

**BAZELE MECANICII APLICATE****PARTEA IV-a DINAMICA PUNCTULUI MATERIAL  
CONȚINUT**

<b>13. ANALIZA DINAMICĂ A PUNCTULUI MATERIAL</b>	241
13.1 Generalități	241
13.1.1 Obiectivul analizei dinamice	241
13.1.2 Parametrii dinamici generali	241
13.1.3 Funcția de forță. Forțe conservative.	243
13.1.4 Teoremele generale ale Dinamicii în cazul punctului material	246
13.2 Dinamica punctului material liber	247
13.2.1 Ecuațiile generale de mișcare în diferite sisteme de coordonate	247
13.2.2 Integrarea numerică a ecuațiilor de mișcare	249
13.2.3 Mișcarea punctului material greu în vid	250
13.2.4 Mișcarea punctului material greu în mediu rezistent	252
13.2.5 Mișcarea punctului material acționat de o forță centrală. Cazul general.	256
13.2.6...Mișcarea punctului material sub acțiunea forței de atracție universală.	261
13.3 Dinamica punctului material supus la legături	266
13.3.1 Ecuațiile mișcării	266
13.3.2 Mișcarea pe planul înclinat	267
13.3.3 Pendulul sferic	270
13.3.4 Pendulul matematic	275
13.3.5 Micile oscilații ale pendulului matematic	276
<b>14. DINAMICA MIȘCĂRII OSCILATORII A PUNCTULUI MATERIAL</b>	282
14.1 Generalități	282
14.2 Oscilații libere fără amortizare	283
14.3 Oscilații libere cu amortizare	285
14.4 Oscilații forțate fără amortizare	288
14.5 Oscilații forțate cu amortizare	291
<b>15. DINAMICA MIȘCĂRII RELATIVE A PUNCTULUI MATERIAL</b>	294
15.1 Generalități	294
15.2 Ecuația generală a mișcării relative	294
15.3 Mișcarea unei culise pe o bară oblică în rotație	297
15.4 Mișcarea unei particule pe suprafața interioară a unui cilindru înclinat	302

## Partea IV-a DINAMICA PUNCTULUI MATERIAL

### 13. ANALIZA DINAMICĂ A PUNCTULUI MATERIAL

#### 13.1 Generalități

##### 13.1.1 Obiectivul analizei dinamice

Dinamica are ca obiectiv general stabilirea legii de mișcare a unui corp sau a unui sistem de corpuri atunci când se cunosc forțele care le acționează. La acest obiectiv se adaugă și determinarea forțelor de legătură dintre corpurile aflate în mișcare.

Legea fundamentală a Dinamicii, conținută în cel de al II-lea principiu al Mecanicii newtoniene, stipulează că o forță aplicată unui punct material îi imprimă acestuia o accelerație pe direcția și în sensul ei de acțiune; legea este exprimată de relația clasică:

$$m\bar{a} = \bar{F} \quad (13.1)$$

În cazul punctului material,  $\bar{F}$  poate fi o forță unică sau rezultanta unui sistem de forțe concurente aplicate acestuia.

O forță poate fi constantă sau variabilă în funcție de poziția și viteza punctului și, în unele aplicații, în mod explicit de timp. Cu notațiile din Cinematică relația de mai sus mai poate fi pusă sub forma generală:

$$m\ddot{\bar{r}} = \bar{F}(\bar{r}, \dot{\bar{r}}, t) \quad (13.2)$$

Se recunoaște o ecuația diferențială de ordinul II sub forma vectorială, prin integrarea căreia se determină legea de mișcare a punctului material:

$$\bar{v} = \dot{\bar{r}}(t) \quad \bar{r} = \bar{r}(t) \quad (13.3)$$

care înglobează legea vitezei și respectiv legea spațiului.

##### 13.1.2 Parametrii dinamici generali

Un prim grup de parametri, numiți parametri de stare, caracterizează mișcarea mecanică a corpurilor într-o poziție dată; în acesta se includ impulsul, momentul cinetic și energia cinetică. Un parametru de proces, care caracterizează transferul de energie între două poziții ale corpurilor, este lucrul mecanic al forțelor care le acționează. În cazul punctului material parametrii menționați au definițiile expuse în continuare.

a) *Impulsul* – mărime fizică vectorială care exprimă cantitatea de mișcare pe care o are un punct material la un moment dat. Relația de definiție

$$\bar{H} = m\bar{v} \quad (13.4)$$

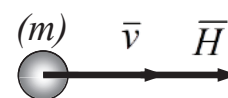


Fig.13.1

pune în evidență coliniaritatea impulsului cu viteza (fig.13.1). Impulsul este util în studiul variației mișcării mecanice a punctului material.

În coordonate carteziene viteza are dezvoltarea:

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k} \quad (13.5)$$

astfel că pentru impuls se poate scrie:

$$\vec{H} = H_x \vec{i} + H_y \vec{j} + H_z \vec{k} = (mv_x) \vec{i} + (mv_y) \vec{j} + (mv_z) \vec{k} \quad (13.6)$$

b) *Momentul cinetic* – mărime fizică, deasemenea vectorială, reprezentând momentul impulsului în raport cu un punct, de exemplu punctul  $O$  (fig.13.2).

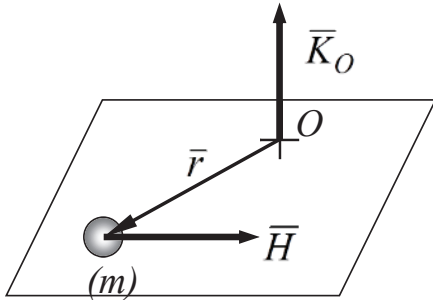


Fig.13.2

Relația de definiție este:

$$\vec{K}_O = \vec{r} \times \vec{H} = \vec{r} \times m\vec{v} \quad (13.7)$$

Caracteristicile momentului cinetic se evaluează după regulile cunoscute ale produsului vectorial. Direcția lui este perpendiculară pe planul vectorilor  $\vec{r}$  și  $\vec{H}$ . În coordonate carteziene momentul cinetic are expresia:

$$\vec{K}_O = K_x \vec{i} + K_y \vec{j} + K_z \vec{k} \quad (13.6)$$

Proiecțiile lui se calculează cu relațiile:

$$\vec{K}_O = \vec{r} \times m\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ mv_x & mv_y & mv_z \end{vmatrix} \rightarrow \begin{cases} K_x = m(yv_z - zv_y) \\ K_y = m(zv_x - xv_z) \\ K_z = m(xv_y - yv_x) \end{cases} \quad (13.7)$$

Proiecțiile reprezintă momentul cinetic al punctului față de axele de coordonate.

c) *Energia cinetică* – mărime scalară, caracterizând deasemenea mișcarea mecanică a punctului material, definită prin relația:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 \quad (13.8)$$

În timpul mișcării energia cinetică poate fi transformată din și în alte forme de energie (de exemplu energie potențială, energie termică, etc.). În funcție de proiecțiile vitezei ea se mai poate scrie:

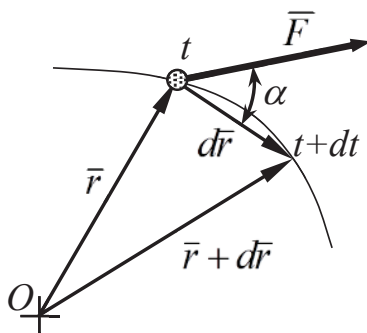


Fig.13.3

$$E = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) \quad (13.9)$$

d) *Lucrul mecanic* – mărime scalară de proces care măsoară variația energiei transferate sub acțiunea forțelor. Într-un interval de timp infinitesimal  $dt$  o forță efectuează un *lucru mecanic elementar* definit prin produsul scalar:

$$dL = \vec{F} \cdot d\vec{r} = |\vec{F}| |d\vec{r}| \cos\alpha \quad (13.10)$$

în care  $d\vec{r}$  este deplasarea elementară efectuată în acest timp (fig.13.3). În funcție de valoarea unghiului  $\alpha$  dintre forță și deplasare, se precizează:

$0 \leq \alpha < \pi/2$ ,  $\cos\alpha > 0$ ,  $dL > 0$  – lucru mecanic motor;

$\alpha = \pi/2$ ,  $\cos\alpha = 0$ ,  $dL = 0$  – lucru mecanic nul;

$\pi/2 < \alpha \leq \pi$ ,  $\cos\alpha < 0$ ,  $dL < 0$  – lucru mecanic rezistent.

Dacă mișcarea punctului este raportată la un sistem de referință cartezian în care:

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k} \quad (13.11)$$

$$d\vec{r} = dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k} \quad (13.12)$$

lucrul mecanic elementar ia forma:

$$dL = F_x dx + F_y dy + F_z dz \quad (13.13)$$

La trecerea între două poziții distincte  $A$  și  $B$  aflate pe traiectoria punctului se calculează un lucru mecanic total prin integrala curbilinie:

$$L_{AB} = \int_{AB} dL = \int_{AB} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{AB} (F_x dx + F_y dy + F_z dz) \quad (13.14)$$

Pentru calculul lucrului mecanic efectuat de un cuplu de forțe (fig.13.4) se observă că deplasarea infinitezimală:

$$|d\vec{r}| \approx ds = R d\theta \quad (13.15)$$

și  $\cos\alpha = 0$ . Lucrul mecanic elementar este:

$$dL = 2 |\vec{F}| R d\theta = M d\theta \quad (13.16)$$

în care  $M$  este momentul cuplului iar  $d\theta$  unghiul de rotație elementar. Lucrul mecanic total produs de un cuplu între două poziții  $A$  și  $B$  se evaluează prin integrala:

$$L = \int_{AB} M d\theta \quad (13.17)$$

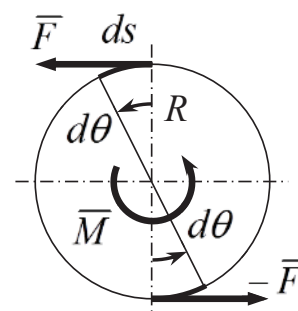


Fig.13.4

### 13.1.3 Funcția de forță. Forțe conservative.

Există câmpuri de forțe în care un punct material aflat în repaus posedă o energie, fie în stare latentă, fie acumulată prin transformarea unei cantități de energie cinetică în urma efectuării unui lucru mecanic. Această energie înmagazinată, notată  $V$ , poartă numele de *energie potențială* și poate fi cedată în anumite condiții prin retransformarea ei în energie cinetică. Variația energiei potențiale la trecerea dintr-o poziție  $A$  într-o poziție  $B$  în acest câmp de forțe se exprimă prin relația:

$$V_A - V_B = L_{AB} \quad (13.18)$$

Spațiului în care este activ un astfel de câmp de forțe i se poate atașa o funcție pozițională scalară  $U = U(x, y, z)$ , uniformă și derivabilă. Dacă pentru forțele câmpului se poate scrie relația generală:

$$\vec{F} = \text{grad } U = \frac{\partial U}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{k} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k} \quad (13.19)$$

atunci  $U$  este o *funcție de forță* iar forțele care derivă din aceasta se numesc *forțe conservative*. Proiecțiile pe axe ale unei astfel de forțe sunt:

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x} \quad F_y = \frac{\partial U}{\partial y} \quad F_z = \frac{\partial U}{\partial z} \quad (13.20)$$

Se reamintește din Analiza matematică proprietatea că la derivarea parțială a unei funcții implicite în raport cu două variabile rezultatul nu este influențat de ordinea derivării:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right) \quad (13.21)$$

În consecință, între proiecțiile pe axe ale unei forțe conservative există relațiile:

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} \quad \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y} \quad \frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial z} \quad (13.22)$$

Lucrul mecanic elementar al unei forțe conservative este:

$$dL = F_x dx + F_y dy + F_z dz = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz = dU \quad (13.23)$$

respectiv este egal cu diferențiala totală a funcției  $U$ . La trecerea dintr-o poziție  $A$  într-o poziție  $B$  se integrează distinct cei doi termeni, reamintind că funcția  $U$  este dependentă de poziție în timp ce lucrul mecanic  $L$  este o mărime de proces.

$$\int_{AB} dL = \int_A^B dU \rightarrow L_{AB} = U_B - U_A \quad (13.24)$$

Comparând această relație cu (13.18) se constată că există egalitatea:

$$U = -V \quad (13.25)$$

respectiv că funcția de forță nu este altceva decât energia potențială cu semn schimbat.

Forțele conservative întâlnite în Mecanică sunt prezentate în continuare. La stabilirea expresiei funcției de forță pentru fiecare caz în parte se vor utiliza integralele nedefinite, fapt care va conduce la determinarea acestora cu aproximație de o constantă.

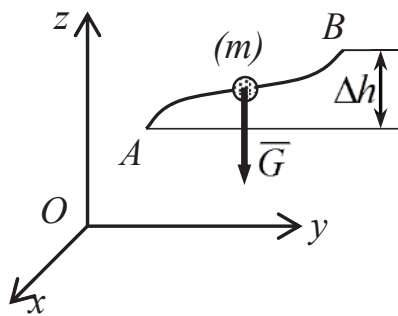


Fig. 13.5

Lucrul mecanic efectuat de greutate la trecerea din  $A$  în  $B$  este:

$$L_{AB} = U_B - U_A = -mg(z_B - z_A) = \pm mg \Delta h \quad (13.29)$$

Se deduce că lucrul mecanic al unei greutate este dependent exclusiv de diferența de nivel dintre cele două poziții, indiferent de drumul pe care se face deplasarea. În relația de mai sus semnul “+” se va lua la coborâre iar “-” la urcare.

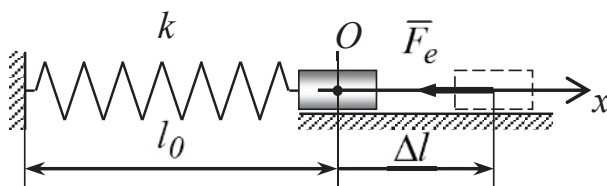


Fig. 13.6

b) Forța elastică. Arcul din fig. 13.6 are în stare liberă lungimea  $l_0$ ; în această stare el nu exercită nici-o forță asupra punctului material de care este legat. Alungit sau comprimat cu o cantitate  $x = \Delta l$ , el va aplica acestuia o

a) Greutatea punctului material. Proiecțiile pe axele unui sistem de referință cartezian cu axa  $Oz$  verticală în sus sunt:

$$F_x = 0 \quad F_y = 0 \quad F_z = G = -mg \quad (13.26)$$

Rezultă funcția de forță:

$$U = \int F_z dz + C = -mgz + C \quad (13.27)$$

Considerând constanta  $C = 0$ , energia potențială va fi:

$$V = -U = mgz \quad (13.28)$$

forță elastică proporțională cu deformația, factorul de proporționalitate fiind constanta arcului  $k$ ; direcția forței este coliniară cu axa arcului iar sensul îndreptat către poziția de echilibru  $O$ . Fără a reduce din generalitate, se alege un sistem de coordonate cu axa  $Ox$  suprapusă axei arcului:

$$F_x = F_e = -kx \quad F_y = 0 \quad F_z = 0 \quad (13.30)$$

Funcția de forță va fi în acest caz:

$$U = \int F_x dx + C = -\int kx dx + C = -\frac{1}{2}kx^2 + C \quad (13.31)$$

Considerând constanta  $C = 0$ , rezultă energia potențială:

$$V = -U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kxx = \frac{1}{2}|\bar{F}_e|\Delta l \quad (13.32)$$

Între două poziții  $A$  și  $B$  pe direcția arcului, lucrul mecanic este:

$$L_{AB} = U_B - U_A = -\frac{1}{2}k(x_B^2 - x_A^2) \quad (13.33)$$

c) Forța de atracție universală. Două mase  $M$  și  $m$  situate la distanța  $r$  (fig.13.7) se atrag reciproc printr-o forță:

$$|\bar{F}| = f \frac{Mm}{r^2} \quad (13.34)$$

în care  $f$  este constanta atracției universale. Alegând un sistem de referință cartezian cu originea în centrul masei  $M$ , forța aplicată masei  $m$  va fi:

$$\bar{F} = -f \frac{Mm}{r^2} \bar{u}_r = -f \frac{Mm}{r^3} \bar{r} \quad (13.35)$$

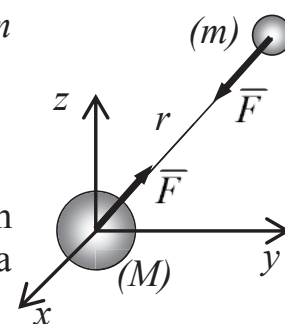


Fig.13.7

în care  $\bar{u}_r = \frac{\bar{r}}{|\bar{r}|} = \frac{\bar{r}}{r}$  este versorul vectorului de poziție al masei  $m$ .

Proiecțiile acestei forțe pe axe vor depinde de coordonatele masei  $m$ :

$$F_x = -\frac{fMmx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \quad F_y = -\frac{fMmy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \quad F_z = -\frac{fMmz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \quad (13.36)$$

În baza relației (13.23) se calculează funcția de forță:

$$U = \int dU + C = \int (F_x dx + F_y dy + F_z dz) + C = \frac{fMm}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} + C = \frac{fMm}{|\bar{r}|} + C \quad (13.37)$$

Luând constanta de integrare  $C = 0$  se găsește pentru energia potențială forma:

$$V = -U = -\frac{fMm}{|\bar{r}|} \quad (13.38)$$

Între două poziții  $A$  și  $B$  lucrul mecanic este:

$$L_{AB} = U_B - U_A = fMm \left( \frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right) \quad (13.39)$$

### 13.1.4 Teoremele generale ale Dinamicii în cazul punctului material

a) Teorema impulsului. Se derivează în raport cu timpul impulsul definit de relația (13.4):

$$\frac{d\bar{H}}{dt} = \frac{d(m\bar{v})}{dt} = m \frac{d\bar{v}}{dt} = m\bar{a} = \bar{F} \quad (13.40)$$

Sub forma concentrată:

$$\dot{\bar{H}} = \bar{F} \quad (13.41)$$

această relație permite enunțarea teoremei impulsului – *derivata în raport cu timpul a impulsului unui punct material este egală cu rezultanta forțelor aplicate acestuia*. Cu alte cuvinte, acțiunea forțelor determină o variație a cantității de mișcare a punctului material. Teorema impulsului este echivalentă legii fundamentale a Dinamicii (13.1). La nivelul proiecțiilor relația de mai sus ia forma:

$$\dot{H}_x = ma_x = F_x \quad \dot{H}_y = ma_y = F_y \quad \dot{H}_z = ma_z = F_z \quad (13.42)$$

Dacă punctul material se află în mișcare dar asupra lui nu acționează nicio forță (sau rezultanta forțelor este nulă), atunci:

$$\frac{d\bar{H}}{dt} = 0 \rightarrow \bar{H} = m\bar{v} = \bar{C} \quad (13.43)$$

unde  $\bar{C}$  este o constantă vectorială. Se spune că în acest caz impulsul se conservă, respectiv că punctul material rămâne cu aceeași cantitate de mișcare. Viteza punctului va fi constantă și el își va continua deplasarea rectilinie și uniformă (principiul inerției). Conservarea impulsului poate avea loc și numai după o direcție. Dacă, de exemplu:

$$F_x = 0 \rightarrow H_x = mv_x = \text{const.} \quad (13.44)$$

atunci viteza  $v_x$  pe această direcție rămâne constantă.

b) Teorema momentului cinetic. Demonstrația urmează aceeași cale:

$$\frac{d\bar{K}_O}{dt} = \frac{d}{dt}(\bar{r} \times \bar{H}) = \dot{\bar{r}} \times \bar{H} + \bar{r} \times \dot{\bar{H}} = \bar{r} \times \bar{F} = \bar{M}_O(\bar{F}) \quad (13.45)$$

deoarece  $\dot{\bar{r}} = \bar{v}$  este colinar cu  $\bar{H}$ , produsul lor vectorial fiind nul;  $\dot{\bar{H}} = \bar{F}$  conform teoremei impulsului. Din forma concentrată:

$$\dot{\bar{K}}_O = \bar{M}_O \quad (13.46)$$

se enunță teorema momentului cinetic – *derivata în raport cu timpul a momentului cinetic al unui punct material față de un punct oarecare O, este egală cu momentul rezultantei forțelor aplicate lui, în raport cu același punct O*. Altfel spus, momentul unei forțe aplicată unui punct material va determina variația momentului cinetic al acestuia. În coordonate carteziene:

$$\bar{M}_O = M_x \bar{i} + M_y \bar{j} + M_z \bar{k} \quad (13.47)$$

astfel că relația (13.46) se mai poate scrie la nivelul proiecțiilor:

$$\dot{K}_x = M_x \quad \dot{K}_y = M_y \quad \dot{K}_z = M_z \quad (13.48)$$



Dacă momentul  $\bar{M}_O = 0$ , situație în care  $\bar{F} = 0$  sau punctul  $O$  se află pe direcția forței (cazul, de exemplu, al unei forțe centrale), atunci:

$$\frac{d\bar{K}_O}{dt} = 0 \rightarrow \bar{K}_O = \bar{r} \times m\bar{v} = \bar{C} \quad (13.49)$$

unde  $\bar{C}$  este o constantă vectorială. Momentul cinetic al punctului se conservă iar mișcarea efectivă depinde de relația dintre  $\bar{r}$  și  $\bar{v}$ . Dacă momentul forței în raport cu o axă este nul, se conservă momentul cinetic față de axa respectivă.

$$M_x = 0 \rightarrow K_x = m(yv_z - zv_y) = \text{const.} \quad (13.50)$$

c) Teorema energiei cinetice. Energia cinetică se poate pune sub forma:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\bar{v} \cdot \bar{v}) \quad (13.51)$$

Se diferențiază această relație ținând cont de proprietățile produsului scalar:

$$dE = \frac{1}{2}2m(\bar{v} \cdot d\bar{v}) = m \left[ (\bar{v} dt) \cdot \frac{d\bar{v}}{dt} \right] = m(\bar{a} \cdot d\bar{r}) = \bar{F} \cdot d\bar{r} = dL \quad (13.52)$$

Relația obținută, respectiv:

$$dE = dL \quad (13.53)$$

se integrează între două poziții finite  $A$  și  $B$ , ținând cont că energia cinetică este o mărime de stare în timp ce lucrul mecanic este o mărime de proces:

$$\int_A^B dE = \int_{AB} dL \rightarrow E_B - E_A = L_{AB} \quad (13.54)$$

Teorema energiei cinetice, sub forma diferențială sau finită, precizează că *variația energiei cinetice a unui punct material la trecerea dintr-o poziție în alta este egală cu lucrul mecanic efectuat de forțele aplicate punctului pe durata acestei treceri*.

