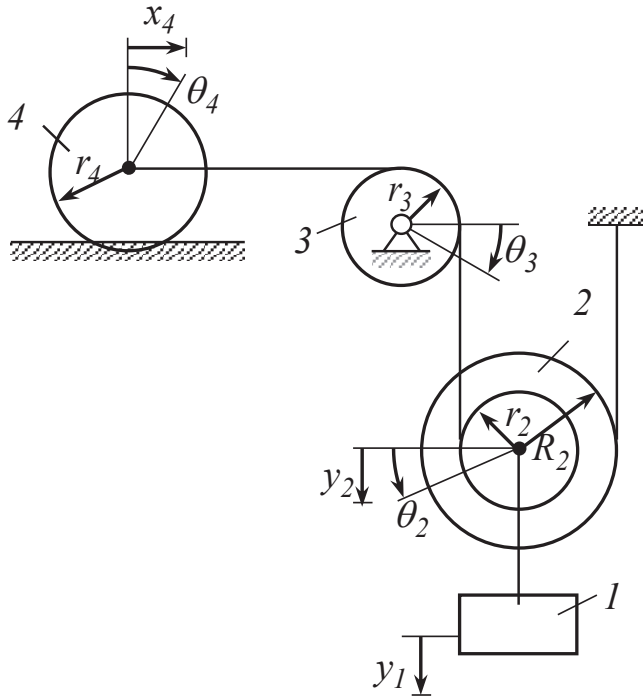


Fig.12.5

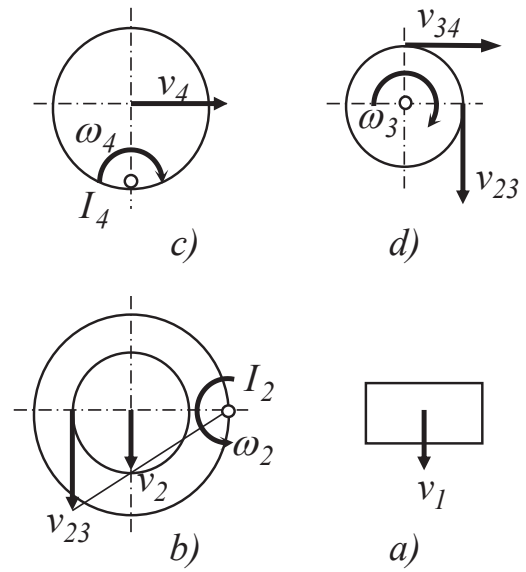


Fig.12.6

Cu notațiile din fig.12.6 se pot scrie următoarele relații de legătură între viteze:

$$\begin{cases} v_2 = \omega_2 R_2 = v_1 \\ v_{23} = \omega_2 (R_2 + r_2) = \omega_3 r_3 \\ v_4 = v_{34} = \omega_3 r_3 = \omega_4 r_4 \end{cases} \quad (12.9)$$

Pe baza acestora se explicitează relațiile din coloana vitezelor și se extrapolează pentru deplasări și accelerații, în tab.12.1.

Tabelul 12.1

Nr.	T/R	Deplasări	Viteze	Acelerații
1	T	$y_1$	$v_1$	$a_1$
2	T	$y_2 = y_1$	$v_2 = v_1$	$a_2 = a_1$
	R	$\theta_2 = \frac{1}{R_2} y_1$	$\omega_2 = \frac{1}{R_2} v_1$	$\varepsilon_2 = \frac{1}{R_2} a_1$
3	R	$\theta_3 = \frac{R_2 + r_2}{R_2 r_3} y_1$	$\omega_3 = \frac{R_2 + r_2}{R_2 r_3} v_1$	$\varepsilon_3 = \frac{R_2 + r_2}{R_2 r_3} a_1$
4	T	$x_4 = \frac{R_2 + r_2}{R_2} y_1$	$v_4 = \frac{R_2 + r_2}{R_2} v_1$	$a_4 = \frac{R_2 + r_2}{R_2} a_1$
	R	$\theta_4 = \frac{R_2 + r_2}{R_2 r_4} y_1$	$\omega_4 = \frac{R_2 + r_2}{R_2 r_4} v_1$	$\varepsilon_4 = \frac{R_2 + r_2}{R_2 r_4} a_1$

**Problema 12.2** În fig. 12.7 este dat un sistem cu două grade de libertate care se pune în mișcare sub acțiunea propriilor greutateți ale corpurilor componente. Se cere să se analizeze din punct de vedere cinematic acest sistem și să se alcătuiască tabelul parametrilor cinematici.

**Date:**  $R$

**Cerute:** tabelul cinematic în funcție de  $\theta_3$ ,  $\theta_4$  și derivatele acestora.

**Rezolvare:** Corpurile 1 și 2 au fiecare o mișcare relativă în raport cu corpul 3 provocată de rotația acestuia; translația corpului 3 reprezintă mișcarea de transport a acestora.

$$\begin{aligned} v_1 &= v_3 + 2R\omega_3 & v_2 &= v_3 - R\omega_3 \\ v_3 &= 2R\omega_4 & v_5 &= R\omega_4 \end{aligned} \quad (12.10)$$

Aceste viteze sunt reprezentate în fig.12.8 iar rezultatele finale sunt date în tab.12.2.

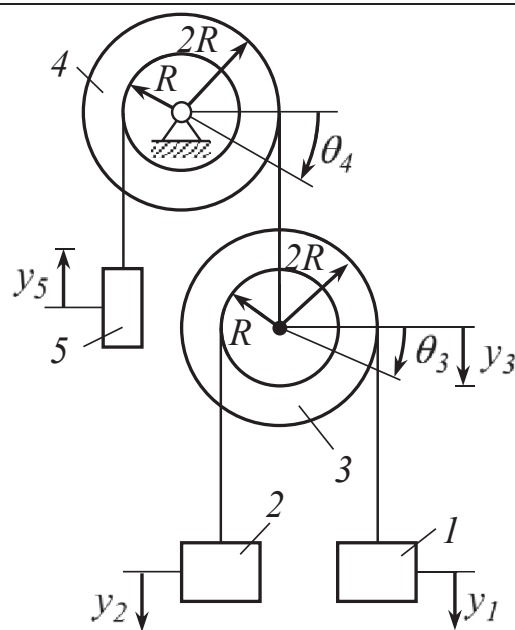


Fig.12.7

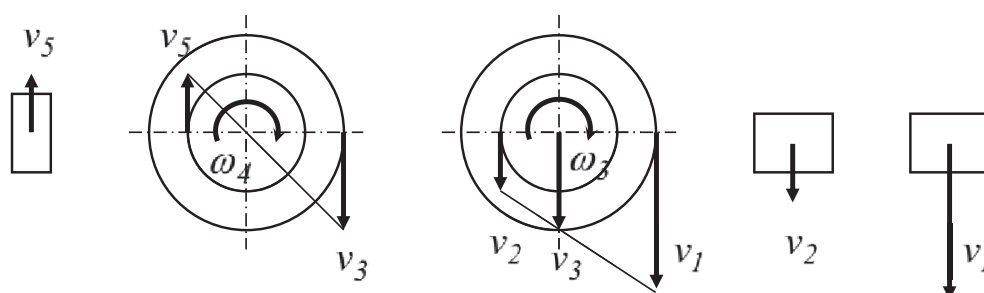


Fig.12.8

**Tabelul 12.2**

Nr.	T/R	Deplasări	Viteze	Acelerații
1	T	$y_1 = 2R\theta_4 + 2R\theta_3$	$v_1 = 2R\omega_4 + 2R\omega_3$	$a_1 = 2R\varepsilon_4 + 2R\varepsilon_3$
2	T	$y_2 = 2R\theta_4 - R\theta_3$	$v_2 = 2R\omega_4 - R\omega_3$	$a_2 = 2R\varepsilon_4 - R\varepsilon_3$
3	T	$y_3 = 2R\theta_4$	$v_3 = 2R\omega_4$	$a_3 = 2R\varepsilon_4$
	R	$\theta_3$	$\omega_3$	$\varepsilon_3$
4	R	$\theta_4$	$\omega_4$	$\varepsilon_4$
5	T	$y_5 = R\theta_4$	$v_5 = R\omega_4$	$a_5 = R\varepsilon_4$

**Observație:** Pentru analiza sistemului se poate alege și o altă combinație de parametri independenți, ca de exemplu  $\theta_3$ ,  $y_3$ .