Dacă un punct material este acționat numai de forțe conservative, combinând relațiile (13.23) și (13.53) se obține:

$$dE = dU \rightarrow d(E - U) = 0 \rightarrow E - U = \text{const.} \quad (13.55)$$

Știind că  $V = -U$ , se definește *energia mecanică*:

$$E_m = E - U = E + V = \text{const.} \quad (13.56)$$

ca suma dintre energia cinetică și cea potențială a punctului material. Relația de mai sus pune în evidență că *energia mecanică a unui punct material acționat numai de forțe conservative este invariabilă*. În timpul mișcării cele două forme de energie se transformă una în cealaltă, suma lor rămânând constantă.

## 13.2 Dinamica punctului material liber

### 13.2.1 Ecuțiile generale de mișcare în diferite sisteme de coordonate

Ecuția fundamentală a Dinamicii, pusă sub forma:

$$m\ddot{\bar{r}} = \sum \bar{F}(\bar{r}, \dot{\bar{r}}, t) \quad (13.57)$$

poate fi proiectată pe axele diferitelor sisteme de coordonate cunoscute.



Se obțin astfel sisteme de ecuații diferențiale scalare prin integrarea cărora se determină legea de mișcare. Fînd ecuații diferențiale de ordinul II, dubla integrare introduce cîte două constante de integrare pentru fiecare ecuație. Valorile acestor constante se determină de regulă din condițiile inițiale ale mișcării, respectiv la  $t = 0$ ,  $\bar{r} = \bar{r}_0$ ,  $\bar{v} = \bar{v}_0$ .

a) În coordonate carteziene ecuațiile diferențiale sunt:

$$m\ddot{x} = \sum F_x \quad m\ddot{y} = \sum F_y \quad m\ddot{z} = \sum F_z \quad (13.58)$$

Printr-o primă integrare rezultă legea vitezei:

$$v_x = \dot{x}(t) \quad v_y = \dot{y}(t) \quad v_z = \dot{z}(t) \quad (13.59)$$

iar printr-o a doua integrare legea spațiului

$$x = x(t) \quad y = y(t) \quad z = z(t) \quad (13.60)$$

Cele 6 constante de integrare se calculează din condițiile inițiale:

$$t = 0 \rightarrow \begin{cases} x = x_0, & y = y_0, & z = z_0 \\ v_x = v_{0x}, & v_y = v_{0y}, & v_z = v_{0z} \end{cases} \quad (13.61)$$

Dacă mișcarea are loc într-un plan, atunci numărul ecuațiilor diferențiale se reduce la 2 iar cel al constantelor de integrare și al condițiilor inițiale la 4.

b) În coordonate polare ecuațiile diferențiale sunt:

$$ma_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = \sum F_r \quad ma_\theta = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = \sum F_\theta \quad (13.62)$$

Se reamintește că acest sistem de coordonate este specific mișcărilor plane. Pentru mișcări în spațiu se utilizează coordonatele cilindrice, la ecuațiile de mai sus adăugându-se ultima ecuație (13.58). Prin integrare se obține legea vitezei:

$$v_r = \dot{r} = v_r(t) \quad v_\theta = r\dot{\theta} = v_\theta(t) \quad (13.63)$$

și legea spațiului:

$$r = r(t) \quad \theta = \theta(t) \quad (13.64)$$

Condițiile inițiale care se pun pentru determinarea constantelor de integrare sunt:

$$t = 0 \rightarrow \begin{cases} r = r_0 \\ \theta = \theta_0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} v_r = v_{0r} = (\dot{r})_0 \\ v_\theta = v_{0\theta} = (r\dot{\theta})_0 \end{cases} \quad (13.65)$$

b) În coordonate intrinseci (triedrul Frenet) ecuațiile diferențiale sunt:

$$ma_\tau = m\ddot{s} = \sum F_\tau \quad ma_\nu = m\frac{\dot{s}^2}{\rho} = \sum F_\nu \quad ma_\beta = 0 = \sum F_\beta \quad (13.66)$$

Legea vitezei și legea spațiului au forma:

$$v \equiv v_\tau = \dot{s} = v(t) \quad s = s(t) \quad (13.67)$$

Condițiile inițiale ale mișcării sunt:

$$t = 0 \rightarrow \begin{cases} s = s_0 \\ v = v_0 = (\dot{s})_0 \end{cases} \quad (13.68)$$

### 13.2.2 Integrarea numerică a ecuațiilor de mișcare

În mediile de programare pe calculator cu destinație matematică există rutine specializate pentru integrarea sistemelor de ecuații diferențiale. Marea majoritate a acestora au la bază metoda Runge-Kutta de ordinul IV. Fără a intra în aspectele matematice specifice, se precizează că prin algoritmul metodei se rezolvă numeric orice sistem de ecuații diferențiale de ordinul I. Ecuațiile diferențiale de ordin superior pot fi prelucrate și, prin introducerea unor ecuații intermediare, pot fi transformate în astfel de sisteme.

Dată fiind simplitatea programării precum și facilitățile grafice oferite, în aplicațiile care urmează se va utiliza mediul de programare MATLAB orientat pe operațiuni cu matrici.

Se consideră un sistem de  $n$  ecuații diferențiale de ordinul I:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = f_1(t, y_1, \dots, y_n) \\ \dot{y}_2 = f_2(t, y_1, \dots, y_n) \\ \vdots \\ \dot{y}_n = f_n(t, y_1, \dots, y_n) \end{cases} \quad (13.69)$$

Se alcătuieste un vector linie  $\mathbf{y}$  al variabilelor sistemului și un vector coloană  $\mathbf{dery}$  al derivatelor, respectiv al funcțiilor din membrul drept al acestui sistem\*):

$$\mathbf{y} = [y_1 \ y_2 \ \dots \ y_n] \quad (13.70) \quad \mathbf{dery} = \begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \vdots \\ \dot{y}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(t, \mathbf{y}) \\ f_2(t, \mathbf{y}) \\ \vdots \\ f_n(t, \mathbf{y}) \end{bmatrix} \quad (13.71)$$

Variabila independentă  $t$  în raport cu care sunt definite derivatele (în majoritatea aplicațiilor din Dinamică aceasta este timpul) va căpăta în timpul integrării un șir de valori discrete, cuprinse între extremele  $t_{\min}$  și  $t_{\max}$ , valori care vor fi depuse într-un vector coloană  $\mathbf{t}$ . Operațiunea de integrare numerică este apelată în programul general printr-o instrucțiune având forma\*\*):

$$[\mathbf{t}, \mathbf{y}] = \text{ode45}('func', \mathbf{timp}, \mathbf{y0}) \quad (13.72)$$

În această instrucțiune *ode45* este denumirea funcției din biblioteca MATLAB care va face integrarea. Argumentele acestei funcții au următoarea semnificație:

– ‘*func*’ este denumirea atribuită unei file separate (de forma *func.m*) de tip funcție în care se vor calcula valorile derivatelor pe baza expresiilor din (13.71); Această filă va fi apelată de *ode45* pentru fiecare pas de integrare. Prima linie a filei *func.m* va fi de forma:

$$\text{function } \mathbf{dery} = \text{func}(\mathbf{t}, \mathbf{y}) \quad (13.73)$$

în care argumentele de intrare și ieșire au semnificațiile indicate mai sus.

\*) Simbolizarea matricilor și vectorilor se va face în textul de față prin caractere “**bold**”.

\*\*) Se prezintă forma cea mai simplă a acestei instrucțiuni.

– **timp** = [t<sub>min</sub>, t<sub>max</sub>] este un vector linie care conține limitele intervalului de integrare; numărul  $m$  de valori în acest interval se stabilește automat de către program în funcție de anumiți parametri de acuratețe implicați;

– **y0** este un vector linie care conține valorile inițiale, respectiv la  $t_{\min}$ , ale variabilelor din **y**.

La terminarea integrării se obține vectorul **t**, care conține toate cele  $m$  valori pe care la ia variabila independentă în intervalul dat, și o matrice **y**[ $m,n$ ] cu valorile corespondente ale soluțiilor sistemului. Se observă că această matrice este o extindere pe coloane a vectorului linie inițial **y** din (13.70). Este evident că denumirile atribuite variabilelor din program sau filei *func.m* pot fi diferite de cele expuse mai sus, fiind necesară însă respectarea sintaxei și a tipului vectorilor menționați.

### 13.2.3 Mișcarea punctului material greu în vid

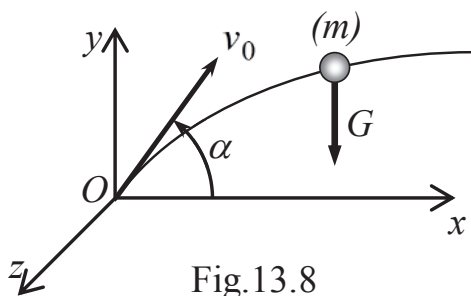


Fig.13.8

Se consideră un punct material de masă  $m$  aruncat cu o viteză inițială  $v_0$  sub unghi  $\alpha$  față de orizontală într-un mediu care nu opune nicio rezistență la deplasarea acestuia, cum ar fi, de exemplu, vidul. Se alege un sistem de referință cartezian cu originea în punctul de lansare, având axele dispuse în

modul arătat în fig.13.8. Singura forță care acționează asupra punctului pe traiectorie este greutatea proprie, astfel că se pot scrie următoarele ecuații diferențiale ale mișcării:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = 0 \\ m\ddot{y} = -G = -mg \\ m\ddot{z} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = -g \\ \ddot{z} = 0 \end{cases} \quad (13.74)$$

Se integrează succesiv aceste ecuații în raport cu timpul:

$$\begin{cases} v_x = \dot{x} = C_1 \\ v_y = \dot{y} = -gt + C_2 \\ v_z = \dot{z} = C_3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = C_1 t + C_4 \\ y = -\frac{1}{2} g t^2 + C_2 t + C_5 \\ z = C_3 t + C_6 \end{cases} \quad (13.75)$$

Condițiile inițiale, respectiv poziția și viteza în punctul de lansare, sunt:

$$t = 0 \rightarrow \begin{cases} (v_x)_0 = v_0 \cos \alpha \\ (v_y)_0 = v_0 \sin \alpha \\ (v_z)_0 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \\ z_0 = 0 \end{cases} \quad (13.76)$$

Se înlocuiesc aceste condiții în relațiile (13.75) și rezultă constantele de integrare:

$$\begin{cases} C_1 = v_0 \cos \alpha \\ C_2 = v_0 \sin \alpha \end{cases} \quad C_3 = C_4 = C_5 = C_6 = 0 \quad (13.77)$$

Se introduc aceste valori în relațiile (13.75) și rezultă legea de mișcare a punctului pe traiectorie:

$$\begin{cases} v_x = v_0 \cos \alpha \\ v_y = -gt + v_0 \sin \alpha \\ v_z = 0 \end{cases} \quad (13.78) \quad \begin{cases} x = v_0 t \cos \alpha \\ y = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 t \sin \alpha \\ z = 0 \end{cases} \quad (13.79)$$

Se observă că traiectoria punctului material este conținută în planul vertical  $xOy$ ; ecuația analitică a acesteia se obține eliminând timpul între ecuațiile (13.79):

$$y = -\frac{1}{2} g \left( \frac{x}{v_0 \cos \alpha} \right)^2 + v_0 \sin \alpha \frac{x}{v_0 \cos \alpha} = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \cdot x^2 + x \cdot \operatorname{tg} \alpha \quad (13.80)$$

Sub forma  $y = ax^2 + bx$  se recunoaște ecuația unei parabole cu axa de simetrie verticală, trecând prin punctul  $O$  (fig.13.9). Deoarece coeficientul  $a < 0$ , concavitățile parabolei este în jos.

În punctul  $A$ , în care se atinge

înălțimea maximă, tangenta la traiectorie este orizontală; viteza, care are întotdeauna direcția tangentei, nu va avea proiecție pe direcția verticală.

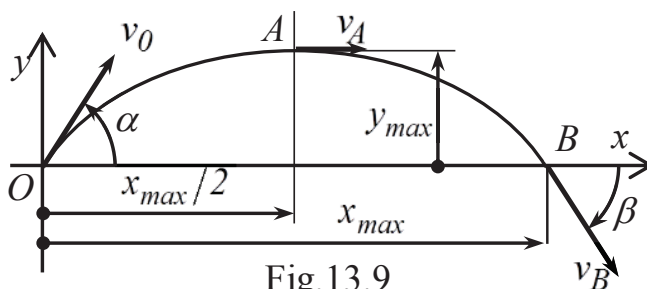


Fig.13.9

$$v_{Ay} = -gt_A + v_0 \sin \alpha = 0 \rightarrow t_A = \frac{v_0 \sin \alpha}{g} \quad (13.81)$$

Rezultă în continuare coordonatele punctului  $A$ :

$$x_A = x(t_A) = \frac{v_0^2}{2g} \sin 2\alpha \quad (13.82) \quad y_A = y_{max} = y(t_A) = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \alpha \quad (13.83)$$

și viteza:

$$v_A \equiv v_{Ax} = v_0 \cos \alpha \quad (13.84)$$

Distanța  $OB = x_{max}$  poartă numele de *bătaie* și se determină punând condiția  $y = 0$ :

$$-\frac{1}{2} g t^2 + v_0 t \sin \alpha = 0 \rightarrow \begin{cases} t_O = 0 \\ t_B = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} \end{cases} \quad (13.85)$$

Se observă că  $t_B = 2t_A$  fapt care arată că urcarea și coborârea pe traiectorie au aceeași durată.

$$x_B = x_{max} = x(t_B) = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha \quad (13.86)$$

Se observă deasemenea că  $x_B = 2x_A$ , confirmându-se simetria parabolei. Pentru viteza în punctul  $B$  se fac calculele:

$$\begin{cases} v_{Bx} = v_0 \cos \alpha \\ v_{By} = v_y(t_B) = -v_0 \sin \alpha \end{cases} \rightarrow \begin{cases} v_B = \sqrt{v_{Bx}^2 + v_{By}^2} = v_0 \\ \operatorname{tg} \beta = \frac{v_{By}}{v_{Bx}} = -\operatorname{tg} \alpha \quad (|\beta| = |\alpha|) \end{cases} \quad (13.87)$$

Viteza de impact este egală cu viteza inițială și unghiul de incidență este egal cu unghiul de lansare. Pentru cazul particular în care lansarea se face pe verticala punctului  $O$  se va lua  $\alpha = \pi/2$ ; se găsesc următoarele rezultate mai importante:

$$y_{\max} = \frac{v_0^2}{2g} \quad t_A = \frac{v_0}{g} \quad t_B = \frac{2v_0}{g} \quad v_B = -v_0 \quad (13.88)$$

### 13.2.4 Mișcarea punctului material greu în mediu rezistent

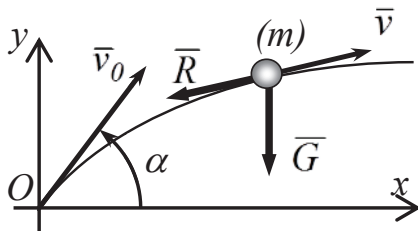


Fig.13.10

Asupra unui punct material greu lansat în condițiile aplicației precedente dar într-un mediu rezistent, de exemplu în aer, pe lângă greutatea proprie acționează și o forță proporțională cu viteza, în sens contrar acesteia:

$$\begin{aligned} \bar{G} &= -mg \bar{j} \\ \bar{R} &= -km\bar{v} = -km(\dot{x}\bar{i} + \dot{y}\bar{j}) \end{aligned} \quad (13.89)$$

în care  $k$  este o constantă de proporționalitate având dimensiunea  $[s^{-1}]$ . Mișcarea va avea loc numai în planul  $xOy$ , astfel că ecuațiile diferențiale vor fi:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -km\dot{x} \\ m\ddot{y} = -km\dot{y} - mg \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \ddot{x} + k\dot{x} = 0 & (1) \\ \ddot{y} + k\dot{y} = -g & (2) \end{cases} \quad (13.90)$$

Cele două ecuații diferențiale, independente între ele, se integrează separat.

Ecuația (1) este o ecuație diferențială omogenă de ordinul II cu coeficienți constanți. Pentru integrare se alege o soluție de forma:

$$x = Ce^{rt} \neq 0 \quad \dot{x} = Cre^{rt} \quad \ddot{x} = Cr^2 e^{rt} \quad (13.91)$$

Se fac înlocuirile în (1) și se găsesc rădăcinile ecuației caracteristice:

$$Ce^{rt}(r^2 + kr) = 0 \quad \rightarrow \quad r(r+k) = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} r_1 = 0 \\ r_2 = -k \end{cases} \quad (13.92)$$

Cu observația că  $e^0 = 1$ , soluția ecuației (1) este:

$$x = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} = C_1 + C_2 e^{-kt} \quad (13.93)$$

în care  $C_1$  și  $C_2$  sunt constante de integrare.

Ecuația (2), având în partea dreaptă un termen liber diferit de 0, este o ecuație diferențială neomogenă de ordinul II cu coeficienți constanți. Soluția este:

$$y = y_{om} + y_p \quad (13.94)$$

în care  $y_{om}$  este soluția ecuației omogene; la aceasta se adaugă o soluție particulară  $y_p$  care trebuie să verifice integral ecuația neomogenă.

Ecuția omogenă are aceeași formă cu (1) astfel că soluția va fi:

$$y_{om} = C_3 + C_4 e^{-kt} \quad (13.95)$$

Soluția particulară trebuie să fie de aceeași formă cu termenul liber. Fără a intra în detalii teoretice, se alege pentru aceasta un polinom de variabila  $t$ , având gradul cu o unitate mai mic decât ordinul ecuației diferențiale:

$$y_p = at + b \rightarrow \dot{y}_p = a \rightarrow \ddot{y}_p = 0 \quad (13.96)$$

Coeficienții acestuia se determină prin identificare:

$$\ddot{y}_p + k\dot{y}_p \equiv -g \rightarrow ka \equiv -g \rightarrow a = -\frac{g}{k} \quad b = 0 \quad (13.97)$$

Soluția particulară va avea în consecință forma:

$$y_p = -\frac{g}{k}t \quad (13.98)$$

Soluțiile sistemului de ecuații diferențiale (13.90) vor fi:

$$\begin{cases} x = C_1 + C_2 e^{-kt} \\ y = C_3 + C_4 e^{-kt} - \frac{g}{k}t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{x} = -C_2 k e^{-kt} \\ \dot{y} = -C_4 k e^{-kt} - \frac{g}{k} \end{cases} \quad (13.99)$$

Cele 4 constante de integrare se determină punând condițiile inițiale:

$$t = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} v_x = (\dot{x})_0 = v_0 \cos \alpha \\ v_y = (\dot{y})_0 = v_0 \sin \alpha \end{cases} \quad (13.100)$$

Efectuând calculele rezultă:

$$C_1 = -C_2 = \frac{v_0}{k} \cos \alpha \quad C_3 = -C_4 = \frac{v_0}{k} \sin \alpha + \frac{g}{k^2} \quad (13.101)$$

Se înlocuiesc aceste constante în (13.99) și se găsește legea de mișcare:

$$\begin{cases} x = \frac{v_0}{k}(1 - e^{-kt}) \cos \alpha \\ y = \frac{1}{k} \left( v_0 \sin \alpha + \frac{g}{k} \right) (1 - e^{-kt}) - \frac{g}{k}t \end{cases} \quad (13.102)$$

$$\begin{cases} v_x = \dot{x} = v_0 e^{-kt} \cos \alpha \\ v_y = \dot{y} = \left( v_0 \sin \alpha + \frac{g}{k} \right) e^{-kt} - \frac{g}{k} \end{cases} \quad (13.103)$$

Pentru stabilirea ecuației analitice a traiectoriei se elimină timpul  $t$  între ecuațiile parametrice (13.102). Se fac următoarele explicitări:

$$1 - e^{-kt} = \frac{kx}{v_0 \cos \alpha} \rightarrow t = \frac{1}{k} \ln \left( \frac{k}{v_0 \cos \alpha} x - 1 \right) \quad (13.104)$$

și se obține:

$$y = \left( \operatorname{tg} \alpha + \frac{g}{kv_0 \cos \alpha} \right) x + \frac{g}{k^2} \ln \left( 1 - \frac{k}{v_0 \cos \alpha} x \right) \quad (13.105)$$

Se observă că traiectoria admite o asimptotă verticală (fig.13.11) pentru:

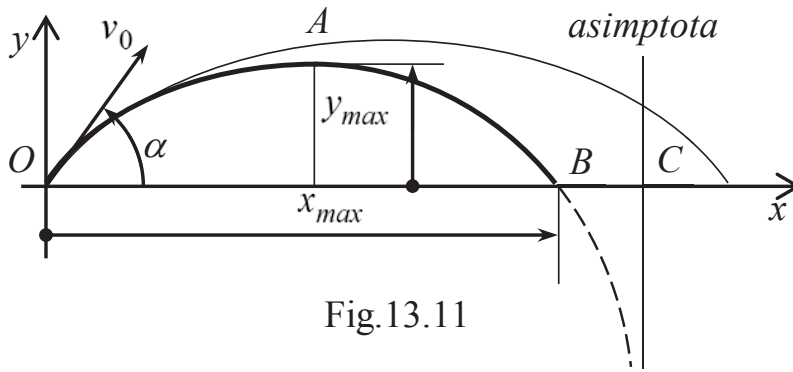


Fig.13.11

$$x_C = \frac{v_0}{k} \cos \alpha \quad (13.106)$$

valoare care anulează argumentul funcției logaritmice ( $\ln 0 = -\infty$ ). Pentru înălțimea maximă se pune condiția  $v_{Ay} = v_y(t_A) = 0$ ; se determină:

$$t_A = \frac{1}{k} \ln \left( \frac{kv_0}{g} \sin \alpha + 1 \right) \quad (13.107)$$

Se face înlocuirea în (13.102) și se obține:

$$y_A = y_{\max} = \frac{v_0}{k} \sin \alpha - \frac{g}{k^2} \ln \left( \frac{kv_0}{g} \sin \alpha + 1 \right) \quad (13.108)$$

Extragerea timpului  $t_B$  din ecuația  $y_B = y(t_B) = 0$  nu este posibilă, astfel încât nu se poate stabili o relație analitică explicită pentru distanța  $x_B = x_{\max}$  și pentru viteza  $v_B$ . Problema se poate rezolva pe cale numerică în condițiile cunoașterii valorilor parametrilor  $v_0, \alpha, k$ . Se dau valori succesive variabilei  $t$ , pornind de exemplu de la  $t_A$ , și se determină prin interpolare valoarea lui  $t$  pentru care funcția  $y = y(t)$  schimbă semnul. Cu valoarea astfel obținută se calculează apoi  $x_{\max}$  și  $v_B$ . Se pot face totuși unele observații comparând mișcarea punctului material greu în mediu rezistent și în vid (cele două traiectorii au fost reprezentate în fig.13.11). Astfel, în mediul rezistent:

- timpul de urcare și cel de coborâre sunt mai mici;
- înălțimea maximă este mai redusă, bătaia este mai scurtă;
- viteza de impact  $v_B$  este mai redusă;
- unghiul de incidență  $\beta$  este mai mare.

Pentru aruncarea pe verticală a unui punct material greu în mediu rezistent se introduce în legea de mișcare  $\alpha = \pi/2$  și se găsesc relațiile:

$$y = \frac{1}{k} \left( v_0 + \frac{g}{k} \right) (1 - e^{-kt}) - \frac{g}{k} t \quad (13.109) \quad v = \dot{y} = \left( v_0 + \frac{g}{k} \right) e^{-kt} - \frac{g}{k} \quad (13.110)$$

$$t_A = \frac{1}{k} \ln \left( \frac{kv_0}{g} + 1 \right) \quad (13.111)$$

$$y_A = y_{\max} = \frac{v_0}{k} - \frac{g}{k^2} \ln \left( \frac{kv_0}{g} + 1 \right) \quad (13.112)$$





```
% INTEGRAREA PENTRU VID
```

```
K=0;
[t,z]=ode45('rezvid',timp,z0);
xvid=z(:,1);
yvid=z(:,2);
% DIAGRAMA
plot(xvid,yvid,'-k',xaer,yaer,'-k');
grid; axis equal;
title('TRAIECTORII PUNCT ARUNCAT');
```

```
aeravid.m
```

```
function dery=rezvid(t,z)
global G K
xp=z(3);
yp=z(4);
xpp=-K*xp;
ypp=-K*yp-G;
dery=[xp; yp; xpp; ypp];
```

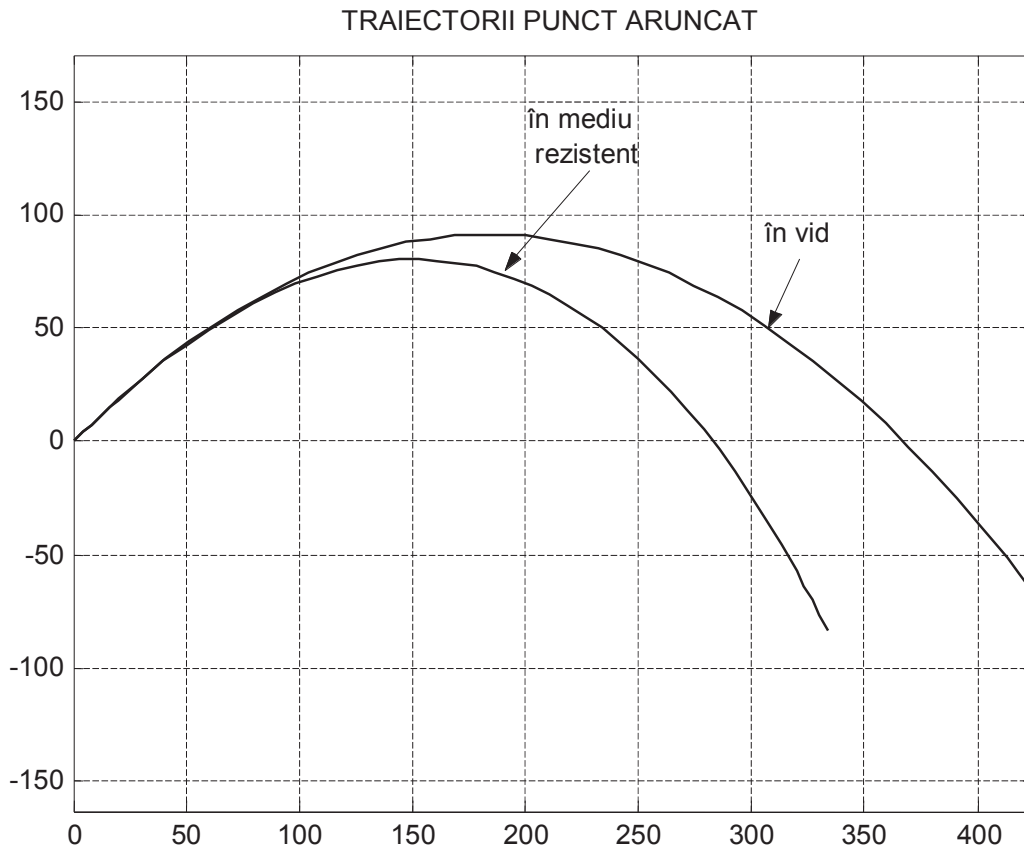


Fig.13.12

### 13.2.5 Mișcarea punctului material acționat de o forță centrală. Cazul general.

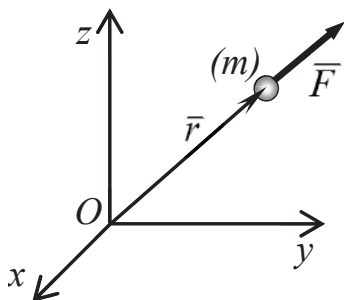


Fig.13.13

Se consideră un punct material de masă  $m$  acționat de o forță  $\bar{F}$  al cărei suport trece printr-un punct fix  $O$ , numită *forță centrală* (fig.13.13). Se aplică acestui punct material teorema momentului cinetic:

$$\dot{\bar{K}}_O = \bar{M}_O(\bar{F}) = \bar{r} \times \bar{F} = 0 \quad (13.117)$$

Rezultă că tot timpul mișcării momentul cinetic al punctului se conservă:

$$\bar{K}_O = \bar{C} = \bar{r} \times m\bar{v} \quad | \cdot \bar{r} \quad (13.118)$$

unde  $\bar{C}$  este o constantă vectorială de forma:

$$\bar{C} = C_1\bar{i} + C_2\bar{j} + C_3\bar{k} \quad (13.119)$$

Se înmulțește relația (13.118) scalar cu vectorul de poziție  $\vec{r}$  :

$$\vec{C} \cdot \vec{r} = (\vec{r} \times m\vec{v}) \cdot \vec{r} = 0 \quad (13.120)$$

deoarece la dreapta se află un produs mixt cu doi termeni identici. Se dezvoltă produsul scalar al termenilor din partea stângă:

$$C_1x + C_2y + C_3z = 0 \quad (13.121)$$

S-a obținut ecuația unui plan în coordonate carteziene, plan care trece prin punctul fix  $O$ . Rezultă de aici că *mișcarea punctului material acționat de o forță centrală se va efectua într-un plan care conține centrul acesteia*. Pe baza acestei demonstrații se utilizează în continuare sistemul de coordonate polare, specific, după cum s-a mai arătat, mișcărilor plane (fig.13.14).

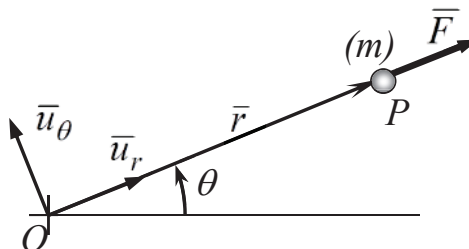


Fig.13.14

Pornind de la ecuațiile generale (13.62) se scriu ecuațiile diferențiale ale mișcării punctului pe direcțiile definite de versorii  $\vec{u}_r$  și  $\vec{u}_\theta$  :

$$\begin{cases} m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F \\ m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = \frac{F}{m} & (1) \\ r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0 & (2) \end{cases} \quad (13.122)$$

Se analizează mai întâi ecuația (2) care se înmulțește cu  $r$ :

$$r^2\ddot{\theta} + 2r\dot{r}\dot{\theta} = 0 \rightarrow \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0 \quad (13.123)$$

Se constată că termenul din paranteză este constant:

$$r^2\dot{\theta} = C = \text{const.} \quad (13.124)$$

În cap. 9.2.2, rel. 9.47, s-a definit viteza areolară drept variația în raport cu timpul a ariei acoperite de raza vectorială  $OP$ . Făcând legătura între relații se obține:

$$\Omega = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \frac{1}{2}C = \text{const.} \quad (13.125)$$

Se deduce de aici că sub acțiunea unei forțe centrale punctul material se deplasează cu viteză areolară constantă, respectiv că raza vectorială  $OP$  "mătură" arii egale în intervale de timp egale. Pe traiectoria din fig.13.15 arcele  $AB$  și  $CD$ , sunt parcurse în același interval de timp, ariile corespondente fiind egale. Lungimile arcelor și vitezele de parcurgere vor fi însă diferite. Constanta  $C$  din relația (13.124) poartă numele de *constanta ariilor*.

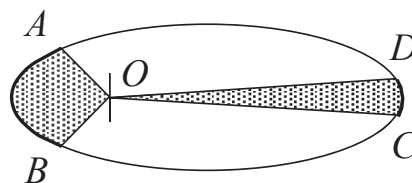


Fig.13.15

Ecuația diferențială (1) reprezintă o relație între  $r = r(t)$  și  $\theta = \theta(t)$ . Identificarea traiectoriei în coordonate polare presupune găsirea unei relații de forma  $r = r(\theta)$  în care să nu mai intervină variabila  $t$ . În acest scop ea va fi eliminată direct din ecuația (1). Se extrage  $\dot{\theta}$  din (13.124) și se înlocuiește în (1):

$$\dot{\theta} = \frac{C}{r^2} \quad (13.126)$$

$$\ddot{r} - \frac{C^2}{r^3} = \frac{F}{m} \quad (13.127)$$

Se prelucrează în continuare derivatele coordonatei polare  $r$ :

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \dot{\theta} = \frac{dr}{d\theta} \frac{C}{r^2} = \frac{C}{d\theta} \frac{dr}{r^2} = \frac{C}{d\theta} d\left(-\frac{1}{r}\right) = -C \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r}\right) \quad (13.128)$$

$$\ddot{r} = \frac{d}{dt}(\dot{r}) = \frac{d\dot{r}}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{C}{r^2} \frac{d}{d\theta} \left[ -C \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r}\right) \right] = -\frac{C^2}{r^2} \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r}\right) \quad (13.129)$$

Se face înlocuirea în (13.127) și se ordonează relația:

$$-\frac{C^2}{r^2} \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r}\right) - \frac{C^2}{r^3} = \frac{F}{m} \quad (13.130) \quad \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r} = -\frac{Fr^2}{mC^2} \quad (13.131)$$

Relația (13.131) este cunoscută în Mecanică sub denumirea de *ecuația lui Binet*. Integrarea ei pentru obținerea traiectoriei se face în funcție de forța aplicată punctului material.

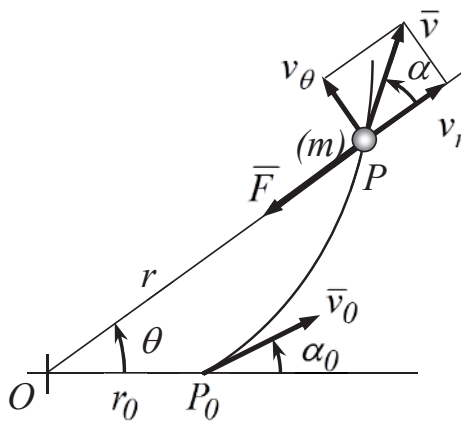


Fig.13.16

**Problema 13.2** Un punct material de masă  $m$  este lansat din poziția  $P_0$ , situată pe axa polară la distanța  $r_0$  de polul  $O$ , cu viteza inițială  $v_0$  care face unghiul  $\alpha_0$  cu această axă (fig.13.16). Asupra punctului material acționează permanent o forță de atracție  $F = \text{const}$ . Să se determine traiectoria punctului.

**Date numerice :**

$$r_0 = 10 \text{ m}, \quad v_0 = 20 \text{ m/s}, \quad \alpha_0 = 45^\circ,$$

$$m = 2 \text{ kg}, \quad F = -100 \text{ N}$$

**Rezolvare:** Constanta ariilor  $C$  se poate evalua pornind de la relația de definiție (13.124):

$$C = r^2 \dot{\theta} = r \cdot r \dot{\theta} = r \cdot v_\theta = (r)_0 \cdot (v_\theta)_0 = r_0 v_0 \sin \alpha_0 \quad (13.132)$$

În ecuația lui Binet (13.131) se introduc substituțiile:

$$u = \frac{1}{r} \quad (13.133) \quad A = -\frac{F}{mC^2} = \text{const}. \quad (13.134)$$

Se obține ecuația diferențială de ordinul II:

$$u'' = -u + \frac{A}{u^2} \quad (13.135)$$

în care variabila independentă  $\theta$  poate lua valori intervalul  $[\theta_{\min}, \theta_{\max}]$ . Pentru integrarea numerică (cap.13.1) se definesc vectorii

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} u \\ u' \end{bmatrix} \quad (13.136) \quad \mathbf{dery} = \begin{bmatrix} u' \\ u'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u' \\ -u + \frac{A}{u^2} \end{bmatrix} \quad (13.137)$$

Din relația (13.128) se deduce:

$$\frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\dot{r}}{C} \quad \rightarrow \quad u' = -\frac{v_r}{C} \quad (13.138)$$

Vectorul valorilor inițiale, corespunzătoare poziției  $\theta_{min}$ , se inițializează cu valorile variabilelor din momentul lansării:

$$\mathbf{u0} = \begin{bmatrix} u_0 \\ u'_0 \end{bmatrix} \quad (13.139)$$

în care:

$$u_0 = \frac{l}{r_0} \quad (13.140) \quad u'_0 = -\frac{(v_r)_0}{C} = -\frac{v_0 \cos \alpha_0}{C} \quad (13.141)$$

Pentru a avea o imagine mai cuprinzătoare asupra traiectoriei se dau valori variabilei independente  $\theta$  între 0 și  $4\pi$ . Programul MATLAB este conținut în fila **P13\_2.m** iar funcțiile derivatelor în fila **forcon.m**. Diagrama  $r = r(\theta)$  în coordonate polare este prezentată în fig.13.17.

```

P13_2.m
% PROBLEMA 13.2
% PUNCTUL MATERIAL ACTIONAT DE O
% FORȚA CONSTANTA
clear; close all;
global A;
% DATE NUMERICE
r0=10; v0=20;
alfa0=pi/4;
m=2; F=-100;
% CONSTANTE
C=r0*v0*sin(alfa0);
A=F/(m*C*C);
% INTERVALUL DE INTEGRARE
tetamin=0;
tetamax=4*pi;
inter=[tetamin, tetamax];

% CONDITIILE INITIALE
u10=1/r0;
u20=-v0*cos(alfa0)/C;
u0=[u10, u20];
% INTEGEAREA
[teta,u]=ode45('forcon',inter,u0);
% REZULTATE
r=1./u(:,1);
polar(teta,r);

forcon.m
function dery=forcon(t,z);
global A;
u=z(1);
up=z(2);
upp=-u-A/(u*u);
dery=[up; upp];

```

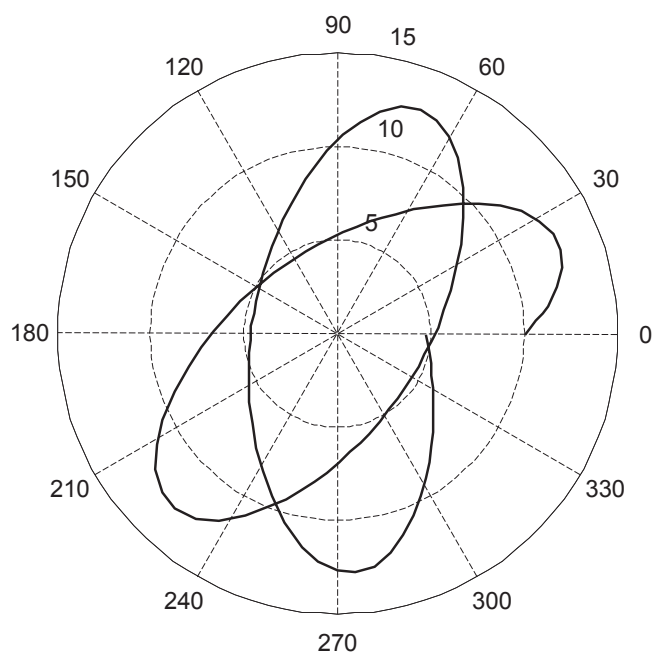


Fig.13.17

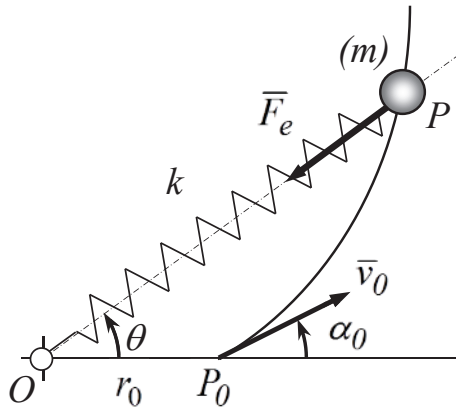


Fig.13.18

**Problema 13.3** Un punct material de masă  $m$  este prins la extremitatea unui arc care are cealaltă extremitate fixată în centrul  $O$  (fig.13.18); constanta arcului este  $k$ . Punctul este lansat dintr-o poziție  $P_0$  aflată pe axa polară cu viteza inițială  $v_0$  și sub unghiul  $\alpha_0$ ; în poziția de lansare arcul este relaxat și are lungimea  $r_0$ . Să se determine traiectoria punctului material.