## 12.4 Mecanisme uzuale simple

Unele dintre mecanismele prezentate în acest capitol au servit în parte ca exemple pentru ilustrarea metodelor de analiză cinematică în mișcarea plan-paralelă. Datorită importanței lor practice se reia analiza lor într-o tratare unitară<sup>\*)</sup>. Algoritmii de calcul pentru fiecare mecanism au fost stabilite pe baza metodei analitice. Pentru simplificarea axelor sistemului de referință global se notează cu litere mici.

### 12.4.1 Mecanismul bielă-manivelă

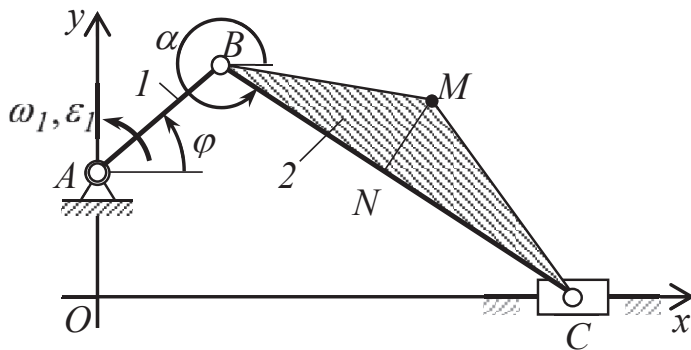


Fig.12.9

Pentru mecanismul din fig.12.9 se cunosc dimensiunile elementelor și legea de mișcare a elementului conducător AB.

Date:  $\varphi = \varphi(t)$ ,  $\omega_1 = \dot{\varphi}$ ,  $\varepsilon_1 = \ddot{\varphi}$

OA, AB, BC, BN, NM

Cerute:

$x_B, y_B, v_B, a_B, x_C, v_C, a_C$

$\alpha, \omega_2, \varepsilon_2, x_M, y_M, v_M, a_M$

Rezolvare: Se scriu ecuațiile matriceale pentru poziții, viteze și accelerații din care se deduc ecuațiile algebrice.

Pentru poziții se utilizează următoarele relații:

$$\begin{bmatrix} x_B \\ y_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ OA \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} AB \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} x_B = AB \cos \varphi \\ y_B = OA + AB \sin \varphi \end{cases} \quad (12.11)$$

$$\begin{bmatrix} x_C \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} BC \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} x_C = x_B + BC \cos \alpha \\ 0 = y_B + BC \sin \alpha \end{cases} \quad (12.12)$$

$$\begin{bmatrix} x_M \\ y_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} BN \\ NM \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} x_M = x_B + \Delta x \\ y_M = y_B + \Delta y \end{cases} \quad (12.13)$$

Unghiul  $\alpha$  are valori în cadranele I și IV, astfel încât  $\cos \alpha > 0$ . Pentru raționalizarea calculului s-au făcut notațiile:

$$\begin{cases} \Delta x = x_M - x_B = BN \cos \alpha - NM \sin \alpha \\ \Delta y = y_M - y_B = BN \sin \alpha + NM \cos \alpha \end{cases} \quad (12.14)$$

Pentru viteze se cunosc relațiile de definiție:

$$v_B = \omega_1 AB \quad (12.15)$$

$$v_{CB} = \omega_2 BC \quad (12.16)$$

<sup>\*)</sup> Într-o abordare ulterioară se va relua analiza acestora pe baza grupelor structurale binare.

Relațiile între viteze sunt următoarele:

$$\begin{bmatrix} v_{Bx} \\ v_{By} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ v_B \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} v_{Bx} = -v_B \sin\varphi \\ v_{By} = v_B \cos\varphi \end{cases} \quad (12.17)$$

$$\begin{bmatrix} v_{Cx} \\ v_{Cy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{Bx} \\ v_{By} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ v_{CB} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} v_C = v_{Bx} - v_{CB} \sin\alpha \\ 0 = v_{By} + v_{CB} \cos\alpha \end{cases} \quad (12.18)$$

$$\begin{bmatrix} v_{Mx} \\ v_{My} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{Bx} \\ v_{By} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\omega_2 NM \\ \omega_2 BN \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} v_{Mx} = v_{Bx} - \omega_2 \Delta y \\ v_{My} = v_{By} + \omega_2 \Delta x \end{cases} \quad (12.19)$$

Pentru accelerații se cunosc relațiile de definiție:

$$\begin{cases} a_B^v = -\omega_1^2 AB \\ a_B^\tau = \varepsilon_1 AB \end{cases} \quad (12.20) \quad \begin{cases} a_{CB}^v = -\omega_2^2 BC \\ a_{CB}^\tau = \varepsilon_1 BC \end{cases} \quad (12.21)$$

Se stabilesc în continuare relațiile între accelerații:

$$\begin{bmatrix} a_{Bx} \\ a_{By} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_B^v \\ a_B^\tau \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} a_{Bx} = a_B^v \cos\varphi - a_B^\tau \sin\varphi \\ a_{By} = a_B^v \sin\varphi + a_B^\tau \cos\varphi \end{cases} \quad (12.22)$$

$$\begin{bmatrix} a_C \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{Bx} \\ a_{By} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{CB}^v \\ a_{CB}^\tau \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} a_C = a_{Bx} + a_{CB}^v \cos\alpha - a_{CB}^\tau \sin\alpha \\ 0 = a_{By} + a_{CB}^v \sin\alpha + a_{CB}^\tau \cos\alpha \end{cases} \quad (12.23)$$

$$\begin{bmatrix} a_{Mx} \\ a_{My} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{Bx} \\ a_{By} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\omega_2^2 BN - \varepsilon_2 NM \\ -\omega_2^2 NM + \varepsilon_2 BN \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} a_{Mx} = a_{Bx} - \omega_2^2 \Delta x - \varepsilon_2 \Delta y \\ a_{My} = a_{By} - \omega_2^2 \Delta y + \varepsilon_2 \Delta x \end{cases} \quad (12.24)$$

Pe baza relațiilor analitice deduse mai sus se alcătuiește algoritmul de calcul din tab.12.3.

**Tabelul 12.3**

Nr.	Relația de calcul	Nr.	Relația de calcul
1	$x_B = AB \cos \varphi$	16	$v_{Mx} = v_{Bx} - \omega_2 \Delta y$
2	$y_B = OA + AB \sin \varphi$	17	$v_{My} = v_{By} + \omega_2 \Delta x$
3	$\sin \alpha = -y_B / BC$	18	$v_M = \sqrt{(v_{Mx})^2 + (v_{My})^2}$
4	$\cos \alpha = +\sqrt{1 - (\sin \alpha)^2}$	19	$a_B^v = -\omega_1^2 AB$
5	$x_C = x_B + BC \cos \alpha$	20	$a_B^\tau = \varepsilon_1 AB$
6	$\Delta x = BN \cos \alpha - NM \sin \alpha$	21	$a_{Bx} = a_B^v \cos \varphi - a_B^\tau \sin \varphi$
7	$\Delta y = BN \sin \alpha + NM \cos \alpha$	22	$a_{By} = a_B^v \sin \varphi + a_B^\tau \cos \varphi$
8	$x_M = x_B + \Delta x$	23	$a_B = \sqrt{(a_B^v)^2 + (a_B^\tau)^2}$
9	$y_M = y_B + \Delta y$	24	$a_{CB}^v = -\omega_2^2 BC$
10	$v_B = \omega_1 AB$	25	$a_{CB}^\tau = -(a_{By} + a_{CB}^v \sin \alpha) / \sin \alpha$
11	$v_{Bx} = -v_B \sin \varphi$	26	$\varepsilon_2 = a_{CB}^\tau / BC$
12	$v_{By} = v_B \cos \varphi$	27	$a_C = a_{Bx} + a_{CB}^v \cos \alpha - a_{CB}^\tau \sin \alpha$
13	$v_{CB} = -v_{By} / \cos \alpha$	28	$a_{Mx} = a_{Bx} - \omega_2^2 \Delta x - \varepsilon_2 \Delta y$
14	$\omega_2 = v_{CB} / BC$	29	$a_{My} = a_{By} - \omega_2^2 \Delta y + \varepsilon_2 \Delta x$
15	$v_C = v_{Bx} - v_{CB} \sin \alpha$	30	$a_M = \sqrt{(a_{Mx})^2 + (a_{My})^2}$

### 12.4.2 Mecanismul patruleter articulată

La mecanismul patruleter articulată din fig.12.10, format din manivela  $OA$ , biela  $AB$  și balansierul  $CB$ , sunt date dimensiunile elementelor și legea de mișcare a manivelei  $OA$ . Pe bielă se află un punct de interes  $M$ .