**Date numerice:**  $m = 5 \text{ kg}$ ,  $r_0 = 1 \text{ m}$ ,  
 $v_0 = 0,5 \text{ m/s}$ ,  $\alpha_0 = 45^\circ$ ,  $k = 50 \text{ N/m}$

**Rezolvare:** Se procedează la fel ca în problema precedentă, cu excepția definiției forței care în acest caz este proporțională cu deformația resortului:

$$F_e = -k(r - r_0) \quad (13.142)$$

Ecuția lui Binet ia forma:

$$\frac{d^2}{d\theta^2} \left( \frac{l}{r} \right) + \frac{l}{r} = \frac{k(r - r_0)r^2}{mC^2} \quad (13.143)$$

Se introduc substituțiile:

$$u = \frac{l}{r} \quad (13.144) \quad A = \frac{k}{mC^2} = \text{const.} \quad (13.145)$$

și se obține:

$$u'' = -u + A \left( \frac{l}{u^3} - \frac{r_0}{u^2} \right) \quad (13.146)$$

Această ecuație diferențială se prelucrează în modul următor:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} u \\ u' \end{bmatrix} \quad (13.147) \quad \mathbf{dery} = \begin{bmatrix} u' \\ u'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u' \\ -u + A \left( \frac{l}{u^3} - \frac{r_0}{u^2} \right) \end{bmatrix} \quad (13.148)$$

Condițiile inițiale sunt aceleași ca în problema precedentă (rel.13.139 – 13.141) iar variabila  $\theta$  ia valori în intervalul  $(0, 2\pi)$ . Programul MATLAB este conținut în fila **P13\_3.m** iar funcțiile derivatelor în fila **forel.m**. Diagrama  $r = r(\theta)$  în coordonate polare este prezentată în fig.13.19.

#### P13\_3.m

```
% PROBLEMA 13.3
% PUNCTUL MATERIAL
% ACTIONAT DE O
% FORTA ELASTICA
global A R0;
% DATE NUMERICE
m=5; R0=1;
v0=0.5; alfa0=pi/4;
k=50;
% CONSTANTE
C=R0*v0*sin(alfa0);
```

```
A=k/(m*C*C);
% INTERVALUL DE
INTEGRARE
tetamin=0; tetamax=2*pi;
inter=[tetamin, tetamax];
% CONDITIILE INITIALE
u10=1/R0;
u20=-v0*cos(alfa0)/C;
init=[u10, u20];
% INTEGEAREA
[teta,u]=ode45('forel',inter,init);
```

#### % REZULTATE

```
r=1./u(:,1);
polar(teta,r);
```

#### forel.m

```
function dery=forel(t,z);
global A R0;
u=z(1);
up=z(2);
upp=-u+A*(1/u-3)/u^2;
dery=[up; upp];
```

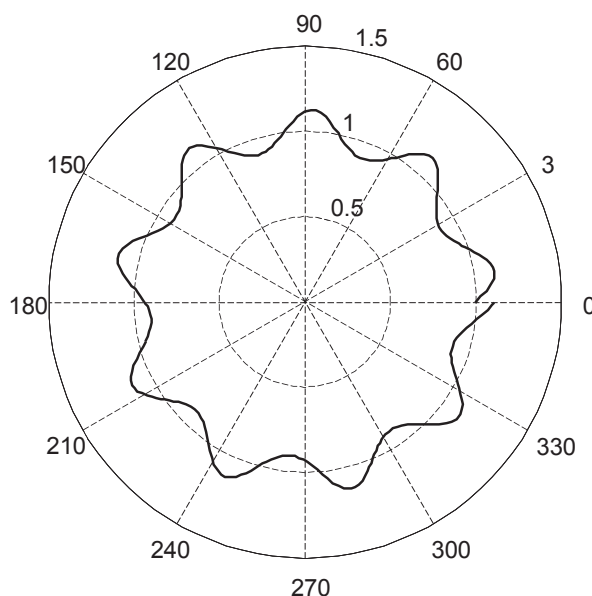


Fig.13.19

### 13.2.6...Mișcarea punctului material sub acțiunea forței de atracție universală.

Se alege polul sistemului de coordonate în centrul masei atrătoare  $M$  (fig.13.20) Asupra masei atrase  $m$  va acționa forța:

$$F = -f \frac{Mm}{r^2} \quad (13.149)$$

în care  $f = 6,664 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 / (\text{kg} \cdot \text{s}^2)$  este constanta atracției universale. Se introduce această forță în ecuația lui Binet (13.131) și se obține ecuația diferențială:

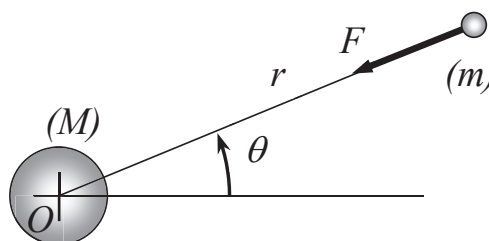


Fig.13.20

$$\frac{d^2}{d\theta^2} \left( \frac{l}{r} \right) + \frac{l}{r} = \frac{fM}{C^2} \quad (13.150)$$

Pentru o integrare comodă se face substituția:

$$\frac{l}{r} = u \quad \rightarrow \quad u'' + u = \frac{fM}{C^2} \quad (13.151)$$

Soluția acestei ecuații diferențiale de ordinul II, neomogenă, are forma generală:

$$u = u_{om} + u_p \quad (13.152)$$

Ecuația omogenă:

$$u'' + u = 0 \quad (13.153)$$

se integrează alegând o soluție de forma:

$$u = k e^{\lambda\theta} \neq 0 \quad \rightarrow \quad u' = k \lambda e^{\lambda\theta} \quad \rightarrow \quad u'' = k \lambda^2 e^{\lambda\theta} \quad (13.154)$$

Se determină rădăcinile ecuației caracteristice:

$$k e^{\lambda\theta} (\lambda^2 + 1) = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda^2 + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \pm i \quad (13.155)$$



și rezultă forma întâia a soluției ecuației omogene:

$$u_{om} = k_1 e^{i\theta} + k_2 e^{-i\theta} \quad (13.156)$$

în care  $k_1, k_2$  sunt constante de integrare complexe. Utilizând relațiile lui Euler:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta \quad e^{-i\theta} = \cos\theta - i \sin\theta \quad (13.157)$$

se obține:

$$u_{om} = (k_1 + k_2) \cos\theta + i(k_1 - k_2) \sin\theta \quad (13.158)$$

Se notează în continuare:

$$A = k_1 + k_2 \quad B = i(k_1 - k_2) \quad (13.159)$$

și se obține forma a doua a soluției ecuației omogene:

$$u_{om} = A \cos\theta + B \sin\theta \quad (13.160)$$

în care  $A$  și  $B$  sunt noile constante de integrare reale. Există și o a treia formă a soluției care se găsește făcând substituțiile:

$$A = D \cos\theta_0 \quad B = D \sin\theta_0 \quad (13.161)$$

în care  $D$  și  $\theta_0$  sunt tot constante de integrare reale:

$$u_{om} = D(\cos\theta_0 \cos\theta + \sin\theta_0 \sin\theta) = D \cos(\theta - \theta_0) \quad (13.162)$$

$$D = \sqrt{A^2 + B^2} \quad \text{tg}\theta_0 = B/A \quad (13.163)$$

Soluția particulară a ecuației diferențiale este:

$$u_p = \frac{fM}{C^2} = \text{const.} \quad (13.164)$$

Se observă că această soluție verifică ecuația (13.151). Pentru analiza care urmează sunt utile următoarele forme ale soluției ecuației diferențiale:

$$u = \frac{l}{r} = A \cos\theta + B \sin\theta + \frac{fM}{C^2} \quad (13.165)$$

$$u = \frac{l}{r} = D \cos(\theta - \theta_0) + \frac{fM}{C^2} \quad (13.166)$$

a) Recunoașterea formei traiectoriei.

Relația (13.166) se prelucrează în modul următor:

$$r = \frac{l}{\frac{fM}{C^2} + D \cos(\theta - \theta_0)} = \frac{\frac{C^2}{fM}}{1 + \frac{DC^2}{fM} \cos(\theta - \theta_0)} = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \theta_0)} \quad (13.167)$$

Expresia obținută, în care s-au introdus notațiile:

$$p = \frac{C^2}{fM} \quad (13.168) \quad e = \frac{DC^2}{fM} = \frac{C^2}{fM} \sqrt{A^2 + B^2} \quad (13.169)$$

reprezintă ecuația unei conice într-un sistem de coordonate polare, la care polul  $O$  coincide cu focarul conice iar axa polară este axa ei de simetrie. Se poate enunța concluzia că *sub acțiunea unei forțe centrale, un punct material se va înscrie pe o traiectorie plană, curba respectivă aparținând familiei conicelor.*

Constantele de mai sus poartă denumirile:  $p$  – parametrul conice,  $e$  – excentricitatea conice. Conicele se departajează între ele prin valoarea excentricității:  $e = 0$  pentru cerc,  $0 < e < 1$  pentru elipsă,  $e = 1$  pentru parabolă și  $e > 1$  pentru hiperbolă.

b) Analiza mișcării în funcție de condițiile inițiale.

În definirea excentricității (13.169) intră constantele de integrare  $A$  și  $B$ . Pentru determinarea lor se utilizează forma a doua a soluției ecuației diferențiale:

$$\frac{l}{r} = A \cos \theta + B \sin \theta + \frac{fM}{C^2} \quad (13.170)$$

la care se adaugă derivata ei în raport cu timpul:

$$-\frac{\dot{r}}{r^2} = -A \sin \theta \cdot \dot{\theta} + B \cos \theta \cdot \dot{\theta} \quad (13.171)$$

Cu observația că  $r^2 \dot{\theta} = C$ , aceasta se mai poate scrie:

$$-\frac{\dot{r}}{C} = -A \sin \theta + B \cos \theta \quad (13.172)$$

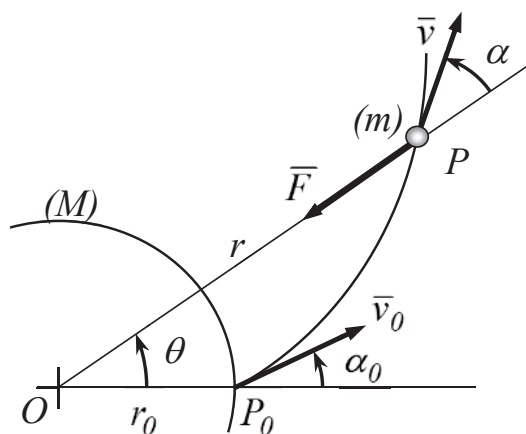


Fig.13.21

Se consideră că punctul material este lansat din poziția  $P_0$  aflat chiar pe axa polară (fig.13.21), astfel că se pot defini condițiile inițiale:

$$t = 0 \rightarrow \begin{cases} r = r_0 \\ \theta = 0 \end{cases} \begin{cases} v_r = (\dot{r})_0 = v_0 \cos \alpha_0 \\ v_\theta = (r\dot{\theta})_0 = v_0 \sin \alpha_0 \end{cases} \quad (13.173)$$

Pe baza acestora se poate face determinarea constantei ariilor:

$$C = r^2 \dot{\theta} = (r^2 \dot{\theta})_0 = (r \cdot r\dot{\theta})_0 = r_0 v_0 \sin \alpha_0 \quad (13.174)$$

Se reține pentru nevoile demonstrației și relația:

$$\sin \alpha_0 = \frac{C}{r_0 v_0} \quad (13.175)$$

Se introduc condițiile inițiale în relațiile (13.170) și (13.172)

$$\begin{cases} \frac{l}{r_0} = A + \frac{fM}{C^2} \\ -\frac{v_0 \cos \alpha_0}{C} = B \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = \frac{l}{r_0} - \frac{fM}{C^2} \\ B = -\frac{v_0}{C} \sqrt{1 - \sin^2 \alpha_0} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A^2 = \left( \frac{l}{r_0} - \frac{fM}{C^2} \right)^2 \\ B^2 = \frac{v_0^2}{C^2} - \frac{l}{r_0^2} \end{cases} \quad (13.176)$$

În continuare se utilizează aceste constante de integrare în relația (13.169) a excentricității și, efectuând calculele, se obține relația finală:

$$e = \frac{C^2}{fM} \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{1 + \frac{C^2}{f^2 M^2} \left( v_0^2 - \frac{2fM}{r_0} \right)} \quad (13.177)$$

Se poate observa că valoarea excentricității depinde de valoarea vitezei de lansare  $v_0$ . Astfel, pentru:

$$v_0 < \sqrt{\frac{2fM}{r_0}} \rightarrow e < 1 \quad - \text{traectoria este o elipsă,}$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{2fM}{r_0}} \rightarrow e = 1 \quad - \text{traectoria este o parabolă,}$$

$$v_0 > \sqrt{\frac{2fM}{r_0}} \rightarrow e > 1 \quad - \text{traectoria este o hiperbolă.}$$

Din relația (13.177) nu se poate stabili condiția ca traiectoria să fie circulară. Pentru aceasta se poate folosi direct ecuația (13.150) de la care s-a pornit analiza, în care se introduc condițiile specifice unei mișcări circulare – raza constantă ( $r = r_0 = \text{const}$ ) și viteza perpendiculară pe rază ( $\alpha = \alpha_0 = \pi/2$ ):

$$\frac{d^2}{d\theta} \left( \frac{l}{r_0} \right) + \frac{l}{r_0} = \frac{fM}{C^2} \rightarrow \frac{l}{r_0} = \frac{fM}{C^2} = \frac{fM}{r_0^2 v_0^2} \quad (13.178)$$

în care s-a luat:

$$C = r_0 v_0 \sin \alpha_0 = r_0 v_0 \quad (13.179)$$

Se găsește viteza:

$$v_0 = \sqrt{\frac{fM}{r_0}} \quad (13.180)$$

Se observă că dacă se introduce această valoare în relația (13.177) se obține excentricitatea  $e < 1$ , fapt explicabil prin aceea că cercul reprezintă un caz particular al elipsei.

### c) Calculul vitezelor cosmice.

În condițiile în care masa atrătoare  $M$  este masa Pământului iar masa atrasă  $m$  aparține unui obiect sau vehicul lansat în spațiul extraterestru, vitezele determinate mai sus poartă numele de viteze cosmice. Calculul lor este ușor de efectuat dacă se pune în evidență faptul că la nivelul suprafeței terestre forța de atracție universală se manifestă prin greutatea corpurilor:

$$mg = f \frac{Mm}{R^2} \rightarrow fM = gR^2 \quad (13.181)$$

în care  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$  este accelerația gravitațională iar  $R = 6370 \text{ km}$  este raza Pământului.

Prima viteză cosmică, numită și viteza de satelizare și notată  $v_1$ , este viteza minimă necesară înscrierii unui obiect lansat în spațiul extraterestru pe o traiectorie ciclică în jurul Pământului. Corespunzător acesteia traiectoria va fi circulară (fig.13.22). Considerând că lansarea se face la o înălțime  $h$  deasupra Pământului, din relația (13.180) se deduce:

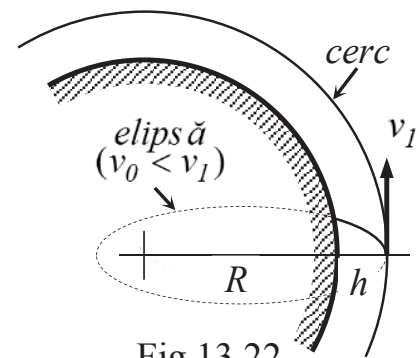


Fig.13.22

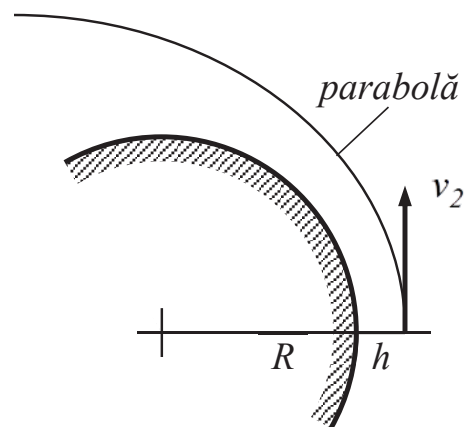


Fig.13.23

$$v_1 = \sqrt{\frac{fM}{r_0}} = \sqrt{\frac{fM}{R+h}} = \sqrt{\frac{gR^2}{R+h}} \cong \sqrt{gR} = 7,91 \text{ km/s} \quad (13.182)$$

În mod practic  $h \ll R$  și poate fi neglijat. Dacă viteza de lansare este mai mică decât  $v_1$  atunci punctul parcurge un arc de elipsă revenind la suprafața terestră.

A doua viteză cosmică, notată  $v_2$ , este viteza minimă necesară pentru ca mobilul să se înscrie pe o traiectorie neciclică, respectiv să nu mai revină în spațiul din proximitatea Pământului. Această viteză corespunde unei traiectorii parabolice pentru care  $e = 1$  (fig.13.23). Conform analizei de mai înainte:

$$v_2 = \sqrt{\frac{2fM}{r_0}} = v_1 \sqrt{2} = 11,2 \text{ km/s} \quad (13.183)$$

Prezentarea comparativă a traiectoriilor unui mobil lansat din același punct dar cu viteze inițiale diferite, este dată în fig.13.24.

A treia viteză cosmică, notată  $v_3$ , se definește ca fiind viteza cu care ar trebui lansat un mobil direct de pe suprafața terestră, în sensul de rotație al Pământului, astfel încât mobilul să se înscrie pe o traiectorie de părăsire a sistemului solar. Analiza efectuată mai sus poate fi extinsă la nivelul sistemului solar considerând că traiectoria Pământului în jurul Soarelui este aproximativ circulară.

Astfel, viteza necesară înscrierii pe o traiectorie parabolică în raport cu soarele se obține în mod analog vitezei  $v_2$ , pornind de această dată de la viteza Pământului:

$$v_0 = v_P \sqrt{2} \quad (13.184)$$

$$v_P = \frac{2\pi R_P}{T} \cong 30 \text{ km/s} \quad (13.185)$$

unde  $R_P = 1,5 \cdot 10^8 \text{ km}$  este raza traiectoriei Pământului în jurul Soarelui iar  $T = 365 \cdot 24 \cdot 3600 \text{ sec.}$  este perioada de revoluție. Pe porțiuni comparabile cu dimensiunea Pământului se poate considera traiectoria rectilinie (fig.13.25).

Deplasarea mobilului va avea loc în lungul axei polare suprapusă acestei porțiuni de traiectorie. Asupra lui va acționa atracția Pământului exprimată prin forța de atracție universală, astfel că ecuația de mișcare se integrează în modul următor:

$$m\ddot{r} = -f \frac{Mm}{r^2} \quad | \quad 2\dot{r} \rightarrow 2\dot{r}\dot{r} = 2fM \left( -\frac{\dot{r}}{r^2} \right) \rightarrow v^2 = (\dot{r})^2 = \frac{2fM}{r} + C \quad (13.186)$$

Constanta de integrare se determină observând că pentru  $r \rightarrow \infty$  viteza relativă este  $v = v_0 - v_P$ . Rezultă legea vitezei relative a mobilului față de Pământ:

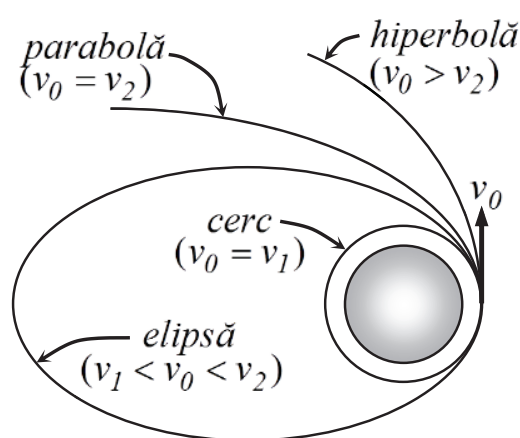


Fig.13.24

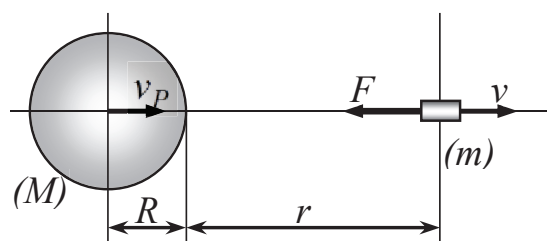


Fig.13.25

$$v = \sqrt{\frac{2fM}{r} + (v_0 - v_P)^2} \quad (13.187)$$

În punctul de lansare  $v = v_3$ ,  $r = R$ ,  $fM = gR^2$  și rezultă:

$$v_3 = \sqrt{2gR + (v_0 - v_P)^2} \cong 16,6 \text{ km/s} \quad (13.188)$$

### 13.3 Dinamica punctului material supus la legături

#### 13.3.1 Ecuațiile mișcării

Axioma legăturilor, enunțată în Statică pentru punctul material, stipulează că orice legătură poate fi suprimată și înlocuită prin forțe corespunzătoare, acesta putând fi tratat în continuare ca și cum ar fi liber. În această situație, pe lângă forțele exterioare date, asupra punctului material vor acționa și forțele de legătură (reacțiunile). Teoremele generale demonstrate în cap.13.1.4 se completează după cum urmează:

$$\dot{\vec{H}} = \vec{F} + \vec{F}_{leg} \quad (13.189)$$

$$\dot{\vec{K}}_O = \vec{M}_O(\vec{F}) + \vec{M}_O(\vec{F}_{leg}) \quad (13.190)$$

$$dE = dL + dL_{leg} \quad (13.191)$$

Ecuațiile scalare care se obțin prin utilizarea diferitelor sisteme de coordonate vor avea ca necunoscute, pe lângă legea de mișcare, și reacțiunile din partea legăturilor. Dacă legăturile sunt cu frecare, la ecuațiile scalare menționate se adaugă și relația de definiție a forței de frecare de alunecare<sup>\*)</sup>:

$$F_f = \mu N \quad (13.192)$$

Pentru rezolvarea problemelor de Dinamică se conturează două metode:

– *metoda impulsului*, bazată pe teorema impulsului și pe cea a momentului cinetic, care permite o rezolvare integrală prin determinarea atât a legii de mișcare cât și a reacțiunilor;

– *metoda energiei*, bazată pe teorema energiei cinetice, care permite determinarea numai a legii de mișcare; completarea rezolvării, respectiv calculul reacțiunilor, se face apelând la ecuațiile metodei impulsului.