Date:  $\varphi = \varphi(t)$ ,  $\omega_1 = \dot{\varphi}$ ,  $\varepsilon_1 = \ddot{\varphi}$

$OC$ ,  $OA$ ,  $AB$ ,  $CB$ ,  $AN$ ,  $NM$

Cerute:  $x_A$ ,  $y_A$ ,  $v_A$ ,  $a_A$ ,  $x_B$ ,  $y_B$ ,  $v_B$ ,  $a_B$ ,

$\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\omega_2$ ,  $\omega_3$ ,  $\varepsilon_2$ ,  $\varepsilon_3$ ,  $x_M$ ,  $y_M$ ,  $v_M$ ,  $a_M$

Rezolvare: Relațiile matriceale și ecuațiile algebrice provenite din acestea, sunt:

$$\begin{bmatrix} x_A \\ y_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} OA \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} x_A = OA \cos \varphi \\ y_A = OA \sin \varphi \end{cases} \quad (12.25)$$

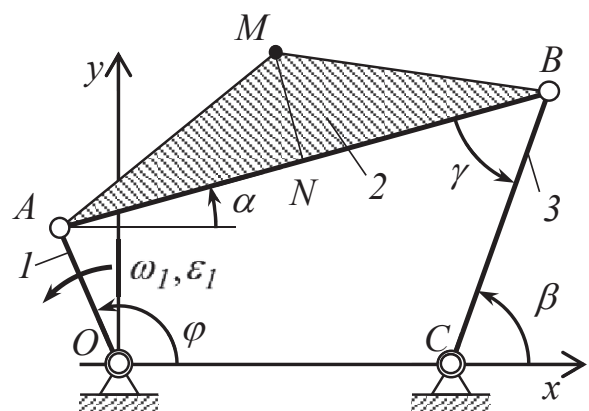


Fig.12.10



$$\begin{bmatrix} x_B \\ y_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} AB \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} OC \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} CB \\ 0 \end{bmatrix} \quad (12.26)$$

$$\begin{cases} x_B = x_A + AB\cos\alpha = OC + CB\cos\beta \\ y_B = y_A + AB\sin\alpha = CB\sin\beta \end{cases} \quad (12.27)$$

$$\begin{bmatrix} x_M \\ y_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} AN \\ NM \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} x_M = x_A + \Delta x \\ y_M = y_A + \Delta y \end{cases} \quad (12.28)$$

în care s-a notat:

$$\begin{cases} \Delta x = x_M - x_A = AN\cos\alpha - NM\sin\alpha \\ \Delta y = y_M - y_A = AN\sin\alpha + NM\cos\alpha \end{cases} \quad (12.29)$$

Relațiile de definiție pentru viteze sunt:

$$v_A = \omega_1 OA \quad v_{BA} = \omega_2 AB \quad v_B = \omega_3 CB \quad (12.30)$$

Se stabilesc următoarele relații între viteze:

$$\begin{bmatrix} v_{Ax} \\ v_{Ay} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ v_A \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} v_{Ax} = -v_A \sin\varphi \\ v_{Ay} = v_A \cos\varphi \end{cases} \quad (12.31)$$

$$\begin{bmatrix} v_{Bx} \\ v_{By} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{Ax} \\ v_{Ay} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ v_{BA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ v_B \end{bmatrix} \quad (12.32)$$

$$\begin{cases} v_{Bx} = v_{Ax} - v_{BA}\sin\alpha = -v_B\sin\beta \\ v_{By} = v_{Ay} + v_{BA}\cos\alpha = v_B\cos\beta \end{cases} \quad (12.33)$$

$$\begin{bmatrix} v_{Mx} \\ v_{My} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{Ax} \\ v_{Ay} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\omega_2 NM \\ \omega_2 AN \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} v_{Mx} = v_{Ax} - \omega_2 \Delta y \\ v_{My} = v_{Ay} + \omega_2 \Delta x \end{cases} \quad (12.34)$$

Definițiile principalelor accelerații sunt următoarele:

$$\begin{cases} a_A^v = -\omega_1^2 OA \\ a_A^\tau = \varepsilon_1 OA \end{cases} \quad (12.35) \quad \begin{cases} a_{BA}^v = -\omega_2^2 AB \\ a_{BA}^\tau = \varepsilon_1 AB \end{cases} \quad (12.36) \quad \begin{cases} a_B^v = -\omega_3^2 CB \\ a_B^\tau = \varepsilon_3 CB \end{cases} \quad (12.37)$$

Între accelerații există următoarele relații:

$$\begin{bmatrix} a_{Ax} \\ a_{Ay} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_A^v \\ a_A^\tau \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} a_{Ax} = a_A^v \cos\varphi - a_A^\tau \sin\varphi \\ a_{Ay} = a_A^v \sin\varphi + a_A^\tau \cos\varphi \end{cases} \quad (12.38)$$

$$\begin{bmatrix} a_{Bx} \\ a_{By} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{Ax} \\ a_{Ay} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{BA}^v \\ a_{BA}^\tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_B^v \\ a_B^\tau \end{bmatrix} \quad (12.39)$$

$$\begin{cases} a_{Bx} = a_{Ax} + a_{BA}^v \cos\alpha - a_{BA}^\tau \sin\alpha = a_B^v \cos\beta - a_B^\tau \sin\beta \\ a_{By} = a_{Ay} + a_{BA}^v \sin\alpha + a_{BA}^\tau \cos\alpha = a_B^v \sin\beta + a_B^\tau \cos\beta \end{cases} \quad (12.40)$$

$$\begin{bmatrix} a_{Mx} \\ a_{My} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{Ax} \\ a_{Ay} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\omega_2^2 AN - \varepsilon_2 NM \\ -\omega_2^2 NM + \varepsilon_2 AN \end{bmatrix} \quad (12.41)$$

$$\begin{cases} a_{Mx} = a_{Ax} - \omega_2^2 \Delta x - \varepsilon_2 \Delta y \\ a_{My} = a_{Ay} - \omega_2^2 \Delta y + \varepsilon_2 \Delta x \end{cases} \quad (12.41')$$

Pentru realizarea algoritmului de calcul pe baza relațiilor matriceale și analitice prezentate mai sus, este necesară detalierea unor aspecte specifice.

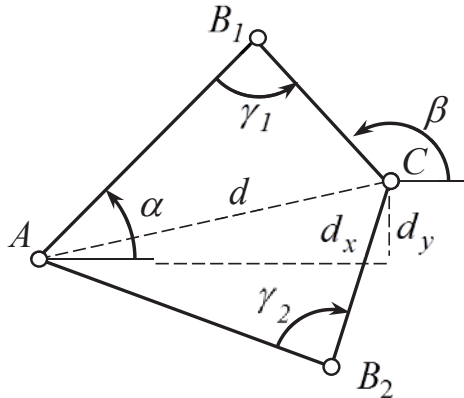


Fig.12.11

Determinarea unghiurilor de poziție  $\alpha$  și  $\beta$  prin funcțiile lor trigonometrice  $\sin$  și  $\cos$  necesită punerea în evidență a unghiului format de elementele  $AB$  și  $CB$  (fig.12.11):

$$\gamma = \beta - \alpha \quad (12.42)$$

Pornind de la pozițiile date ale articulațiilor  $A$  și  $C$  pot construi două poziții distincte ale acestor elemente; pentru același  $|\gamma| < \pi$  vor exista două perechi de unghiuri de poziție  $\alpha$  și  $\beta$ . Măsurând acest unghi de la  $AB$  către  $CB$ , el poate fi pozitiv sau negativ în raport cu sensul trigonometric.

Departajarea între cele două poziții se poate face acordând semnul corespunzător funcției  $\sin \gamma$ . Pentru poziția  $AB_1C$  unghiul  $\gamma_1 > 0$  și deci  $\sin \gamma_1 > 0$ . În poziția  $AB_2C$  unghiul  $\gamma_2 < 0$  și deci  $\sin \gamma_2 < 0$ . Pe parcursul unui ciclu cinematic unghiul  $\gamma$  își păstrează semnul, cu excepția cazului particular în care mecanismul poate să treacă funcțional printr-o poziție critică (respectiv atunci când direcțiile celor două elemente coincid și  $\gamma = 0$  sau  $\gamma = \pi$ ). Se observă că în montajul din fig.12.10, unghiul  $\gamma$  este pozitiv.

În prelucrarea ecuațiilor (12.27) se utilizează dezvoltările trigonometrice:

$$\begin{cases} \sin \gamma = \sin(\beta - \alpha) = \sin \beta \cos \alpha - \cos \beta \sin \alpha \\ \cos \gamma = \cos(\beta - \alpha) = \cos \beta \cos \alpha + \sin \beta \sin \alpha \end{cases} \quad (12.43)$$

Pentru simplificarea calculului se introduc notațiile:

$$d_x = x_C - x_A = OC - x_A \quad d_y = y_C - y_A = -y_A \quad d^2 = d_x^2 + d_y^2 \quad (12.44)$$

în care  $d$  reprezintă distanța dintre articulațiile  $A$  și  $C$  (fig.12.11). Sistemul (12.27) ia forma:

$$\begin{cases} AB \cos \alpha - CB \cos \beta = d_x \\ AB \sin \alpha - CB \sin \beta = d_y \end{cases} \quad \begin{vmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{vmatrix} \quad (12.45)$$

O primă prelucrare a acestor ecuații conduce la relația:

$$AB^2 + CB^2 - 2 \cdot AB \cdot CB (\cos \beta \cos \alpha + \sin \beta \sin \alpha) = d_x^2 + d_y^2 = d^2 \quad (12.46)$$

în care expresia din paranteză este tocmai  $\cos \gamma$ .

Se stabilesc relațiile:

$$\cos \gamma = \frac{AB^2 + CB^2 - d^2}{2 \cdot AB \cdot CB} \quad \sin \gamma = +\sqrt{1 - \cos^2 \gamma} \quad (12.47)$$

în care s-a ținut cont de observația de mai sus referitoare la semnul funcției  $\sin \gamma$

În continuare se elimină funcțiile unghiului  $\beta$  din ecuațiile (12.45) și se obțin relațiile:

$$\begin{cases} AB - CB \cos \gamma = d_x \cos \alpha + d_y \sin \alpha \\ CB \sin \gamma = d_x \sin \alpha - d_y \cos \alpha \end{cases} \quad \begin{vmatrix} d_y \\ d_x \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} d_x \\ -d_y \end{vmatrix} \quad (12.48)$$

Din aceste relații se pot izola funcțiile trigonometrice ale unghiului  $\alpha$ :

$$\begin{cases} \sin \alpha = \frac{(AB - CD \cos \gamma) \cdot d_y + CB \sin \gamma \cdot d_x}{d^2} \\ \cos \alpha = \frac{(AB - CD \cos \gamma) \cdot d_x - CB \sin \gamma \cdot d_y}{d^2} \end{cases} \quad (12.49)$$

Funcțiile trigonometrice ale unghiului  $\beta$  pot fi calculate cu relațiile:

$$\begin{cases} \sin \beta = \sin(\alpha + \gamma) = \sin \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \sin \gamma \\ \cos \beta = \cos(\alpha + \gamma) = \cos \alpha \cos \gamma - \sin \alpha \sin \gamma \end{cases} \quad (12.50)$$

sau pot fi extrase direct din relațiile (12.45):

$$\sin \beta = \frac{AB \sin \alpha - d_y}{CB} \quad \cos \beta = \frac{AB \cos \alpha - d_x}{CB} \quad (12.51)$$

Pentru determinarea vitezelor  $v_{BA}$  și  $v_B$  relațiile (12.33) se pun sub forma

$$\begin{cases} v_{Ax} = v_{BA} \sin \alpha - v_B \sin \beta \\ v_{Ay} = -v_{BA} \cos \alpha + v_B \cos \beta \end{cases} \quad \begin{vmatrix} \cos \beta \\ \sin \beta \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{vmatrix} \quad (12.52)$$

din care se determină succesiv:

$$v_{BA} = \frac{v_{Ax} \cos \beta + v_{Ay} \sin \beta}{\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta} = -\frac{v_{Ax} \cos \beta + v_{Ay} \sin \beta}{\sin \gamma} \quad (12.53)$$

$$v_B = \frac{v_{Ax} \cos \alpha + v_{Ay} \sin \alpha}{\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta} = -\frac{v_{Ax} \cos \alpha + v_{Ay} \sin \alpha}{\sin \gamma} \quad (12.54)$$

În mod asemănător se procedează și pentru calculul accelerațiilor  $a_{BA}^\tau$  și  $a_B^\tau$ . Termenii ecuațiilor (12.40) se grupează sub forma următoare:

$$\begin{cases} \Delta a_x = a_{Ax} + a_{BA}^v \cos \alpha - a_B^v \cos \beta = a_{BA}^\tau \sin \alpha - a_B^\tau \sin \beta \\ \Delta a_y = a_{Ay} + a_{BA}^v \sin \alpha - a_B^v \sin \beta = -a_{BA}^\tau \cos \alpha + a_B^\tau \cos \beta \end{cases} \quad \begin{vmatrix} \cos \beta \\ \sin \beta \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{vmatrix} \quad (12.55)$$

în care  $\Delta a_x$  și  $\Delta a_y$  sunt niște valori intermediare necesare simplificării relațiilor de calcul. Se obțin în final expresiile:

$$a_{BA}^\tau = \frac{\Delta a_x \cos \beta + \Delta a_y \sin \beta}{\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta} = -\frac{\Delta a_x \cos \beta + \Delta a_y \sin \beta}{\sin \gamma} \quad (12.56)$$

$$a_B^\tau = \frac{\Delta a_x \cos \alpha + \Delta a_y \sin \alpha}{\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta} = -\frac{\Delta a_x \cos \alpha + \Delta a_y \sin \alpha}{\sin \gamma} \quad (12.57)$$

Pe baza relațiilor analitice deduse din ecuațiile matriceale se poate alcătui în continuare algoritmul de calcul pentru mecanismul patruleter articulată.

**Tabelul 12.4**

Nr.	Relația de calcul	Nr.	Relația de calcul
1	$x_A = OA \cos \varphi$	22	$v_B = -\frac{v_{Ax} \cos \alpha + v_{Ay} \sin \alpha}{\sin \gamma}$
2	$y_A = OA \sin \varphi$		
3	$d_x = OC - x_A$	23	$\omega_2 = v_{BA} / AB$
4	$d_y = -y_A$	24	$\omega_3 = v_B / CB$
5	$d^2 = d_x^2 + d_y^2$	25	$v_{Mx} = v_{Ax} - \omega_2 \Delta y$
6	$\cos \gamma = \frac{AB^2 + CB^2 - d^2}{2 \cdot AB \cdot CB}$	26	$v_{My} = v_{Ay} + \omega_2 \Delta x$
		27	$v_M = \sqrt{(v_{Mx})^2 + (v_{My})^2}$
7	$\sin \gamma = +\sqrt{1 - \cos^2 \gamma}$	28	$a_A^v = -\omega_1^2 OA$
8	$\sin \alpha = [(AB - CD \cos \gamma) \cdot d_y + CB \sin \gamma \cdot d_x] / d^2$	29	$a_A^\tau = \varepsilon_1 OA$
		30	$a_A = \sqrt{(a_A^v)^2 + (a_A^\tau)^2}$
9	$\cos \alpha = [(AB - CD \cos \gamma) \cdot d_x - CB \sin \gamma \cdot d_y] / d^2$	31	$a_{BA}^v = -\omega_2^2 AB$
		32	$a_B^v = -\omega_3^2 CB$
10	$\sin \beta = (AB \sin \alpha - d_y) / CB$	33	$a_{Ax} = a_A^v \cos \varphi - a_A^\tau \sin \varphi$
11	$\cos \beta = (AB \cos \alpha - d_x) / CB$	34	$a_{Ay} = a_A^v \sin \varphi + a_A^\tau \cos \varphi$
12	$x_B = x_A + AB \cos \alpha$	35	$\Delta a_x = a_{Ax} + a_{BA}^v \cos \alpha - a_B^v \cos \beta$
13	$y_B = y_A + AB \sin \alpha$	36	$\Delta a_y = a_{Ay} + a_{BA}^v \sin \alpha - a_B^v \sin \beta$
14	$\Delta x = AN \cos \alpha - NM \sin \alpha$	37	$a_{BA}^\tau = -(\Delta a_x \cos \beta + \Delta a_y \sin \beta) / \sin \gamma$
15	$\Delta y = AN \sin \alpha + NM \cos \alpha$	38	$a_B^\tau = -(\Delta a_x \cos \alpha + \Delta a_y \sin \alpha) / \sin \gamma$
16	$x_M = x_A + \Delta x$	39	$a_B = \sqrt{(a_B^v)^2 + (a_B^\tau)^2}$
17	$y_M = y_A + \Delta y$	40	$\varepsilon_2 = a_{BA}^\tau / AB$
18	$v_A = \omega_1 OA$	41	$\varepsilon_3 = a_B^\tau / CB$
19	$v_{Ax} = -v_A \sin \varphi$	42	$a_{Mx} = a_{Ax} - \omega_2^2 \Delta x - \varepsilon_2 \Delta y$
20	$v_{Ay} = v_A \cos \varphi$	43	$a_{My} = a_{Ay} - \omega_2^2 \Delta y + \varepsilon_2 \Delta x$
21	$v_{BA} = -\frac{v_{Ax} \cos \beta + v_{Ay} \sin \beta}{\sin \gamma}$	44	$a_M = \sqrt{(a_{Mx})^2 + (a_{My})^2}$