Se reamintesc din Statică reacțiunile specifice punctului material:

- punct material pe o suprafață -  $\vec{N}$  după direcția normalei la suprafață,  $\vec{F}_f$  în planul tangent la suprafață, în sens invers mișcării;
- punct material pe o curbă -  $\vec{N}$  într-un plan normal la curbă,  $\vec{F}_f$  pe direcția tangentei la curbă, în sens invers mișcării;
- punct material suspendat de un fir - tensiunea  $\vec{T}$  pe direcția firului întins.

<sup>\*)</sup> Spre deosebire de Statică, în Dinamică se preferă notarea forței de frecare prin  $F_f$ .

### 13.3.2 Mișcarea pe planul înclinat

Un punct material de masă  $m$  este lansat pe un plan înclinat cu unghiul  $\alpha$  față de orizontală; viteza inițială  $v_0$  face unghiul  $\beta$  cu baza planului (fig.13.26). Între punctul material și suprafața planului înclinat există frecare cu coeficientul  $\mu$ . Se dorește stabilirea ecuațiilor diferențiale ale mișcării.

Aparent, mișcarea acestui punct material este asemănătoare cu cea dintr-un mediu rezistent (cap.13.2.4) unde s-a considerat că rezistența este variabilă atât ca mărime cât și ca direcție în funcție de viteză. În cazul de față însă, forța de frecare este constantă ca mărime, numai direcția ei este variabilă odată cu cea a vitezei. Pentru vectorul forței de frecare se poate stabili relația de definiție:

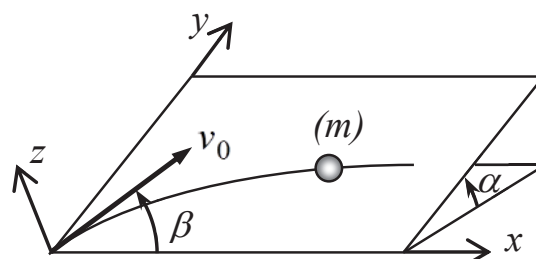


Fig.13.26

$$\vec{F}_f = -\mu N \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \quad (13.193)$$

în care viteza punctului în coordonatele carteziene din fig.13.27 este:

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} = \dot{x} \vec{i} + \dot{y} \vec{j} \quad (13.194) \quad |\vec{v}| = \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2} \quad (13.195)$$

Pentru scrierea ecuațiilor diferențiale ale mișcării este suficientă utilizarea teoremei impulsului:

$$\vec{H} = m\vec{a} = \vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_f \quad (13.196)$$

din care se obțin ecuațiile:

$$m\ddot{x} = -\mu N \frac{v_x}{|\vec{v}|} \quad (13.197)$$

$$m\ddot{y} = -\mu N \frac{v_y}{|\vec{v}|} - G \sin \alpha$$

$$0 = N - G \cos \alpha$$

Cu observația că  $G = mg$  aceste ecuații devin:

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\mu g \cos \alpha \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \\ \ddot{y} = -\mu g \cos \alpha \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} - g \sin \alpha \end{cases} \quad (13.198)$$

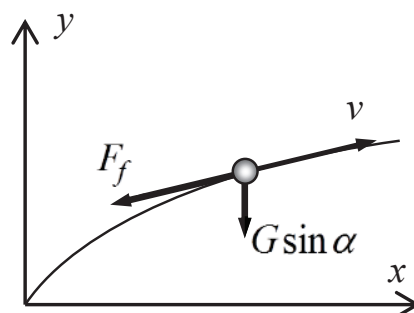
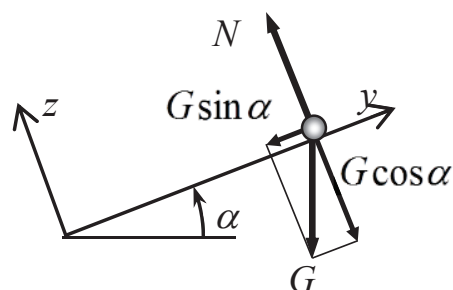


Fig.13.27

Cele două ecuații diferențiale de ordinul II, neomogene, sunt cuplate între ele. Condițiile inițiale sunt:

$$t = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} v_x = \dot{x} = v_0 \cos \beta \\ v_y = \dot{y} = v_0 \sin \beta \end{cases} \quad (13.199)$$

Integrarea acestui sistem pentru a găsi o soluție analitică este dificilă.

În cazul particular în care aruncarea se face perpendicular pe baza planului înclinat,  $x = \dot{x} = \ddot{x} = 0$  și  $\beta = \pi/2$ . Relațiile (13.198) se reduc la o singură ecuație:

$$\ddot{y} = -g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha \cdot \frac{\dot{y}}{|\dot{y}|}) = \text{const.} \quad (13.200)$$

care se integrează direct:

$$\begin{cases} \dot{y} = -g(\sin \alpha \pm \mu \cos \alpha) t + C_1 \\ y = -g(\sin \alpha \pm \mu \cos \alpha) \frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2 \end{cases} \quad (13.201)$$

Cu condițiile inițiale  $y = 0$  și  $\dot{y} = v_0$  se găsesc constantele de integrare  $C_1 = v_0$  și  $C_2 = 0$ . Legea de mișcare ia binecunoscuta formă:

$$\begin{cases} v = v_0 - g(\sin \alpha \pm \mu \cos \alpha) t \\ y = v_0 t - \frac{1}{2} g(\sin \alpha \pm \mu \cos \alpha) t^2 \end{cases} \quad (13.202)$$

în care semnul + se va lua la urcare iar – la coborâre. Aceste relații sunt valabile pentru studiul pe porțiuni al mișcării deoarece există un punct de oprire după care forța de frecare își schimbă sensul. În cazul unei mișcări continue, urcare urmată de coborâre, trebuie integrată ecuația (13.200).

**Problema 13.4** Să se integreze pe cale numerică ecuațiile de mișcare ale unui punct material pe un plan înclinat cu frecare în cazul general.

Date numerice:

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 0, \quad v_0 = 5 \text{ m/s}, \quad \alpha = 30^\circ, \quad \beta = 60^\circ, \\ \mu = 0,2, \quad g = 9,80665$$

Rezolvare: Se notează constantele:

$$a = -\mu g \cos \alpha \quad b = -g \sin \alpha \quad (13.203)$$

astfel că ecuațiile (13.198) vor lua o formă simplificată:

$$\ddot{x} = \frac{a\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \quad \ddot{y} = \frac{a\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} + b \quad (13.204)$$

Se transformă aceste două ecuații diferențiale cuplate de ordinul II într-un sistem de patru ecuații de ordinul I care se integrează numeric în modul descris în cap.13.2.2. Se alcătuiască vectorul soluțiilor  $\mathbf{z}$  și cel al derivatelor  $\mathbf{dery}$ :

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} x \\ y \\ \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} \quad (13.205) \quad \mathbf{dery} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \frac{a\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \\ \frac{a\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} + b \end{bmatrix} \quad (13.206)$$



Vectorul  $\mathbf{z0}$  va conține condițiile inițiale (13.199):

$$\mathbf{z0} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ v_{0x} \\ v_{0y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ v_0 \cos \beta \\ v_0 \sin \beta \end{bmatrix} \quad (13.207)$$

Variabila independentă este timpul  $t$  care va lua valori în intervalul  $0 \dots 2$  sec.

După efectuarea integrării numerice se extrag din matricea  $\mathbf{z}$  coloanele 1 și 2 care vor conține valorile  $x(t)$  și  $y(t)$ ; cu acestea se trasează o diagramă care va reprezenta traiectoria punctului pe planul înclinat. Programul MATLAB este conținut în fila **P13\_4.m** iar funcțiile de evaluare a derivatelor sunt incluse în fila **plan.m**; diagrama este prezentată în fig.13.28.

#### P13\_4.m

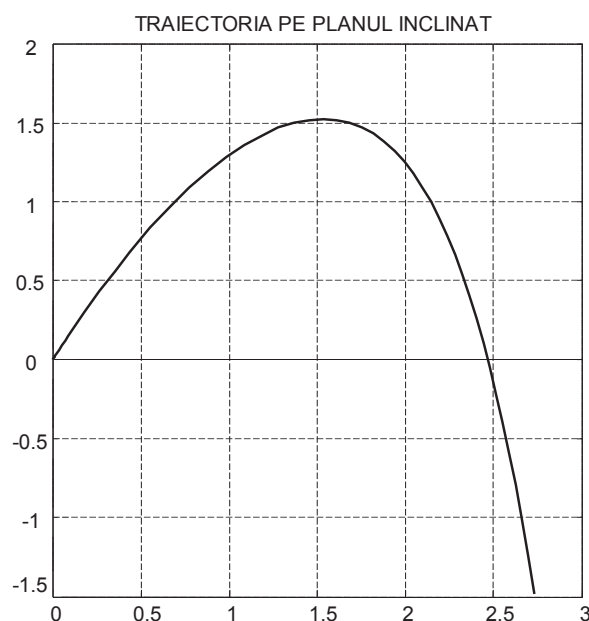
```
% PROBLEMA 13.4
% MISCAREA PE UN PLAN
% INCLINAT CU FRECARE
clear; close;
global A B;
% DATE NUMERICE
v0=5;
alfa=pi/6; beta=pi/3;
miu=0.2; g=9.80665;
% CONSTANTE
A=-miu*g*cos(alfa);
B=-g*sin(alfa);
% INTERVALUL DE INTEGRARE
tmin=0; tmax=2;
timp=[tmin, tmax];
% CONDITIILE INITIALE
x0=0; y0=0;
v0x=v0*cos(beta);
v0y=v0*sin(beta);
z0=[x0, y0, v0x, v0y];
```

#### % INTEGEAREA

```
[t,z]=ode45('plan',timp,z0);
% REZULTATE
x=z(:,1);
y=z(:,2);
plot(x,y); grid;
title('TRAIECTORIA PE PLANUL INCLINAT');
```

#### plan.m

```
function dery=plan(t,z);
global A B;
xp=z(3);
yp=z(4);
v=sqrt(xp*xp+yp*yp);
xpp=A*xp/v;
ypp=A*yp/v+B;
dery=[xp; yp; xpp; ypp];
```



### 13.3.3 Pendulul sferic

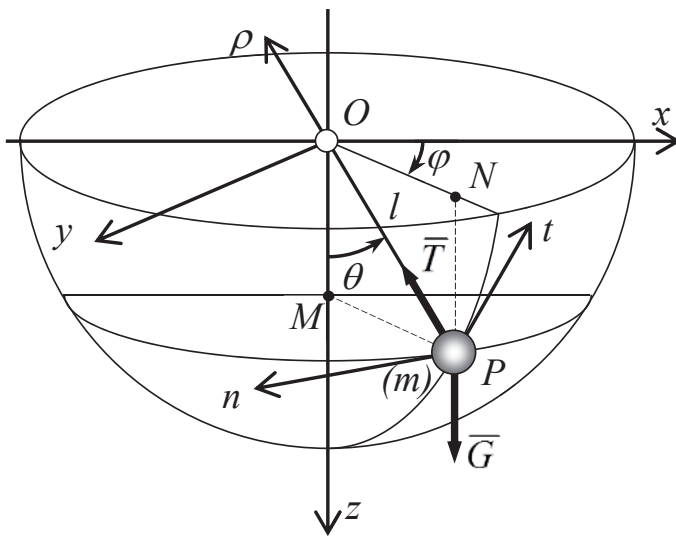


Fig.13.29

Un punct material de masă  $m$  este suspendat la extremitatea unui fir de lungime  $l$  având cealaltă extremitate în punctul fix  $O$ . Dacă firul rămâne permanent întins, traiectoriile descrise de punct sunt conținute pe suprafața unei sfere cu centrul în  $O$  și raza egală cu lungimea firului. Pentru poziționarea pendulului, sistemul de axe cartezian se dispune în modul arătat în fig.13.29.

Mișcarea pendulului pe sferă poate fi studiată mai comod dacă prin punctul  $P$  se duc două plane

mobile perpendiculare unul pe celălalt – un plan meridian vertical care face unghiul  $\varphi$  cu planul fix  $xOz$  și un plan orizontal. În planul vertical firul pendulului face unghiul  $\theta$  cu axa  $Oz$ . Unghiurile  $\varphi$  și  $\theta$  sunt alese drept parametri poziționali independenți ai pendulului.

Pentru stabilirea ecuațiilor diferențiale ale mișcării se consideră adecvată raportarea parametrilor cinematici (viteza și accelerația) precum și a forțelor la un triedru mobil cu originea în punctul  $P$ ; axa  $\rho$  a acestuia trece prin punctul de suspendare  $O$  iar axele  $n$  și  $t$  sunt tangente la cercurile rezultate din intersectarea sferei cu cele două plane menționate mai sus. Se observă că viteza punctului  $P$  va fi conținută în planul tangent la sferă determinat de direcțiile  $n$  și  $t$ .

Pentru determinarea proiecțiilor vitezei și accelerației pe axele acestui triedru este mai comod să se calculeze mai întâi expresiile lor în coordonate cilindrice (cap.9.2.3) notate în acest caz  $r, \varphi, z$ , în care:

$$r = ON = MP = l \sin \theta \quad z = OM = l \cos \theta \quad (13.208)$$

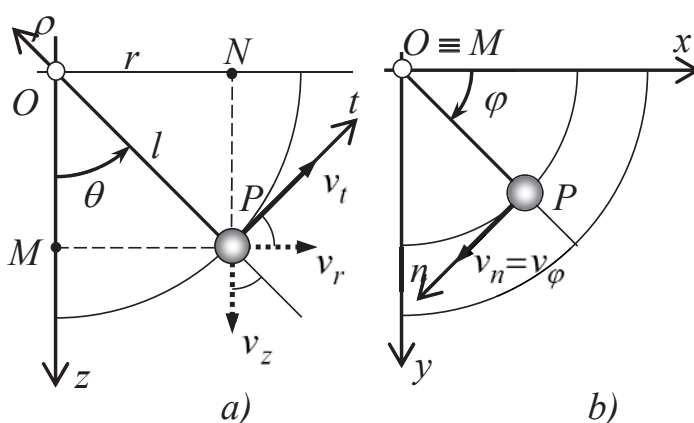


Fig.13.30

În aceste coordonate vitezele sunt:

$$\begin{cases} v_r = \dot{r} = l \dot{\theta} \cos \theta \\ v_\varphi = r \dot{\varphi} = l \dot{\varphi} \sin \theta \\ v_z = \dot{z} = -l \dot{\theta} \sin \theta \end{cases} \quad (13.209)$$

În fig.13.30 aceste viteze sunt reprezentate în sensurile lor pozitive. Pornind de la aceste relații se determină proiecțiile pe

axele locale  $\rho, n, t$ :

$$\begin{cases} v_\rho = -v_z \cos\theta - v_r \sin\theta = 0 \\ v_t = -v_z \sin\theta + v_r \cos\theta = l\dot{\theta} \\ v_n = v_\varphi = l\dot{\phi} \sin\theta = r\dot{\phi} \end{cases} \quad (13.210)$$

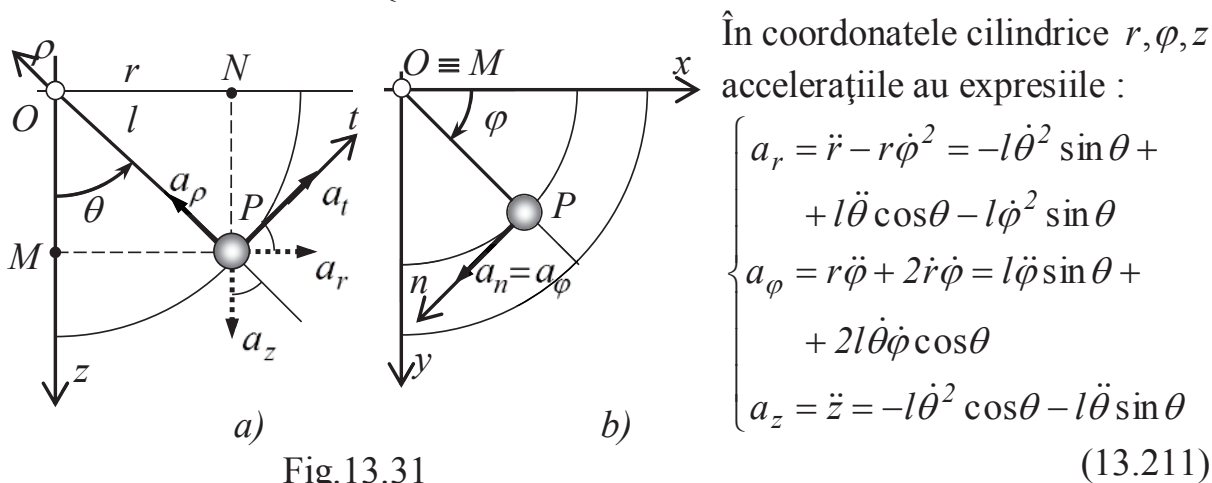


Fig.13.31

În coordonatele cilindrice  $r, \varphi, z$  accelerațiile au expresiile:

$$\begin{cases} a_r = \ddot{r} - r\dot{\phi}^2 = -l\dot{\theta}^2 \sin\theta + \\ \quad + l\ddot{\theta} \cos\theta - l\dot{\phi}^2 \sin\theta \\ a_\varphi = r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi} = l\ddot{\phi} \sin\theta + \\ \quad + 2l\dot{\theta}\dot{\phi} \cos\theta \\ a_z = \ddot{z} = -l\dot{\theta}^2 \cos\theta - l\ddot{\theta} \sin\theta \end{cases} \quad (13.211)$$

În fig.13.31 aceste viteze sunt reprezentate în sensurile lor pozitive. În coordonatele locale  $\rho, n, t$  proiecțiile accelerației sunt:

$$\begin{cases} a_\rho = -a_z \cos\theta - a_r \sin\theta = l\dot{\theta}^2 + l\dot{\phi}^2 \sin^2\theta \\ a_t = -a_z \sin\theta + a_r \cos\theta = l\ddot{\theta} - l\dot{\phi}^2 \sin\theta \cos\theta \\ a_n = a_\varphi = l\ddot{\phi} \sin\theta + 2l\dot{\theta}\dot{\phi} \cos\theta \end{cases} \quad (13.212)$$

#### a) Mișcarea pendulului sferic în mediu nerezistent

Forțele aplicate pendulului sunt greutatea  $\overline{G}$  și tensiunea din fir  $\overline{T}$  (fig.13.29). Ambele forțe sunt coplanare cu axa  $Oz$  și momentele lor față de aceasta sunt nule. Drept urmare, momentul cinetic al pendulului față de această axă se conservă:

$$\dot{K}_z = \sum M_z = 0 \rightarrow K_z = \text{const.} \quad (13.213)$$

Se reamintește că, prin definiție, momentul cinetic reprezintă momentul vectorului impuls față de un punct sau față de o axă. Impulsul masei  $m$  va fi:

$$\overline{H} = m\overline{v} = m\overline{v}_t + m\overline{v}_n = \overline{H}_t + \overline{H}_n \quad (13.214)$$

Componenta  $\overline{H}_t = m\overline{v}_t$  este coplanară cu axa  $Oz$  și nu va da moment față de aceasta. În consecință:

$$K_z = r \cdot mv_n = m(r^2\dot{\phi}) = mC = \text{const.} \quad (13.215)$$

Cu notația specifică aplicației se poate recunoaște prin analogie în expresia:

$$C = r^2\dot{\phi} = \text{const.} \quad (13.216)$$

constanta ariilor definită în cap.13.2.5. Se poate deduce că proiecția în planul orizontal  $Oxy$  a pendulului sferic se rotește cu viteză areolară constantă.

Valoarea constantei ariilor se poate deduce din condițiile inițiale, respectiv din momentul lansării pendulului sferic:

$$C = (r\dot{\varphi} \cdot r)_0 = (v_n)_0 \cdot l \sin \theta_0 \quad (13.217)$$

Din relația (13.216) se pot pune în evidență derivatele în raport cu timpul ale unghiului  $\varphi$  care vor depinde atât de constanta  $C$  cât și de unghiul  $\theta$ :

$$\dot{\varphi} = \frac{C}{r^2} = \frac{C}{l^2 \sin^2 \theta} \quad (13.218) \quad \ddot{\varphi} = -\frac{2C}{l^2} \cdot \frac{\cos \theta}{\sin^3 \theta} \cdot \dot{\theta} \quad (13.219)$$

S-a obținut astfel prima ecuație diferențială a mișcării pendulului sferic.