### 12.4.3 Mecanismul cu culisă oscilantă

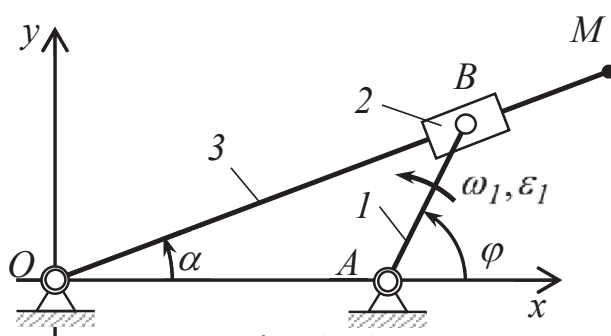


Fig.12.12

Elementul conducător al mecanismului este manivela  $OA$ ; prin intermediul culisei din  $B$  este antrenat balansierul  $OM$ .

Date:  $\varphi = \varphi(t)$ ,  $\omega_1 = \dot{\varphi}$ ,  $\varepsilon_1 = \ddot{\varphi}$

$OA$ ,  $AB$ ,  $OM$

Cerute:  $x_B, y_B, v_B, a_B$ ,

$\alpha, \omega_3, \varepsilon_3, x_M, y_M, v_M, a_M$

Rezolvare: Culisa 2 are o mișcare relativă în raport cu balansierul; se utilizează modul de calcul expus în cap.11.2.2 referitor la mișcările compuse. Se scriu mai întâi ecuațiile matriceale și cele analitice pentru poziții:

$$\begin{bmatrix} x_B \\ y_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} OA \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} AB \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} OB \\ 0 \end{bmatrix} \quad (12.58)$$

$$\begin{cases} x_B = OA + AB\cos\varphi = OB\cos\alpha \\ y_B = AB\sin\varphi = OB\sin\alpha \end{cases} \quad (12.59)$$

$$\begin{bmatrix} x_M \\ y_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} OM \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} x_M = OM\cos\alpha \\ y_M = OM\sin\alpha \end{cases} \quad (12.60)$$

Viteza absolută și cea de transport a centrului culisei precum și viteza punctului  $M$  sunt:

$$\begin{cases} v_a \equiv v_B = \omega_1 AB \\ v_t = \omega_3 OB \end{cases} \quad (12.61) \quad v_M = \omega_3 OM \quad (12.62)$$

Relațiile matriceale și analitice pentru viteze sunt:

$$\begin{bmatrix} v_{Bx} \\ v_{By} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ v_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_r \\ v_t \end{bmatrix} \quad (12.63)$$

$$\begin{cases} v_{Bx} = -v_B \sin\varphi = v_r \cos\alpha - v_t \sin\alpha \\ v_{By} = v_B \cos\varphi = v_r \sin\alpha + v_t \cos\alpha \end{cases} \quad (12.64)$$

Pentru accelerațiile mișcării compuse a culisei se utilizează relațiile:

$$\begin{cases} a_a^v \equiv a_B^v = \omega_1^2 AB \\ a_a^r \equiv a_B^r = \varepsilon_1 AB \end{cases} \quad (12.65) \quad \begin{cases} a_t^v = \omega_3^2 OB \\ a_t^r = \varepsilon_3 OB \end{cases} \quad (12.66) \quad a_{cor} = 2\omega_3 v_r \quad (12.67)$$

iar pentru accelerația punctului  $M$  se utilizează următoarele relații de definiție:

$$a_M^v = \omega_3^2 OM \quad a_M^r = \varepsilon_3 OM \quad (12.68)$$

Se prezintă în continuare relațiile matriceale și analitice pentru accelerații:

$$\begin{bmatrix} a_{Bx} \\ a_{By} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_B^v \\ a_B^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_t^v + a_r \\ a_t^r + a_{cor} \end{bmatrix} \quad (12.69)$$

$$\begin{cases} a_{Bx} = a_B^v \cos \varphi - a_B^{\tau} \sin \varphi = (a_t^v + a_r) \cos \alpha - (a_t^{\tau} + a_{cor}) \sin \alpha \\ a_{By} = a_B^v \sin \varphi + a_B^{\tau} \cos \varphi = (a_t^v + a_r) \sin \alpha + (a_t^{\tau} + a_{cor}) \cos \alpha \end{cases} \quad (12.70)$$

Ca și în aplicațiile precedente, pe baza acestor relații se alcătuieste algoritmul de calcul pentru mecanismul cu culisă oscilantă, algoritmul prezentat în tab.12.5.

**Tabelul 12.5**

Nr.	Relația de calcul	Nr.	Relația de calcul
1	$OB = \sqrt{OA^2 + AB^2 + 2 \cdot OA \cdot AB \cdot \cos \varphi}$	14	$a_t^v = \omega_3^2 OB$
2	$\sin \alpha = AB \sin \varphi / OB$	15	$a_{cor} = 2\omega_3 v_r$
3	$\cos \alpha = (OA + AB \cos \varphi) / OB$	16	$\Delta a_x = a_B^v \cos \varphi - a_B^{\tau} \sin \varphi - a_t^v \cos \alpha + a_{cor} \sin \alpha$
4	$x_M = OM \cos \alpha$		
5	$y_M = OM \sin \alpha$	17	$\Delta a_y = a_B^v \sin \varphi + a_B^{\tau} \cos \varphi - a_t^v \sin \alpha - a_{cor} \cos \alpha$
6	$v_B = \omega_1 AB$		
7	$v_r = v_B (\sin \alpha \cos \varphi - \sin \varphi \cos \alpha)$	18	$a_r = \Delta a_x \cos \alpha + \Delta a_y \sin \alpha$
8	$v_t = v_B (\cos \alpha \cos \varphi + \sin \alpha \sin \varphi)$	19	$a_t^{\tau} = -\Delta a_x \sin \alpha + \Delta a_y \cos \alpha$
9	$\omega_3 = v_t / OB$	20	$\varepsilon_3 = a_t^{\tau} / OB$
10	$v_M = \omega_2 OM$	21	$a_M^v = \omega_3^2 OM$
11	$a_B^v = \omega_1^2 AB$	22	$a_M^{\tau} = \varepsilon_3 OM$
12	$a_B^{\tau} = \varepsilon_1 AB$	23	$a_M = \sqrt{(a_M^v)^2 + (a_M^{\tau})^2}$
13	$a_B = \sqrt{(a_B^v)^2 + (a_B^{\tau})^2}$		

#### 12.4.4 Mecanism cu lanț cinematic deschis

În fig.12.13 este reprezentat un mecanism a cărui configurație se întâlnește la unele manipolatoare sau roboți industriali. Lanțul cinematic principal al acestuia, format din elementele conduse  $OB$  și  $BM$ , este deschis, în sensul că numai unul dintre ele este legat la bază. În această aplicație elementele conducătoare  $AB$  și  $CD$  au lungimi variabile pe direcțiile care unesc punctele lor de legătură (putând fi, de exemplu, cilindri hidraulici, pneumatici sau alt gen de motoare liniare). Din punct de vedere funcțional, mecanismul are două grade de libertate, parametrii poziționali independenți fiind deplasările liniare  $s_1$  și  $s_2$  în raport cu lungimea minimă a fiecăreia dintre elementele  $AB$  și  $CD$ .

Date:  $s_1 = s_1(t), v_1 = \dot{s}_1, a_1 = \ddot{s}_1$        $s_2 = s_2(t), v_2 = \dot{s}_2, a_2 = \ddot{s}_2$   
 $OA, OB, OC, BM, BD, AB_{\min}, CD_{\min}$

Cerute:  $x_M, y_M, v_M, a_M$

**Rezolvare:** Elementele conducătoare ale mecanismului au o mișcare compusă, astfel că pentru parametrii cinematici ai punctelor de antrenare se vor utiliza relațiile specifice expuse în cap.11. Toate elementele mecanismului au mișcări plane și pentru determinarea relațiilor de calcul se va utiliza metoda analitică.

**a) Calculul pozițional.**

Elementele conducătoare au lungimile:

$$AB = AB_{\min} + s_1 \quad (12.71)$$

$$CD = CD_{\min} + s_2$$

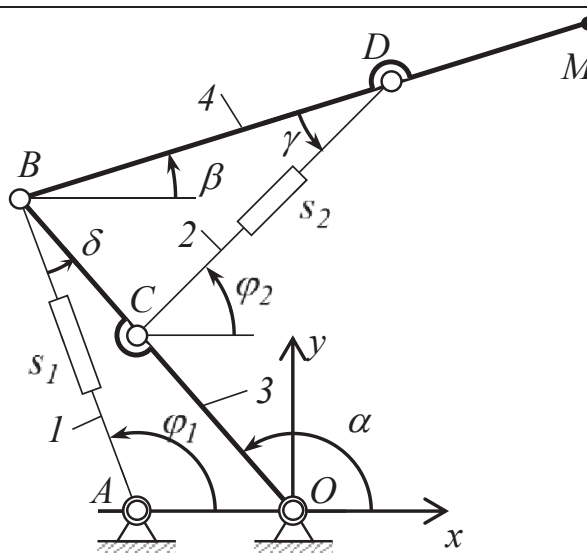


Fig.12.13

Pentru poziția elementului  $OB$  se scriu următoarele relații matriceale și analitice:

$$\begin{bmatrix} x_B \\ y_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} OA \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 \\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} AB \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} OB \\ 0 \end{bmatrix} \quad (12.72)$$

$$\begin{cases} x_B = OA + AB\cos\varphi_1 = OB\cos\alpha \\ y_B = AB\sin\varphi_1 = OB\sin\alpha \end{cases} \quad (12.73)$$

Din aceste ecuații rezultă unghiurile  $\alpha < \pi$  și  $\varphi_1$  prin funcțiile trigonometrice:

$$\cos\alpha = \frac{OA^2 + OB^2 - AB^2}{2 \cdot OA \cdot OB} \quad (12.74) \quad \sin\alpha = +\sqrt{1 - \cos^2\alpha} \quad (12.75)$$

$$\cos\varphi_1 = \frac{OB\cos\alpha - OA}{AB} \quad (12.76) \quad \sin\varphi_1 = \frac{OB\sin\alpha}{AB} \quad (12.77)$$

Coordonatele punctului  $B$  se determină din (12.73). Pentru  $C$  se calculează:

$$\begin{bmatrix} x_C \\ y_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} OC \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} x_C = OC\cos\alpha \\ y_C = OC\sin\alpha \end{cases} \quad (12.78)$$

Pentru determinarea unghiurilor  $\beta$  și  $\varphi_2$  se pornește de la relațiile:

$$\begin{bmatrix} x_D \\ y_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} BD \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_C \\ y_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\varphi_2 & -\sin\varphi_2 \\ \sin\varphi_2 & \cos\varphi_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} CD \\ 0 \end{bmatrix} \quad (12.79)$$

$$\begin{cases} x_D = x_B + BD\cos\beta = x_C + CD\cos\varphi_2 \\ y_D = y_B + BD\sin\beta = y_C + CD\sin\varphi_2 \end{cases} \quad (12.80)$$

Modul de rezolvare al acestor ecuații este asemănător celui descris la mecanismul patrulater articulat (cap.12.4.2, rel.12.44 - 12.51). Se introduc notațiile:

$$\begin{cases} d_x = x_C - x_B \\ d_y = y_C - y_B \end{cases} \quad (12.81) \quad d^2 = d_x^2 + d_y^2 = CB^2 = (OB - OC)^2 \quad (12.82)$$

Se pun ecuațiile (12.80) sub forma:

$$\begin{cases} BD \cos \beta - CD \cos \varphi_2 = d_x \\ BD \sin \beta - CD \sin \varphi_2 = d_y \end{cases} \quad \left| \begin{array}{c} \cos \beta \\ \sin \beta \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{c} \sin \beta \\ -\cos \beta \end{array} \right. \quad (12.83)$$

Se introduce în calcule unghiul interior  $\gamma = \varphi_2 - \beta$  (fig.12.13). Pentru determinarea lui se ridică la pătrat și se adună relațiile de mai sus; se obține:

$$\cos \gamma = \frac{BD^2 + CD^2 - d^2}{2 \cdot BD \cdot CD} \quad (12.84) \quad \sin \gamma = +\sqrt{1 - \cos^2 \gamma} \quad (12.85)$$

Se înmulțesc ecuațiile (12.83) cu funcțiile unghiului  $\beta$  și se adună. Se obține sistemul:

$$\begin{cases} BD - CD \cos \gamma = d_x \cos \beta + d_y \sin \beta \\ CD \sin \gamma = d_x \sin \beta - d_y \cos \beta \end{cases} \quad \left| \begin{array}{c} d_y \\ d_x \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{c} d_x \\ -d_y \end{array} \right. \quad (12.86)$$

Se prelucrează sistemul și se determină funcțiile trigonometrice ale unghiului  $\beta$ :

$$\begin{cases} \sin \beta = \frac{(BD - CD \cos \gamma) \cdot d_y + CD \sin \gamma \cdot d_x}{d^2} \\ \cos \beta = \frac{(BD - CD \cos \gamma) \cdot d_x - CD \sin \gamma \cdot d_y}{d^2} \end{cases} \quad (12.87)$$

Din (12.83) se calculează funcțiile unghiului  $\varphi_2$ :

$$\sin \varphi_2 = \frac{BD \sin \beta - d_y}{CD} \quad \cos \varphi_2 = \frac{BD \cos \beta - d_x}{CD} \quad (12.88)$$

Cu aceste determinări se pot calcula coordonatele punctului  $M$ :

$$\begin{bmatrix} x_M \\ y_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} BM \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} x_M = x_B + BM \cos \beta \\ y_M = y_B + BM \sin \beta \end{cases} \quad (12.89)$$

### b) Calculul vitezelor

Mișcarea compusă a punctului  $B$  se efectuează cu următoarele viteze:

$$v_a \equiv v_B = \omega_3 OB \quad v_r = v_l \quad v_t = \omega_1 AB \quad (12.90)$$

cunoscută fiind numai viteza relativă  $v_l$ . Între aceste viteze există relațiile:

$$\begin{bmatrix} v_{Bx} \\ v_{By} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ v_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_1 & -\sin \varphi_1 \\ \sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_l \\ v_t \end{bmatrix} \quad (12.91)$$

$$\begin{cases} v_{Bx} = -v_B \sin \alpha = v_l \cos \varphi_1 - v_t \sin \varphi_1 \\ v_{By} = v_B \cos \alpha = v_l \sin \varphi_1 + v_t \cos \varphi_1 \end{cases} \quad (12.92)$$