Pentru a obține a doua ecuație este mai simplu să se apeleze în cazul de față la metoda energiei, bazată pe teorema energiei cinetice sub forma:

$$dE = dL \quad \rightarrow \quad \frac{dE}{dt} = \frac{dL}{dt} \quad (13.220)$$

În această relație energia cinetică într-o poziție oarecare este:

$$E = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (v_t^2 + v_n^2) = \frac{1}{2} m [(l\dot{\theta})^2 + (l \sin \theta \cdot \dot{\varphi})^2] \quad (13.221)$$

Se înlocuiește  $\dot{\varphi}$  cu (13.218) și se derivează expresia obținută în raport cu timpul:

$$\frac{dE}{dt} = m l^2 \dot{\theta} \left( \ddot{\theta} - \frac{C^2}{l^4} \cdot \frac{\cos \theta}{\sin^3 \theta} \right) \quad (13.222)$$

Dintre cele două forțe aplicate pendulului, numai greutatea dă lucru mecanic deoarece deplasarea după direcția tensiunii este nulă dacă firul este întins. Lucrul mecanic elementar al greutății, ținând cont și de sensul axei  $Oz$ , este:

$$dL = mg \cdot dz = mg \cdot d(l \cos \theta) = -mgl \sin \theta \cdot d\theta \quad (13.223)$$

Se obține pentru derivata în raport cu timpul a lucrului mecanic expresia:

$$\frac{dL}{dt} = -mgl \sin \theta \cdot \dot{\theta} \quad (13.224)$$

Se fac înlocuirile în (13.220) și se obține cea de a doua ecuație diferențială a mișcării pendulului sferic:

$$\ddot{\theta} = \frac{C^2}{l^4} \cdot \frac{\cos \theta}{\sin^3 \theta} - \frac{g}{l} \sin \theta \quad (13.225)$$

Integrarea sistemului format din ecuațiile diferențiale de ordinul II (13.219) și (13.225) în vederea găsirii soluțiilor  $\varphi = \varphi(t)$  și  $\theta = \theta(t)$  este posibilă numai pe cale numerică. Se poate observa că în ambele ecuații diferențiale nu intervine masa  $m$  a pendulului și deci nu influențează mișcarea acestuia.

Se poate pune în evidență faptul că ecuația (13.225) se poate integra numai parțial pe cale analitică; astfel, dacă se înmulțește această ecuație cu  $2\dot{\theta}$ , se obține prin integrare:

$$\dot{\theta}^2 = -\frac{C^2}{l^4} \cdot \frac{1}{\sin^2 \theta} + \frac{2g}{l} \cos \theta + C_1 \quad (13.226)$$

Constanta de integrare  $C_1$  se determină punând condițiile inițiale:

$$t=0 \rightarrow (\theta)_0 = \theta_0, \quad (\dot{\theta})_0 = \frac{(v_t)_0}{l} \quad (13.227)$$

Ținând cont și de expresia (13.217) a constantei  $C$  se obține:

$$C_1 = \frac{(v_t)_0^2}{l^2} + \frac{(v_n)_0^2}{l^2} - \frac{2g}{l} \cos\theta_0 = \frac{v_0^2}{l^2} - \frac{2g}{l} \cos\theta_0 \quad (13.228)$$

în care  $v_0$  este viteza inițială a pendulului. Înlocuind în (13.226) se determină:

$$\dot{\theta} = \pm \sqrt{\frac{v_0^2}{l^2} - \frac{C^2}{l^4} \cdot \frac{l}{\sin^2 \theta} + \frac{2g}{l} (\cos\theta - \cos\theta_0)} \quad (13.229)$$

Această ecuație diferențială de ordinul I nu se poate integra în continuare pe cale analitică.

Aparent, mișcarea pendulului sferic s-ar putea studia prin integrarea numerică a sistemului de ecuații diferențiale de ordinul I format din ecuațiile (13.218) și (13.229). Dificultatea se datorează în special formei patratice a vitezei  $v_0$ , formă care alterează condițiile inițiale. Relația (13.229) este totuși utilă la determinarea tensiunii în firul pendulului sferic.

Tensiunea din firul pendulului se poate calcula proiectând relația specifică metodei impulsului pe direcția firului (fig.13.31, a):

$$ma_\rho = T - mg \cos\theta \quad (13.230)$$

Se înlocuiește  $a_\rho$  cu expresia din (13.212) și rezultă pentru tensiune relația:

$$T = ml (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) + mg \cos\theta \quad (13.231)$$

Dacă în această relație se înlocuiesc în continuare  $\dot{\varphi}$  și  $\dot{\theta}$  cu expresiile obținute mai înainte se obține:

$$T = \frac{mv_0^2}{l} + mg(3 \cos\theta - 2 \cos\theta_0) \quad (13.232)$$

Trebuie făcută observația că atunci când firul pendulului este întins, tensiunea este pozitivă. Dacă în timpul mișcării ea devine negativă, se deduce că firul nu mai este întins iar ecuațiile diferențiale ale mișcării, stabilite mai sus, nu mai sunt valabile; pendulul își continuă mișcarea ca un punct material liber acționat numai de greutate iar parametrii cinematici din momentul în care tensiunea a devenit nulă vor servi drept condiții inițiale pentru noua lege de mișcare.

Față de tratarea analitică clasică prezentată mai sus, ecuațiile diferențiale ale mișcării pendulului sferic pot fi obținute cu mai multă ușurință prin utilizarea metodei impulsului. Se proiectează pe axele  $\rho, t, n$  relația vectorială specifică:

$$m\bar{a} = \bar{G} + \bar{T} \quad (12.233) \quad \begin{cases} ma_\rho = T - G \cos\theta \\ ma_t = -G \sin\theta \\ ma_n = 0 \end{cases} \quad (13.234)$$

Ținând cont de relațiile (13.212), se obține:

$$\begin{cases} m(l\dot{\theta}^2 + l\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) = T - mg \cos \theta \\ m(l\ddot{\theta} - l\dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta) = -mg \sin \theta \\ m(l\ddot{\varphi} \sin \theta + 2l\dot{\theta}\dot{\varphi} \cos \theta) = 0 \end{cases} \quad (13.235)$$

Din aceste relații se explicitează ecuațiile diferențiale ale mișcării:

$$\ddot{\theta} = \left( \dot{\varphi}^2 \cos \theta - \frac{g}{l} \right) \sin \theta \quad (13.236)$$

$$\ddot{\varphi} = -2\dot{\theta}\dot{\varphi} \operatorname{ctg} \theta \quad (13.237)$$

și relația pentru calculul tensiunii în firul pendulului:

$$T = ml \left( \dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta \right) + mg \cos \theta \quad (13.238)$$

### b) Mișcarea pendulului sferic în mediu rezistent

Rezistența mediului se concretizează printr-o forță care este proporțională cu viteza de deplasare, are direcția ei și este îndreptată în sens invers acesteia. În relația de definiție :

$$\bar{R} = -km\bar{v} \quad (13.239)$$

constanta  $k [s^{-1}]$  este un factor de proporționalitate. La pendulul sferic viteza este conținută în planul tangent determinat de direcțiile  $t$  și  $n$ , astfel că proiecțiile ei pe axele locale  $\rho, t, n$  (fig.13.32) vor fi:

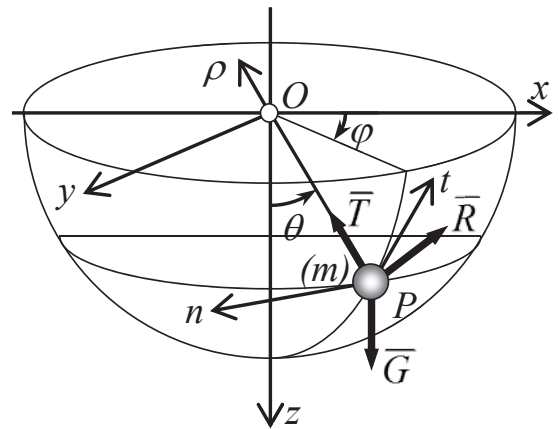


Fig.13.32

$$\begin{cases} R_{\rho} = 0 \\ R_t = -kmv_t = -kml\dot{\theta} \\ R_n = -kmv_n = -kml\dot{\varphi} \sin \theta \end{cases} \quad (13.240)$$

Pentru stabilirea ecuațiilor de mișcare se utilizează metoda impulsului. Relația vectorială:

$$m\bar{a} = \bar{G} + \bar{T} + \bar{R} \quad (13.241)$$

se proiectează pe axele  $\rho, t, n$  și, ținând cont de relațiile (13.212), se obține:

$$\begin{cases} m(l\dot{\theta}^2 + l\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) = T - mg \cos \theta \\ m(l\ddot{\theta} - l\dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta) = -kml\dot{\theta} - mg \sin \theta \\ m(l\ddot{\varphi} \sin \theta + 2l\dot{\theta}\dot{\varphi} \cos \theta) = -kml\dot{\varphi} \sin \theta \end{cases} \quad (13.242)$$

Din aceste relații se explicitează ecuațiile diferențiale ale mișcării:

$$\ddot{\theta} = \left( \dot{\varphi}^2 \cos \theta - \frac{g}{l} \right) \sin \theta - k\dot{\theta} \quad (13.243)$$

$$\ddot{\varphi} = -2\dot{\theta}\dot{\varphi} \operatorname{ctg} \theta - k\dot{\varphi} \quad (13.244)$$

și relația pentru calculul tensiunii în firul pendulului:

$$T = ml(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) + mg \cos \theta \quad (13.245)$$

Se observă că forma relația pentru calculul tensiunii în fir este aceeași ca și în cazul mișcării în mediu nerezistent.

Integrarea celor două ecuații diferențiale ale mișcării este posibilă numai pe cale numerică.

### 13.3.4 Pendulul matematic

Pendulul matematic poate fi tratat drept un caz particular al pendulului sferic, în care mișcarea are loc într-un plan vertical fix. Dacă în demonstrația din capitolul precedent se introduce  $\varphi = \text{const.}$ , atunci  $\dot{\varphi} = \ddot{\varphi} = 0$ ,  $v_n = 0$ ,  $a_n = 0$ ,  $C = 0$  și relațiile (13.225), (13.229) devin:

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin \theta \quad (13.246)$$

$$\dot{\theta} = \omega = \pm \sqrt{\frac{v_0^2}{l^2} + \frac{2g}{l}(\cos \theta - \cos \theta_0)} \quad (13.247)$$

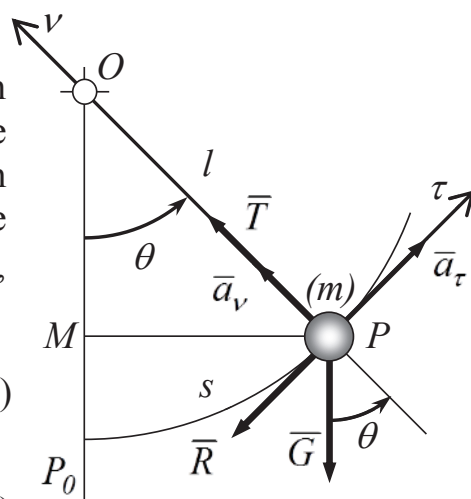


Fig.13.33

S-a notat prin  $\omega$  viteza unghiulară a mișcării circulare a pendulului. Relația (13.231) pentru calculul tensiunii devine:

$$T = ml \dot{\theta}^2 + mg \cos \theta \quad (13.248)$$

Relația (13.232) își păstrează forma:

$$T = \frac{mv_0^2}{l} + mg(3 \cos \theta - 2 \cos \theta_0) \quad (13.249)$$

cu observația că din calculul vitezei inițiale  $v_0$  lipsește componenta  $v_n$ .

Pendulul matematic poate fi studiat într-un mod elegant și prin aplicarea metodei impulsului într-un sistem de coordonate Frenet (fig.13.33). În cazul în care mișcarea acestuia are loc într-un mediu care nu opune rezistență la deplasare, se obțin cu ușurință relațiile de mai sus. Coordonata intrinsecă este lungimea arcului de cerc față de poziția de echilibru a pendulului:

$$s = \text{arc } P_0P = l\theta \quad \dot{s} = l\dot{\theta} \quad \ddot{s} = l\ddot{\theta} \quad (13.250)$$

Centrul de curbură al traiectoriei este punctul de suspendare  $O$  iar raza de curbură este lungimea firului pendulului, respectiv  $\rho = l$ .

Dacă mișcarea pendulului are loc într-un mediu rezistent, pe lângă forțele  $\bar{G}$  și  $\bar{T}$  mai intervine și o forță de rezistență proporțională și coliniară cu viteza pendulului, în sens invers acesteia:

$$\bar{R} = -km\bar{v} \rightarrow v = \dot{s} = l\dot{\theta} \rightarrow R = -km l\dot{\theta} \quad (13.251)$$

în care  $k$  este o constantă de proporționalitate. Se aplică metoda impulsului pe direcțiile  $\tau$  și  $\nu$ .



$$ma_{\tau} = m\dot{s} = \sum F_{\tau} \quad ma_{\nu} = m \frac{\dot{s}}{\rho} = \sum F_{\nu} \quad (13.252)$$

și rezultă ecuațiile diferențiale ale mișcării:

$$\begin{cases} ml\ddot{\theta} = -mg \sin \theta - kml\dot{\theta} \\ ml\dot{\theta}^2 = T - mg \cos \theta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \ddot{\theta} + k\dot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin \theta & (1) \\ T = ml\dot{\theta}^2 + mg \cos \theta & (2) \end{cases} \quad (13.253)$$

Legea de mișcare  $\theta = \theta(t)$  se poate determina numai pe cale numerică pornind de la ecuația diferențială a mișcării (1). Spre deosebire de celelalte situații analizate, în cazul de față nu se poate explicita  $\dot{\theta}$  astfel că tensiunea din fir se va putea determina pe cale numerică cu ecuația (2) odată cu integrarea ecuației de mișcare.

Observațiile făcute la pendulul sferic referitor la tensiunea în fir își păstrează valabilitatea și în cazul pendulului matematic.

### 13.3.5 Micile oscilații ale pendulului matematic

Un caz special este cel al micilor oscilații ale pendulului matematic în jurul poziției de echilibru în care valoarea maximă a unghiului  $\theta$  este  $|\theta_{max}| = 5..6^{\circ}$ . Pentru aceste valori se poate face aproximația  $\sin \theta \cong \theta$  (în radiani) și ecuația diferențială a mișcării va lua forma:

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin \theta \quad \rightarrow \quad \ddot{\theta} + p^2 \theta = 0 \quad (13.254)$$

în care s-a introdus notația:

$$p^2 = g/l \quad (13.255)$$

Soluția acestei ecuații diferențiale omogene de ordinul II este:

$$\theta = A \sin(pt + \varphi) \quad (13.256) \quad \dot{\theta} = Ap \cos(pt + \varphi) \quad (13.257)$$

Se recunoaște o oscilație armonică sinusoidală în care  $A$  este amplitudinea,  $\varphi$  este faza inițială iar  $p$  este pulsația<sup>\*)</sup>. Pentru condițiile inițiale:

$$t = 0 \quad \rightarrow \quad (\theta)_0 = \theta_0, \quad (\dot{\theta})_0 = \frac{v_0}{l} \quad (13.258)$$

se determină din relațiile de mai sus constantele de integrare:

$$A = \sqrt{\left(\frac{v_0}{pl}\right)^2 + \theta_0^2} = \sqrt{\frac{v_0^2}{gl} + \theta_0^2} \quad (13.259)$$

$$\varphi = \arctg \frac{pl\theta_0}{v_0} = \arctg \left( \frac{\theta_0}{v_0} \sqrt{gl} \right) \quad (13.260)$$

\*) Pulsația s-a notat prin  $p$  pentru a se evita confuzia cu viteza unghiulară  $\omega$  a mișcării circulare a pendulului; pentru mișcarea oscilatorie a se vedea capitolul următor.

Din analiza relației (13.259) se deduce că lansând pendulul din poziția  $\theta_0$  fără viteză inițială, amplitudinea va fi  $A = \theta_0$ .

Punând condiția  $|A| \leq |\theta_{max}|$  se găsește că pentru a avea mici oscilații este necesar ca:

$$|v_0| \leq \sqrt{gl(\theta_{max}^2 - \theta_0^2)} \quad (13.261)$$

cu condiția evidentă ca  $|\theta_0| \leq |\theta_{max}|$ .

**Problema 13.5** Să se alcătuiască un program general MATLAB pentru studiul mișcării pendulului în condițiile analizei teoretice din capitolele precedente.

Date numerice:  $m = 1 \text{ kg}$ ,  $l = 1 \text{ m}$ ,  $\varphi_0 = 0^\circ$ ,  $\theta_0 = 60^\circ$ ,  $(v_n)_0 = 2 \text{ m/s}$ ,

$$(v_t)_0 = -2 \text{ m/s}; k = 0.18 \text{ s}^{-1}$$

Rezolvare: Valorile inițiale ale derivatelor unghiurilor  $\varphi$  și  $\theta$  se stabilesc pornind de la relațiile (13.210):

$$(\dot{\varphi})_0 = \frac{(v_n)_0}{l \sin \theta_0} \quad (13.262) \quad (\dot{\theta})_0 = \frac{(v_t)_0}{l} \quad (13.263)$$

Se observă că ecuațiile diferențiale:

$$\ddot{\theta} = (\dot{\varphi}^2 \cos \theta - \frac{g}{l}) \sin \theta - k \dot{\theta} \quad (13.264) \quad \ddot{\varphi} = -2\dot{\theta}\dot{\varphi} \text{ctg} \theta - k \dot{\varphi} \quad (13.265)$$

stabilite pentru pendulul sferic, pot fi utilizate și pentru pendulul matematic dacă se impune condiția inițială  $(v_n)_0 = 0$ , astfel ca mișcarea să aibă loc numai într-un plan vertical. Aceleași ecuații pot fi utilizate și pentru mișcarea în mediu nerezistent punând condiția  $k = 0$ . Pentru tensiunea în firul pendulului se utilizează în toate situațiile relația:

$$T = ml(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) + mg \cos \theta \quad (13.266)$$

Pe baza ecuațiilor de mai sus se alcătuiesc vectorul soluțiilor  $\mathbf{z}$  și cel al derivatelor **dery**:

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \theta \\ \varphi \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} \quad (13.267) \quad \mathbf{dery} = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \\ (\dot{\varphi}^2 \cos \theta - g/l) - k \dot{\theta} \\ -2\dot{\theta}\dot{\varphi} \text{ctg} \theta - k \dot{\varphi} \end{bmatrix} \quad (13.268)$$

Ținând cont de relațiile (13.262) și (13.263), vectorul condițiilor inițiale va fi:

$$\mathbf{z0} = \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \varphi_0 \\ (\dot{\theta})_0 \\ (\dot{\varphi})_0 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \varphi_0 \\ (v_t)_0/l \\ (v_n)_0/(l \sin \theta_0) \end{bmatrix} \quad (13.269)$$

Se observă că nu are sens perechea de condiții inițiale  $\theta_0 = 0$  și  $(v_n)_0 = 0$  care conduce la o nedeterminare în cazul pendulului sferic. Variabila independentă este timpul care ia valori într-un interval  $[t_{min}, t_{max}]$  stabilit prin încercări.

După efectuarea integrării numerice se reprezintă traiectoria pendulului proiectată în plan orizontal în coordonatele polare  $r$  și  $\varphi$  (cap.13.3.3); se reprezintă și proiecția traiectoriei în planul vertical  $xOz$ . Se utilizează relațiile:

$$r = l \cos \theta \quad x = r \cos \varphi \quad z = l \sin \theta \quad (13.270)$$

Se reprezintă de asemenea diagramele  $\theta = \theta(t)$  și  $T = T(t)$ . Pentru pendulul matematic se reprezintă numai aceste două diagrame.