Se notează  $\delta = \alpha - \varphi_1$  (fig.12.13) și se determină în continuare vitezele  $v_B$  și  $v_t$ :

$$v_B = -\frac{v_l}{\sin \alpha \cos \varphi_1 - \cos \alpha \sin \varphi_1} = -\frac{v_l}{\sin(\alpha - \varphi_1)} = -\frac{v_l}{\sin \delta} \quad (12.93)$$

$$v_t = -v_l \frac{\cos \alpha \cos \varphi_1 + \sin \alpha \sin \varphi_1}{\sin \alpha \cos \varphi_1 - \cos \alpha \sin \varphi_1} = -v_l \frac{\cos(\alpha - \varphi_1)}{\sin(\alpha - \varphi_1)} = -v_l \frac{\cos \delta}{\sin \delta} \quad (12.94)$$



Se determină în continuare vitezele unghulare:

$$\omega_1 = \frac{v_t}{AB} \quad (12.95) \quad \omega_3 = \frac{v_B}{OB} \quad (12.96)$$

Pentru viteza punctului de legătură  $C$  se pot scrie relațiile:

$$v_C = \omega_3 OC \quad (12.97)$$

$$\begin{bmatrix} v_{Cx} \\ v_{Cy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ v_C \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} v_{Cx} = -v_C \sin \alpha \\ v_{Cy} = v_C \cos \alpha \end{cases} \quad (12.98)$$

Pentru punctul  $D$  se pornește de la definirea vectorială a vitezelor care intră în relația generală:

$$\bar{v}_a \equiv \bar{v}_D = \bar{v}_r + \bar{v}_t \rightarrow \bar{v}_B + \bar{v}_{DB} = \bar{v}_r + \bar{v}_C + \bar{v}_{DC} \quad (12.99)$$

în care:

$$v_{DB} = \omega_4 BD \quad v_r = v_2 \quad v_{DC} = \omega_2 CD \quad (12.100)$$

Relația (12.100) se transpune matriceal sub forma:

$$\begin{bmatrix} v_{Bx} \\ v_{By} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ v_{DB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{Cx} \\ v_{Cy} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \varphi_2 & -\sin \varphi_2 \\ \sin \varphi_2 & \cos \varphi_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_2 \\ v_{DC} \end{bmatrix} \quad (12.101)$$

care se dezvoltă și se ordonează prin relațiile:

$$\begin{cases} \Delta v_x = v_{Bx} - v_{Cx} = v_{DB} \sin \beta - v_{DC} \sin \varphi_2 \\ \Delta v_y = v_{By} + v_{Cy} = -v_{DB} \cos \beta + v_{DC} \cos \varphi_2 \end{cases} \quad (12.102)$$

în care  $\Delta v_x$  și  $\Delta v_y$  sunt niște notații intermediare. Din aceste ecuații se deduc:

$$v_{DB} = -\frac{\Delta v_x \cos \varphi_2 + \Delta v_y \sin \varphi_2}{\sin \gamma} \quad (12.103)$$

$$v_{DC} = -\frac{\Delta v_x \cos \beta + \Delta v_y \sin \beta}{\sin \gamma} \quad (12.104)$$

în care s-a introdus:

$$\sin \varphi_2 \cos \beta - \cos \varphi_2 \sin \beta = \sin(\varphi_2 - \beta) = \sin \gamma \quad (12.105)$$

cunoscut din calculul pozițional. Pe baza relațiilor (12.100) se calculează vitezele unghulare:

$$\omega_2 = \frac{v_{DC}}{CD} \quad (12.106) \quad \omega_4 = \frac{v_{DB}}{BD} \quad (12.107)$$

În continuare se calculează viteza punctului  $M$ :

$$v_{MB} = \omega_4 BM \quad (12.108)$$

$$\begin{bmatrix} v_{Mx} \\ v_{My} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{Bx} \\ v_{By} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ v_{MB} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} v_{Mx} = v_{Bx} - v_{MB} \sin \beta \\ v_{My} = v_{By} + v_{MB} \sin \beta \end{cases} \quad (12.109)$$

c) Calculul accelerațiilor

Pentru accelerația mișcării punctului  $B$  se scriu următoarele relații:

$$\begin{cases} a_a^V \equiv a_B^V = -\omega_3^2 OB \\ a_a^T \equiv a_B^T = \varepsilon_3 OB \end{cases} \quad (12.110) \quad \begin{cases} a_t^V = -\omega_1^2 AB \\ a_t^T = \varepsilon_1 AB \end{cases} \quad (12.111) \quad \begin{cases} a_r = a_1 \\ a_{cor} = 2\omega_1 \varepsilon_1 \end{cases} \quad (12.112)$$

Legătura între ele este dată de relația matriceală:

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_B^V \\ a_B^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_1 & -\sin \varphi_1 \\ \sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_t^V + a_1 \\ a_t^T + a_{cor} \end{bmatrix} \quad (12.113)$$

din care se obțin ecuațiile analitice care se pun sub forma:

$$\begin{cases} \Delta a_x = a_B^V \cos \alpha - (a_t^V + a_1) \cos \varphi_1 + a_{cor} \sin \varphi_1 = a_B^T \sin \alpha - a_t^T \sin \varphi_1 \\ \Delta a_y = a_B^V \sin \alpha - (a_t^V + a_1) \sin \varphi_1 - a_{cor} \cos \varphi_1 = -a_B^T \cos \alpha + a_t^T \cos \varphi_1 \end{cases} \quad (12.114)$$

În aceste relații  $\Delta a_x$  și  $\Delta a_y$  sunt niște accelerații auxiliare, egale cu prima parte a acestor ecuații, care servesc la simplificarea relațiilor de calcul pentru  $a_B^T$  și  $a_t^T$ :

$$a_B^T = \frac{\Delta a_x \cos \varphi_1 + \Delta a_y \sin \varphi_1}{\sin \delta} \quad (12.115) \quad a_t^T = \frac{\Delta a_x \cos \alpha + \Delta a_y \sin \alpha}{\sin \delta} \quad (12.116)$$

Se determină în continuare accelerațiile unghiulare:

$$\varepsilon_3 = a_B^T / OB \quad (12.117) \quad \varepsilon_1 = a_t^T / AB \quad (12.118)$$

Accelerația punctului  $B$  este determinată de relațiile:

$$\begin{bmatrix} a_{Bx} \\ a_{By} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_B^V \\ a_B^T \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} a_{Bx} = a_B^V \cos \alpha - a_B^T \sin \alpha \\ a_{By} = a_B^V \sin \alpha + a_B^T \cos \alpha \end{cases} \quad (12.119)$$

Accelerația punctului  $C$  se determină în mod asemănător:

$$a_C^V = -\omega_3^2 OC \quad a_C^T = \varepsilon_3 OC \quad (12.120)$$

$$\begin{bmatrix} a_{Cx} \\ a_{Cy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_C^V \\ a_C^T \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} a_{Cx} = a_C^V \cos \alpha - a_C^T \sin \alpha \\ a_{Cy} = a_C^V \sin \alpha + a_C^T \cos \alpha \end{cases} \quad (12.121)$$

Accelerația mișcării compuse a punctului  $D$  se studiază pornind de la expresia vectorială:

$$\bar{a}_a \equiv \bar{a}_D = \bar{a}_r + \bar{a}_t + \bar{a}_{cor} \rightarrow \bar{a}_B + \bar{a}_{DB} = \bar{a}_r + \bar{a}_C + \bar{a}_{DC} + \bar{a}_{cor} \quad (12.122)$$

în care accelerațiile se calculează cu relațiile:

$$\begin{cases} a_{DB}^V = -\omega_4^2 BD \\ a_{DB}^T = \varepsilon_4 BD \end{cases} \quad (12.123) \quad \begin{cases} a_{DC}^V = -\omega_2^2 CD \\ a_{DC}^T = \varepsilon_2 CD \end{cases} \quad (12.124) \quad \begin{cases} a_r = a_2 \\ a_{cor} = 2\omega_2 v_2 \end{cases} \quad (12.125)$$

Relația matriceală echivalentă este:

$$\begin{bmatrix} a_{Bx} \\ a_{By} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{DB}^V \\ a_{DB}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{Cx} \\ a_{Cy} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \varphi_2 & -\sin \varphi_2 \\ \sin \varphi_2 & \cos \varphi_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{DC}^V + a_2 \\ a_{DC}^T + a_{cor} \end{bmatrix} \quad (12.126)$$

Ecuatiile analitice deduse din aceasta se pun sub forma următoare:

$$\begin{cases} \Delta a_x = a_{Bx} + a_{DB}^v \cos \beta - a_{Cx} - (a_{DC}^v + a_2) \cos \varphi_2 + a_{cor} \sin \varphi_2 = \\ \quad = a_{DB}^\tau \sin \beta - a_{DC}^\tau \sin \varphi_2 \\ \Delta a_y = a_{By} + a_{DB}^v \sin \beta - a_{Cy} - (a_{DC}^v + a_2) \sin \varphi_2 - a_{cor} \cos \varphi_2 = \\ \quad = -a_{DB}^\tau \cos \beta + a_{DC}^\tau \cos \varphi_2 \end{cases} \quad (12.127)$$

Din aceste relații se calculează accelerațiile tangențiale:

$$a_{DB}^\tau = -\frac{\Delta a_x \cos \varphi_2 + \Delta a_y \sin \varphi_2}{\sin \delta} \quad (12.128)$$

$$a_{DC}^\tau = -\frac{\Delta a_x \cos \beta + \Delta a_y \sin \beta}{\sin \delta} \quad (12.129)$$

Se determină în continuare accelerațiile tangențiale:

$$\varepsilon_2 = a_{DC}^\tau / CD \quad (12.130) \quad \varepsilon_4 = a_{DB}^\tau / BD \quad (12.131)$$

Calculul accelerației punctului  $M$  decurge în modul următor:

$$a_{MB}^v = -\omega_4^2 BM \quad a_{MB}^\tau = \varepsilon_4 BM \quad (12.132)$$

$$\begin{bmatrix} a_{Mx} \\ a_{My} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{Bx} \\ a_{By} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{MB}^v \\ a_{MB}^\tau \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} a_{Mx} = a_{Bx} + a_{MB}^v \cos \beta - a_{MB}^\tau \sin \beta \\ a_{My} = a_{By} + a_{MB}^v \sin \beta + a_{MB}^\tau \cos \beta \end{cases} \quad (12.133)$$

**Tabelul 12.6**

Nr.	Relația de calcul	Nr.	Relația de calcul
<i>Calculul pozițional</i>			
1	$AB = AB_{\min} + s_1$	13	$d_x = x_C - x_B$
2	$CD = CD_{\min} + s_2$	14	$d_y = y_C - y_B$
3	$\cos \alpha = \frac{OA^2 + OB^2 - AB^2}{2 \cdot OA \cdot OB}$	15	$d^2 = d_x^2 + d_y^2$
4	$\sin \alpha = +\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$	16	$\cos \gamma = \frac{BD^2 + CD^2 - d^2}{2 \cdot BD \cdot CD}$
5	$\cos \varphi_1 = (OB \cos \alpha - OA) / AB$	17	$\sin \gamma = +\sqrt{1 - \cos^2 \gamma}$
6	$\sin \varphi_1 = OB \sin \alpha / AB$	18	$\sin \beta = [(BD - CD \cos \gamma) \cdot d_y + CD \sin \gamma \cdot d_x] / d^2$
7	$\sin \delta = \sin \alpha \cos \varphi_1 - \cos \alpha \sin \varphi_1$		
8	$\cos \delta = \cos \alpha \cos \varphi_1 + \sin \alpha \sin \varphi_1$	19	$\cos \beta = [(BD - CD \cos \gamma) \cdot d_x - CD \sin \gamma \cdot d_y] / d^2$
9	$x_B = OA + AB \cos \varphi_1 = OB \cos \alpha$		
10	$y_B = AB \sin \varphi_1 = OB \sin \alpha$	21	$\cos \varphi_2 = (BD \cos \beta - d_x) / CD$
11	$x_C = OC \cos \alpha$	22	$x_M = x_B + BM \cos \beta$

12	$y_C = OC \sin \alpha$	23	$y_M = y_B + BM \sin \beta$
----	------------------------	----	-----------------------------

**Tabelul 12.6 (continuare)**

<i>Calculul vitezelor</i>			
24	$v_B = -v_I / \sin \delta$	35	$v_{DB} = -\frac{\Delta v_x \cos \varphi_2 + \Delta v_y \sin \varphi_2}{\sin \gamma}$
25	$v_t = -v_I \cos \delta / \sin \delta$		
26	$\omega_1 = v_t / AB$	36	$v_{DC} = -\frac{\Delta v_x \cos \beta + \Delta v_y \sin \beta}{\sin \gamma}$
27	$\omega_3 = v_B / OB$		
28	$v_{Bx} = -v_B \sin \alpha$	37	$\omega_2 = v_{DC} / CD$
29	$v_{By} = v_B \cos \alpha$	38	$\omega_4 = v_{DB} / BD$
30	$v_C = \omega_3 OC$	39	$v_{MB} = \omega_4 BM$
31	$v_{Cx} = -v_C \sin \alpha$	40	$v_{Mx} = v_{Bx} - v_{MB} \sin \beta$
32	$v_{Cy} = v_C \cos \alpha$	41	$v_{My} = v_{By} + v_{MB} \sin \beta$
33	$\Delta v_x = v_{Bx} - v_{Cx}$	42	$v_M = \sqrt{(v_{Mx})^2 + (v_{My})^2}$
34	$\Delta v_y = v_{By} + v_{Cy}$		
<i>Calculul accelerațiilor</i>			
43	$a_B^v = -\omega_3^2 OB$	58	$a_{DB}^v = -\omega_4^2 BD$
44	$a_t^v = -\omega_1^2 AB$	59	$a_{DC}^v = -\omega_2^2 CD$
45	$a_{cor} = 2\omega_1 \varepsilon_1$	60	$a_{cor} = 2\omega_2 v_2$
46	$\Delta a_x = a_B^v \cos \alpha - (a_t^v + a_1) \cos \varphi_1 + a_{cor} \sin \varphi_1$	61	$\Delta a_x = a_{Bx} + a_{DB}^v \cos \beta - a_{Cx} - (a_{DC}^v + a_2) \cos \varphi_2 + a_{cor} \sin \varphi_2$
47	$\Delta a_y = a_B^v \sin \alpha - (a_t^v + a_1) \sin \varphi_1 - a_{cor} \cos \varphi_1$	62	$\Delta a_y = a_{By} + a_{DB}^v \sin \beta - a_{Cy} - (a_{DC}^v + a_2) \sin \varphi_2 - a_{cor} \cos \varphi_2$
48	$a_B^\tau = \frac{\Delta a_x \cos \varphi_1 + \Delta a_y \sin \varphi_1}{\sin \delta}$	63	$a_{DB}^\tau = -\frac{\Delta a_x \cos \varphi_2 + \Delta a_y \sin \varphi_2}{\sin \delta}$
49	$a_t^\tau = \frac{\Delta a_x \cos \alpha + \Delta a_y \sin \alpha}{\sin \delta}$	64	$a_{DC}^\tau = -\frac{\Delta a_x \cos \beta + \Delta a_y \sin \beta}{\sin \delta}$
50	$\varepsilon_3 = a_B^\tau / OB$	65	$\varepsilon_2 = a_{DC}^\tau / CD$
51	$\varepsilon_1 = a_t^\tau / AB$	66	$\varepsilon_4 = a_{DB}^\tau / BD$
52	$a_{Bx} = a_B^v \cos \alpha - a_B^\tau \sin \alpha$	67	$a_{MB}^v = -\omega_4^2 BM$
53	$a_{By} = a_B^v \sin \alpha + a_B^\tau \cos \alpha$	68	$a_{MB}^\tau = \varepsilon_4 BM$
54	$a_C^v = -\omega_3^2 OC$	55	$a_C^\tau = \varepsilon_3 OC$
56	$a_{Cx} = a_C^v \cos \alpha - a_C^\tau \sin \alpha$	69	$a_{Mx} = a_{Bx} + a_{MB}^v \cos \beta - a_{MB}^\tau \cos \beta$
		70	$a_{My} = a_{By} + a_{MB}^v \sin \beta + a_{MB}^\tau \cos \beta$

57	$a_{Cy} = a_C^v \sin \alpha + a_C^r \cos \alpha$	71	$a_M = \sqrt{(a_{Mx})^2 + (a_{My})^2}$
----	--	----	--