Programul MATLAB este conținut în fila **P13\_5.m** iar funcțiile de evaluare a derivatelor sunt incluse în fila **pendul.m**.

```

P13_5.m
% PENDULUL SFERIC
clear; close all;
global K A;
g=9.80665;
% DATE NUMERICE
m=1; l=1;
fi0=0; teta0=60*pi/180;
vn0=2; vt0=-2; K=0.18;
% CONSTANTE
A=g/l;
% INTERVALUL DE INTEGRARE
tmin=0; tmax=10;
timp=[tmin, tmax];
% CONDITIILE INITIALE
tetap0=vt0/l;
if teta0==0
    fip0=0;
else
    fip0=vn0/(l*sin(teta0));
end
z0=[teta0, fi0, tetap0, fip0];
% INTEGEAREA
[t,z]=ode45('pendul',timp,z0);
% REZULTATE
teta=z(:,1);
fi=z(:,2);
tetap=z(:,3);
fip=z(:,4);
n=length(t);

for i=1:n
    r(i)=l*sin(teta(i));
    x(i)=r(i)*cos(fi(i));
    zz(i)=-l*cos(teta(i));
    T(i)=m*l*(tetap(i)^2+(fip(i)*sin(teta(i)))^2)
        +m*g*cos(teta(i));
end
% GRAFICA
if vn0~=0
    figure(1); polar(-fi',r);grid;
    figure(2); plot(x,zz); grid;axis equal;
    figure(3); plot(t,teta*180/pi); grid;
    figure(4); plot(t,T);grid;
else
    figure(1); plot(t,teta*180/pi);grid;
    figure(2); plot(t,T);grid;
end

pendul.m
function dery=pendul(t,z);
global K A;
teta=z(1);
fi=z(2);
tetap=z(3);
fip=z(4);
tetapp=(fip^2*cos(teta)-A)*sin(teta)-K*tetap;
if teta==0
    fipp=0;
else
    fipp=-2*fip*tetap*cot(teta)-K*fip;
end
dery=[tetap; fip; tetapp; fipp];

```

*a) Pendulul sferic în mediu nerezistent ( $v_n \neq 0, k = 0$ )*

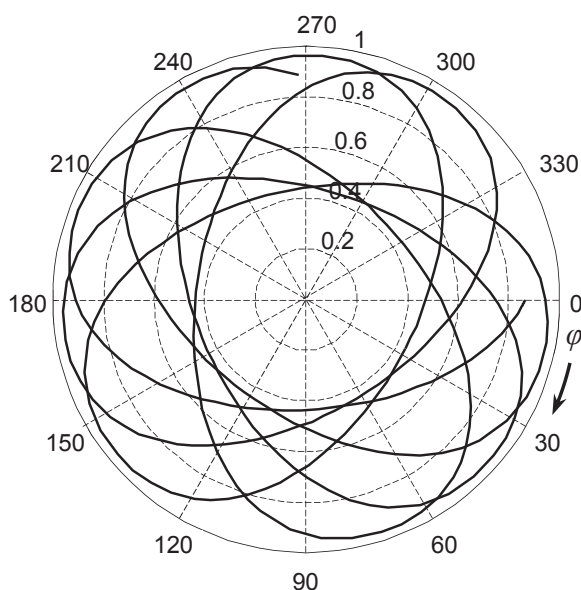


Fig.13.34

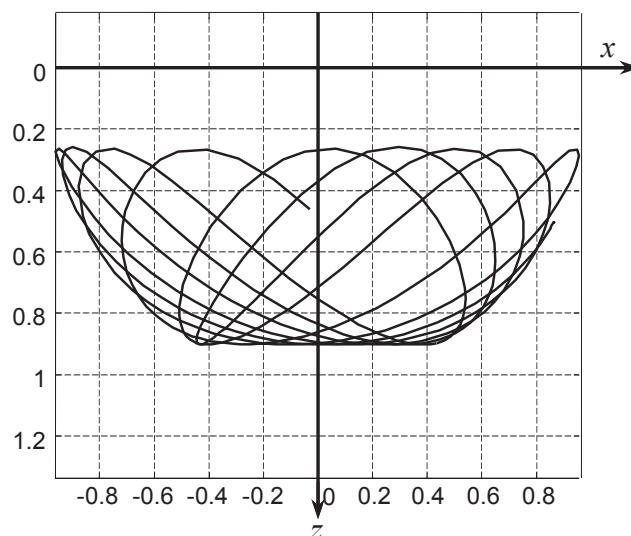


Fig.13.35

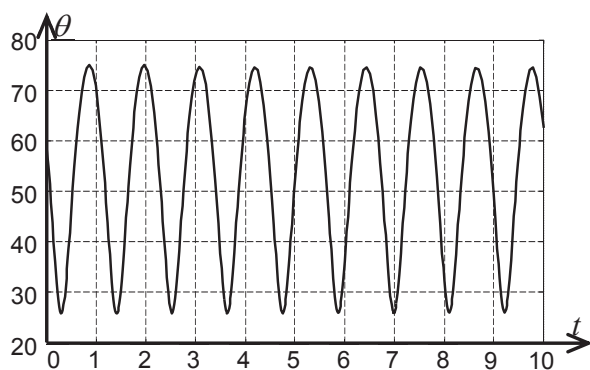


Fig.13.36

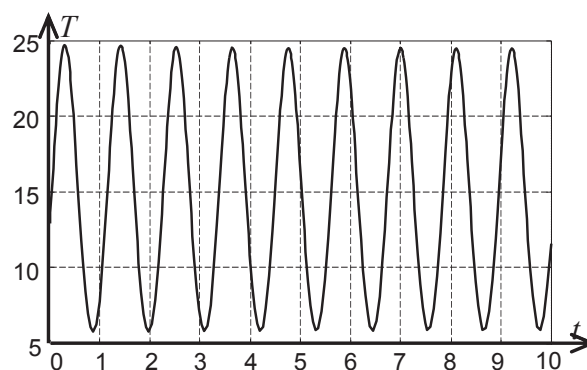


Fig.13.37

Observații:

- mișcarea pendulului sferic în mediu nerezistent nu este limitată în timp;
- traiectoria sferică a pendulului este conținută între două plane orizontale; cotele acestora corespund limitelor superioară și inferioară ale unghiului  $\theta$  evidențiate în fig.13.36 (pe cale analitică aceste valori s-ar putea obține punând condiția  $\dot{\theta} = 0$  în rel.13.263 și căutând soluțiile ecuației în intervalul  $0, \pi$ );
- tensiunea în firul pendulului (fig.13.37) oscilează în antifază cu unghiul  $\theta$ , fiind maximă atunci când acesta este minim.

b) Pendulul sferic în mediu rezistent ( $v_n \neq 0, k \neq 0$ )

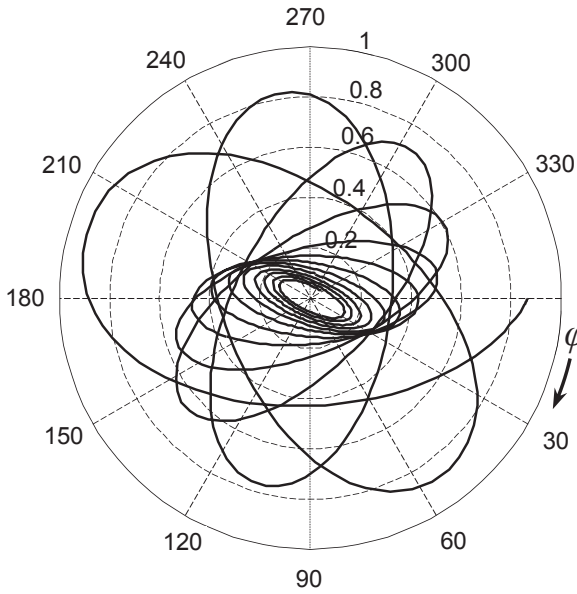


Fig.13.38

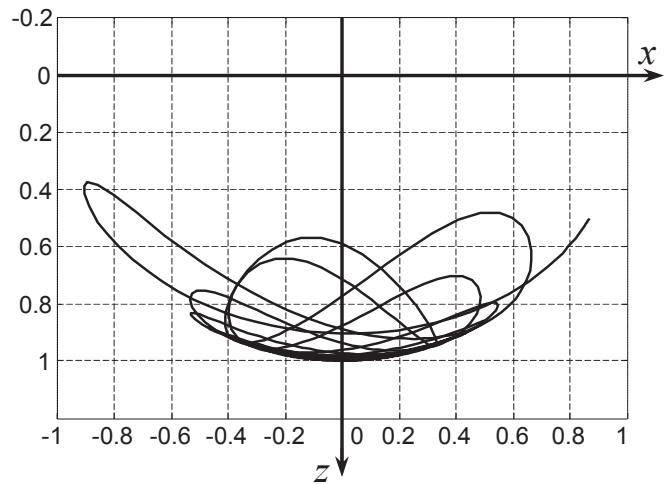


Fig.13.39

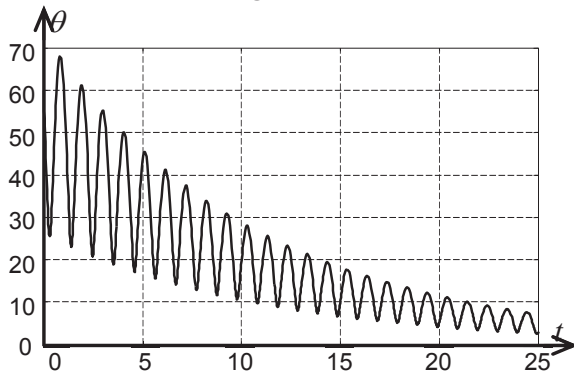


Fig.13.40

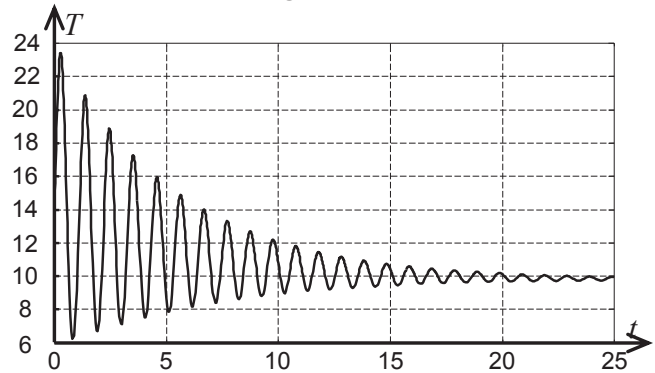


Fig.13.41

Observații:

– mișcarea pendulului sferic în mediu rezistent se amortizează în timp;  
 – amplitudinea oscilației în planul vertical descrește succesiv, pendulul tinde asimptotic către poziția de echilibru verticală;

– tensiunea în firul pendulului oscilează în antifază cu unghiul  $\theta$ ; amplitudinea tensiunii descrește succesiv, ajungând la limită să fie egală cu greutatea  $mg$  a masei pendulului.

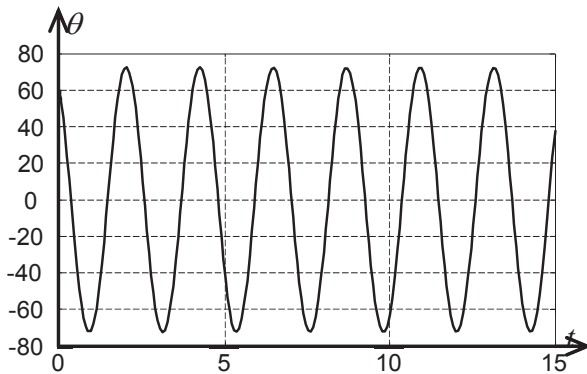
c) Pendulul matematic în mediu nerezistent ( $v_n = 0, k = 0$ )

Fig.13.42

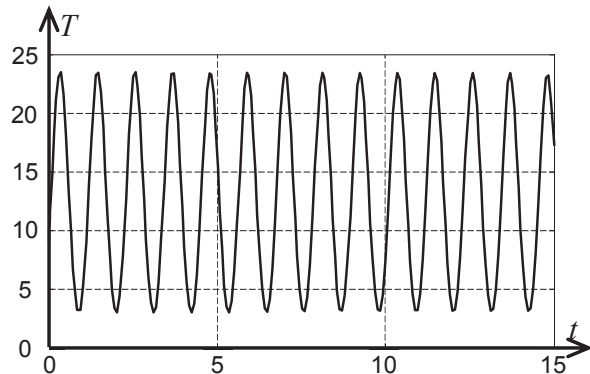


Fig.13.43

Observații:

– mișcarea pendulului matematic în mediu nerezistent este o oscilație periodică nearmonică, nelimitată în timp;

– tensiunea în fir este maximă pentru  $\theta = 0$ , respectiv în poziția verticală a pendulului, și minimă în pozițiile extreme.

*c) Pendulul matematic în mediu rezistent ( $v_n = 0, k \neq 0$ )*

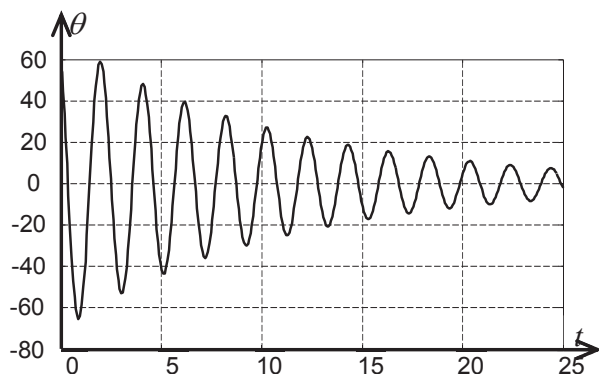


Fig.13.44

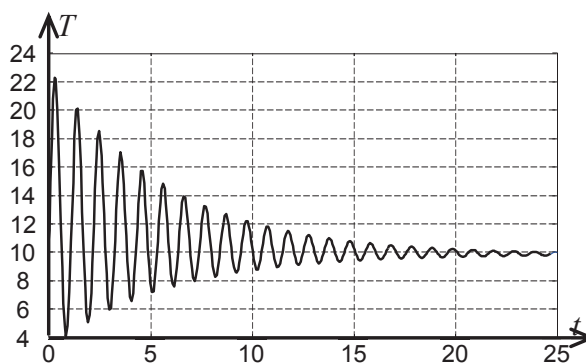


Fig.13.45

Observații:

– mișcarea pendulului în mediu rezistent este o oscilație nearmonică care se amortizează în timp; amplitudinea descrește asimptotic către poziția verticală de echilibru;

– amplitudinea tensiunii în fir scade succesiv, la limită fiind egală cu greutatea  $mg$  a masei pendulului.

## 14. DINAMICA MIȘCĂRII OSCILATORII A PUNCTULUI MATERIAL

### 14.1 Generalități

Mișcarea oscilatorie a punctului material se studiază de obicei într-un domeniu mai larg, acela al *Vibrațiilor Mecanice*. Se consideră utilă introducerea acestui capitol în contextul studiului dinamic general al punctului material, ca aplicație la stabilirea ecuațiilor diferențiale ale mișcării și la integrarea analitică și numerică a acestora. Se vor trata numai oscilațiile liniare cu un grad de libertate ale unei mase asimilabilă unui punct material.

Oscilatorul reprezentat în fig.14.1 este compus dintr-o masă  $m$ , un arc spiral și un amortizor. Menționăm că amortizorul este un dispozitiv constituit de obicei dintr-un cilindru hidraulic la care fluidul poate trece de pe o parte pe

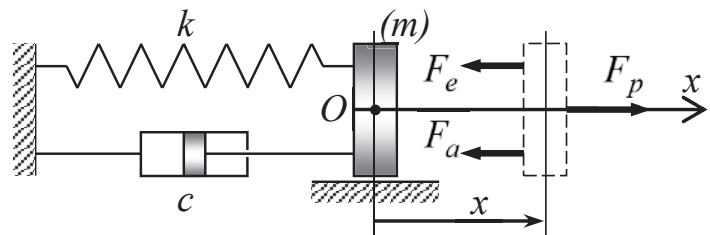


Fig.14.1

alta a pistonului prin niște orificii practice în acesta; rezistența opusă la deplasarea pistonului în cilindru este proporțională cu viteza lui.

Pentru studiu oscilatorul a fost dispus în poziție orizontală, astfel încât greutatea proprie a elementelor componente să nu influențeze mișcarea. Deplasării rectilinii a masei  $m$  i se atașează o axă  $Ox$  cu originea în poziția în care arcul nu este întins sau comprimat. În cazul general, la o distanță  $x$  față de origine, asupra masei acționează următoarele forțe coliniare cu deplasarea: forța elastică  $F_e$  exercitată de arc, rezistența  $F_a$  opusă de amortizor, forță perturbatoare  $F_p$  având o variație armonică. Definițiile acestor forțe sunt:

$$F_e = -kx \quad (14.1) \quad F_a = -cv = -c\dot{x} \quad (14.2) \quad F_p = F_0 \cos pt \quad (14.3)$$

În aceste relații  $k$  [ $N/m$ ] este constanta arcului,  $c$  [ $Ns/m$ ] este constanta amortizorului,  $F_0$  [ $N$ ] este amplitudinea forței perturbatoare iar  $p$  [ $s^{-1}$ ] este pulsația acesteia<sup>\*)</sup>.

Teorema impulsului aplicată pe direcția  $Ox$  are forma:

$$m\ddot{x} = F_e + F_a + F_p \quad \rightarrow \quad m\ddot{x} = -kx - c\dot{x} + F_0 \cos pt \quad (14.4)$$

Se împarte cu masa  $m$  și se ordonează termenii după ordinul derivatelor:

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega^2 x = q \cos pt \quad (14.5)$$

în care s-au introdus notațiile:

$$\alpha = \frac{c}{2m} \quad (14.6) \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (14.7) \quad q = \frac{F_0}{m} \quad (14.8)$$

<sup>\*)</sup> În cadrul acestui capitol se vor nota prin  $p$  pulsația forței perturbatoare și prin  $\omega$  pulsația proprie a oscilatorului, în acord cu cele stabilite în cap.9.3.4 referitor la cinematica oscilațiilor armonice



Relația (14.5) reprezintă o ecuație diferențială liniară (necunoscuta  $x$  și derivatele ei sunt la puterea întâia); prin integrarea ei se obține legea de mișcare a oscilatorului.

Cu observația că  $\omega \neq 0$ , oscilațiile liniare ale punctului material se pot clasifica în funcție de constantele  $\alpha$  și  $q$  după cum urmează:

$\alpha = 0, q = 0$  – oscilații libere fără amortizare;

$\alpha \neq 0, q = 0$  – oscilații libere cu amortizare;

$\alpha = 0, q \neq 0$  – oscilații forțate fără amortizare;

$\alpha \neq 0, q \neq 0$  – oscilații forțate cu amortizare.

Ecuatiile diferențiale specifice fiecărui model de oscilație pot fi obținute prin particularizarea ecuației generale (14.5). Soluția analitică se poate evidenția distinct în funcție de tipul ecuației diferențiale obținută. Integrarea numerică se poate face însă pornind de la cazul general și acordând constantelor  $\alpha$  și  $q$  valorile specificate mai sus.

## 14.2 Oscilații libere fără amortizare

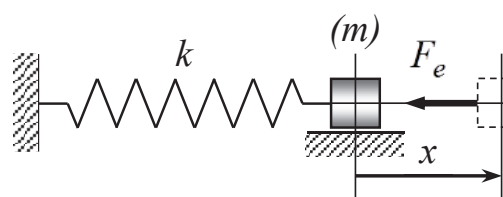


Fig.14.2

Oscilatorul este reprezentat în fig.14.2. Masa  $m$  este scoasă din poziția de echilibru și este lăsată să se miște numai sub acțiunea forței elastice. Ecuația diferențială a mișcării este:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad (14.9)$$

Se recunoaște o ecuație diferențială omogenă cu coeficienți constanți. Se detaliază în continuare modul de integrare analitică a acesteia.

Se alege o soluție având forma și derivatele următoare:

$$x = C e^{rt} \neq 0 \quad \dot{x} = C r e^{rt} \quad \ddot{x} = C r^2 e^{rt} \quad (14.10)$$

Se fac înlocuirile în (14.9) și se determină rădăcinile ecuației caracteristice:

$$C e^{rt} (r^2 + \omega^2) = 0 \rightarrow (r^2 + \omega^2) = 0 \rightarrow r_{1,2} = \pm i\omega \quad (14.11)$$

Se obține *forma întâia* a soluției:

$$x = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t} \quad (14.12)$$

în care  $C_1$  și  $C_2$  sunt constante de integrare complexe. Relațiile lui Euler:

$$\begin{cases} e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t \\ e^{-i\omega t} = \cos \omega t - i \sin \omega t \end{cases} \quad (14.13)$$

permit să se obțină *forma a doua* a soluției:

$$x = (C_1 + C_2) \cos \omega t + i(C_1 - C_2) \sin \omega t = a \cos \omega t + b \sin \omega t \quad (14.14)$$

în care  $a = C_1 + C_2$  și  $b = i(C_1 - C_2)$  sunt constante de integrare reale. *Forma a treia* a soluției se obține făcând mai sus înlocuirile  $a = A \sin \varphi$  și  $b = A \cos \varphi$ :

$$x = A(\sin \varphi \cos \omega t + \cos \varphi \sin \omega t) = A \sin(\omega t + \varphi) \quad (14.15)$$

$$v = \dot{x} = A \omega \cos(\omega t + \varphi) \quad (14.16)$$

Se recunoaște în această ultimă formă o oscilație armonică<sup>\*)</sup> în care termenii au fost definiți în cap.9.3.4. Se reamintește că  $A = x_{max}$  este amplitudinea,  $\Phi = \omega t + \varphi$  este faza oscilației iar  $\varphi$  este faza inițială. Mărimea  $\omega = \sqrt{k/m}$  este o caracteristică constructivă a oscilatorului și este denumită *pulsatia proprie* a acestuia. Perioada și frecvența oscilațiilor:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad (14.17) \quad f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \quad (14.18)$$

sunt deasemenea niște caracteristici constructive ale oscilatorului.

Amplitudinea și faza inițială se determină din condițiile inițiale:

$$t = 0 \rightarrow \begin{cases} x = x_0 \\ (\dot{x})_0 = v_0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_0 = A \sin \varphi \\ v_0 = A \omega \cos \varphi \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = \sqrt{x_0^2 + (v_0/\omega)^2} \\ \varphi = \arctg(x_0 \omega / v_0) \end{cases} \quad (14.19)$$

Ilustrarea grafică a oscilației libere neamortizate este dată în fig.14.3.

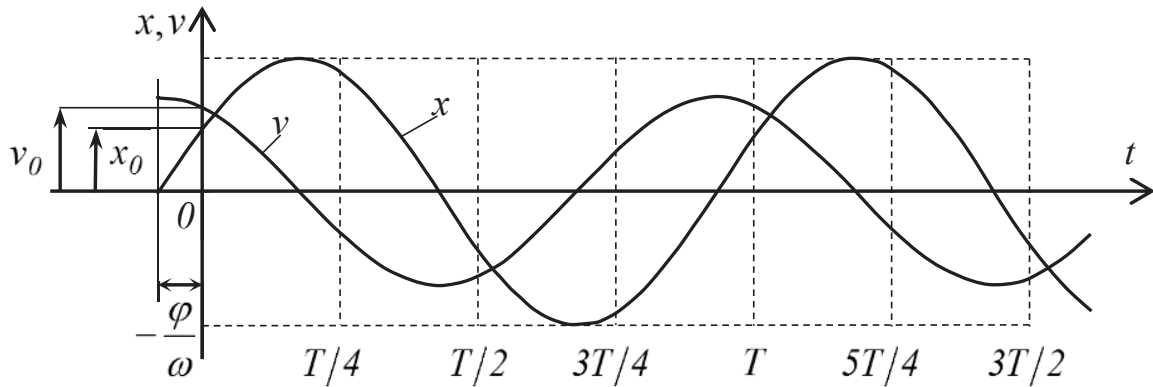


Fig.14.3

Dacă oscilatorul funcționează în poziție verticală (fig.14.4), asupra masei oscilante va acționa și greutatea proprie. Pornind de la ecuația (14.4) se deduce ecuația diferențială a mișcării:

$$ma = F_e + G \rightarrow m\ddot{y} = -ky + mg \rightarrow \ddot{y} + \omega^2 y = g \quad (14.20)$$

Ecuația obținută este neomogenă astfel că soluția este de forma:

$$y = y_{om} + y_p \quad (14.21)$$

Soluția ecuației omogene are forma (14.15), respectiv:

$$y_{om} = A \sin(\omega t + \varphi) \quad (14.22)$$

Pentru soluția particulară, care trebuie să verifice ecuația diferențială (14.20), se alege un polinom de aproximare în variabila  $t$ , având gradul cu o unitate mai mic decât ordinul ecuației diferențiale:

$$y_p = a_1 t + a_0 \rightarrow \dot{y}_p = a_1 \rightarrow \ddot{y}_p = 0 \quad (14.23)$$

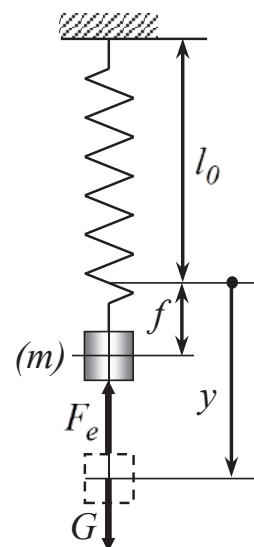


Fig.14.4

<sup>\*)</sup> Se reamintește că o funcție armonică se exprimă prin funcțiile trigonometrice *sin* sau *cos*.

$$\ddot{y}_p + \omega^2 y_p \equiv g \rightarrow \omega^2 (a_1 t + a_0) \equiv g \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_0 = g/\omega^2 \end{cases} \rightarrow y_p = \frac{g}{\omega^2} = \frac{mg}{k} = \frac{G}{k} = f \quad (14.24)$$

În relația obținută  $f = const.$  reprezintă deformația statică a arcului sub acțiunea greutății care se adaugă lungimii  $l_0$  din starea netensionată (fig.14.4). Soluția finală a ecuației diferențiale (14.20), respectiv:

$$y = A \sin(\omega t + \varphi) + f \quad (14.25)$$

pune în evidență faptul că, spre deosebire de poziția orizontală analizată mai înainte, în poziția verticală a oscilatorului oscilația armonică este translatată cu  $f$ , având loc în jurul poziției deformate a resortului. În mod curent în aplicații constanta  $f$  este suprimate prin translatare originii oscilațiilor în această poziție.

Rezultatul acestei analize este valabil și pentru celelalte tipuri de oscilații studiate în continuare.

### 14.3 Oscilații libere cu amortizare

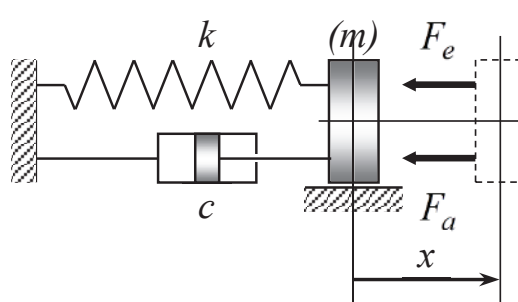


Fig.14.5

Ecuția diferențială a mișcării oscilatorului din fig.14.5 este:

$$\ddot{x} + 2\alpha \dot{x} + \omega^2 x = 0 \quad (14.26)$$

Se recunoaște și în acest caz o ecuație omogenă cu coeficienți constanți pentru care se alege deasemenea o soluție de forma (14.10) și se caută rădăcinile ecuației caracteristice:

$$r^2 + 2\alpha r + \omega^2 = 0 \rightarrow r_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega^2} \quad (14.27)$$

Soluția generală a ecuației (14.26) diferă în funcție de raportul dintre  $\alpha$  și  $\omega$ .

a)  $\alpha < \omega$  (amortizare slabă). Ecuația caracteristică are rădăcini complexe:

$$\beta = \sqrt{\omega^2 - \alpha^2} \quad (14.28) \quad r_{1,2} = -\alpha \pm i\beta \quad (14.29)$$

Soluția generală va fi în acest caz:

$$x = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} = C_1 e^{(-\alpha + i\beta)t} + C_2 e^{(-\alpha - i\beta)t} = e^{-\alpha t} (C_1 e^{i\beta t} + C_2 e^{-i\beta t}) \quad (14.30)$$

Expresia din paranteză are forma (14.12) a soluției întâlnită la oscilatorul fără amortizare; prin aceleași prelucrări se pot obține și celelalte două forme:

$$x = e^{-\alpha t} (a \cos \beta t + b \sin \beta t) \quad (14.31) \quad x = A e^{-\alpha t} \sin(\beta t + \varphi) \quad (14.32)$$

În aceste relații se recunoaște o oscilație armonică de pulsație  $\beta$  a cărei amplitudine descrește în timp (fig.14.6). Intervalul dintre două maxime succesive ale oscilației, numit *pseudoperioadă*, are expresia:

$$T_\beta = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - \alpha^2}} \quad (14.33)$$

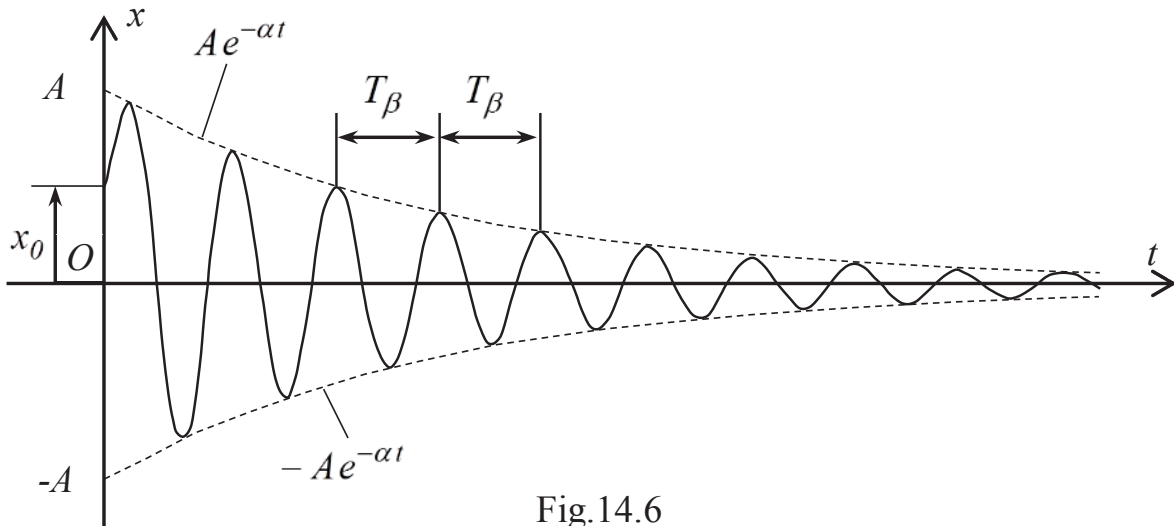


Fig.14.6

În fig.14.6 se poate observa că pentru amplitudinile succesive se pot trasa două curbe înfășurătoare a căror ecuație analitică este de forma:

$$\Phi(t) = \pm Ae^{-\alpha t} \quad (14.34)$$

Acestea sunt curbe exponențiale asimptotice la axa orizontală care ilustrează faptul că amplitudinea oscilației tinde către 0.

Raportul între două elongații situate la interval de o perioadă este constant:

$$\frac{x(t)}{x(t+T_\beta)} = \frac{Ae^{-\alpha t} \sin(\beta t + \varphi)}{Ae^{-\alpha(t+T_\beta)} \sin[\beta(t+T_\beta) + \varphi]} = \frac{1}{e^{-\alpha T_\beta}} = e^{2\pi\alpha/\beta} = \text{const.} \quad (14.35)$$

Elongațiile, și în mod evident și amplitudinile, distanțate prin  $T_\beta$  scad în progresie geometrică. Exponentul  $\delta = 2\pi\alpha/\beta$  poartă numele de *decrement logaritmic*.

Legea de mișcare integrală a oscilatorului este:

$$\begin{cases} x = Ae^{-\alpha t} \sin(\beta t + \varphi) \\ v = \dot{x} = Ae^{-\alpha t} [-\alpha \sin(\beta t + \varphi) + \beta \cos(\beta t + \varphi)] \end{cases} \quad (14.36)$$

Pentru calculul constantelor de integrare  $A$  și  $\varphi$  se introduc în legea de mișcare condițiile inițiale:

$$\begin{aligned} t=0 \rightarrow \begin{cases} x = x_0 \\ (\dot{x})_0 = v_0 \end{cases} &\rightarrow \begin{cases} x_0 = A \sin \varphi \\ v_0 = A(-\alpha \sin \varphi + \beta \cos \varphi) \end{cases} \rightarrow \\ &\rightarrow \begin{cases} A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0 + \alpha x_0}{\beta}\right)^2} \\ \varphi = \text{arctg}\left(\frac{\beta x_0}{v_0 + \alpha x_0}\right) \end{cases} \end{aligned} \quad (14.37)$$

b)  $\underline{\alpha = \omega}$  (*amortizare critică*) În acest caz rădăcinile ecuației caracteristice (14.27) sunt reale și egale:

$$r_1 = r_2 = r = -\alpha \quad (14.38)$$

Din teoria ecuațiilor diferențiale se cunoaște că în cazul unei ecuații de ordinul  $n$  la care ecuația caracteristică are  $n$  rădăcini egale, soluția are forma generală:

$$x = \sum_{k=0}^{n-1} C_k t^k e^{rt} = e^{rt} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} C_k t^k \quad (14.39)$$

în care  $C_k$  sunt constante de integrare. În cazul analizat  $n=2$  astfel că soluția ecuației (14.26) este:

$$\begin{cases} x = e^{-\alpha t} (C_0 + C_1 t) \\ v = \dot{x} = e^{-\alpha t} [C_1 - \alpha (C_0 + C_1 t)] \end{cases} \quad (14.40)$$

Analiza acestor relații pune în evidență faptul că oscilatorul are o mișcare neperiodică. Pentru  $t \rightarrow \infty$  prima relație de mai sus prezintă o nedeterminare; aceasta se rezolvă aplicând procedeul cunoscut din Analiza Matematică (regula lui l' Hôpital):

$$x = \frac{u}{v} = \frac{C_0 + C_1 t}{e^{\alpha t}} \rightarrow x_{\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\dot{u}}{\dot{v}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{C_1}{\alpha e^{\alpha t}} = \frac{C_1}{\infty} = 0 \quad (14.41)$$

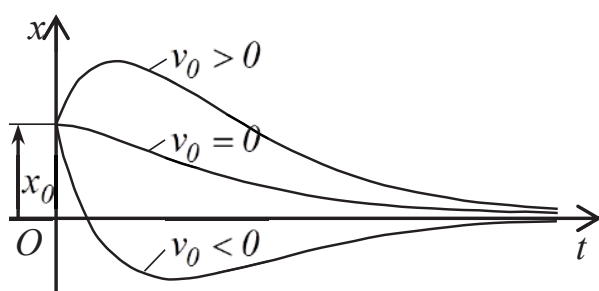


Fig.14.7

Se deduce pe această cale că elongația tinde către 0 odată cu creșterea timpului.

Legea de mișcare a oscilatorului amortizat este ilustrată în fig.14.7 în funcție de poziția și viteza inițială.

Constantele de integrare  $C_0$  și  $C_1$  se determină din condițiile inițiale:

$$t=0 \rightarrow \begin{cases} x = x_0 \\ (\dot{x})_0 = v_0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_0 = C_0 \\ v_0 = C_1 - \alpha C_0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C_0 = x_0 \\ C_1 = v_0 + \alpha x_0 \end{cases} \quad (14.42)$$

c)  $\alpha > \omega$  (amortizare puternică) Rădăcinile ecuației caracteristice (14.27) sunt reale și distincte, ambele fiind negative:

$$r_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega^2} = -\lambda_{1,2} \quad (\lambda_{1,2} > 0) \quad (14.43)$$

Soluția ecuației diferențiale (14.26) are în cazul unei amortizări puternice forma:

$$\begin{cases} x = C_1 e^{-\lambda_1 t} + C_2 e^{-\lambda_2 t} \\ v = \dot{x} = -\lambda_1 C_1 e^{-\lambda_1 t} - \lambda_2 C_2 e^{-\lambda_2 t} \end{cases} \quad (14.44)$$

Mișcarea oscilatorului este neperiodică, fiecare din aceste ecuații reprezentând o combinație de două exponențiale care tind asimptotic către 0.

Constantele de integrare se determină din condițiile inițiale:

$$t=0 \rightarrow \begin{cases} x = x_0 \\ (\dot{x})_0 = v_0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_0 = C_1 + C_2 \\ v_0 = -\lambda_1 C_1 - \lambda_2 C_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{v_0 + \lambda_2 x_0}{\lambda_2 - \lambda_1} \\ C_2 = -\frac{v_0 + \lambda_1 x_0}{\lambda_2 - \lambda_1} \end{cases} \quad (14.45)$$

În aceleași condiții inițiale cele două constante de integrare au semne diferite; aceasta indică existența unei diferențe între cele două exponențiale, fapt care accentuează rapiditatea amortizării. În fig.14.8 s-au reprezentat împreună, pentru comparație, variațiile în timp ale elongației și vitezei oscilatorului liber puternic amortizat.

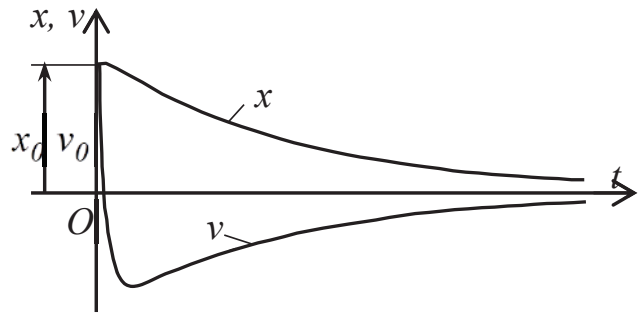


Fig.14.8

#### 14.4 Oscilații forțate fără amortizare

Mișcarea oscilatorului din fig.14.9 este descrisă de ecuația diferențială neomogenă:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = q \cos pt \quad (14.46)$$

a cărei soluție generală este de forma:

$$x = x_{om} + x_p \quad (14.47)$$

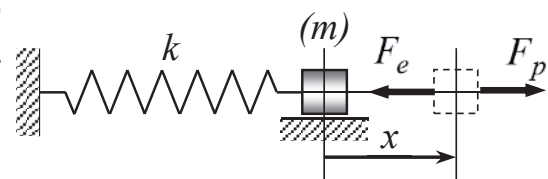


Fig.14.9

Pentru soluția ecuației omogene se preferă forma a doua, respectiv:

$$x_{om} = a \cos \omega t + b \sin \omega t \quad (14.48)$$

Soluția particulară are forma termenului liber:

$$x_p = C \cos pt \rightarrow \dot{x}_p = -Cp \sin pt \rightarrow \ddot{x}_p = -Cp^2 \cos pt \quad (14.49)$$

Din condiția ca aceasta să verifice ecuația (14.46) se determină constanta C:

$$-Cp^2 \cos pt + \omega^2 C \cos pt = q \cos pt \rightarrow C = \frac{q}{\omega^2 - p^2} \quad (14.50)$$

Soluția generală a ecuației diferențiale și derivata acesteia vor fi:

$$x = a \cos \omega t + b \sin \omega t + \frac{q}{\omega^2 - p^2} \cos pt \quad (14.51)$$

$$\dot{x} = -a\omega \sin \omega t + b\omega \cos \omega t - \frac{qp}{\omega^2 - p^2} \sin pt \quad (14.52)$$

Pentru calculul constantelor de integrare  $a$  și  $b$  se consideră că în momentul inițial oscilatorul se află în repaus în poziția de echilibru:

$$t = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ v = (\dot{x})_0 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = -\frac{q}{\omega^2 - p^2} \\ b = 0 \end{cases} \quad (14.53)$$

Cu această determinare soluția generală a ecuației de mișcare devine:

$$x = \frac{q}{\omega^2 - p^2} (\cos pt - \cos \omega t) \quad (14.54)$$

Se constată că mișcarea acestui model de oscilator se realizează prin suprapunerea a două oscilații armonice:

- o oscilație proprie de pulsație  $\omega$ ,
- o oscilație forțată de pulsație  $p$ .

Comportarea oscilatorului depinde de raportul dintre pulsațiile acestor oscilații.

*a) Cazul  $\omega \ll p$*  – Cele două pulsații au valori mult diferite una față de cealaltă. Amplitudinea comună este constantă:

$$A = \frac{q}{\omega^2 - p^2} \quad (14.55)$$

iar oscilația proprie și cea forțată vor avea formele:

$$x_\omega = A \cos \omega t \quad (14.56) \quad x_p = A \cos pt \quad (14.57)$$

Perioadele oscilațiilor sunt:

$$T_\omega = \frac{2\pi}{\omega} \quad (14.58) \quad T_p = \frac{2\pi}{p} \quad (14.59)$$

Se observă că  $T_\omega \gg T_p$ . Compunerea celor două oscilații este ilustrată în fig.14.10; se spune că în acest caz oscilația proprie este purtătoarea oscilației forțate.

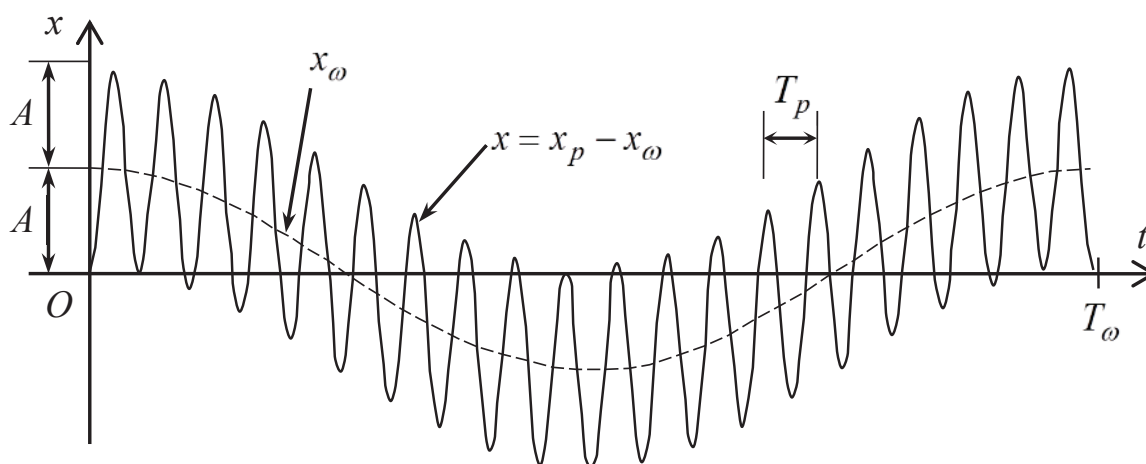


Fig.14.10

*b) Cazul  $\omega \gg p$*  – Acest caz este analog celui prezentat mai sus, cu diferența că de această dată oscilația forțată este purtătoarea oscilației proprii.

*c) Cazul  $\omega \approx p$*  – Cele două pulsații sunt apropiate ca valoare dar nu sunt egale. Prelucrând trigonometric relația (14.54) se obține:

$$x = \frac{2q}{\omega^2 - p^2} \sin\left(\frac{p - \omega}{2}t\right) \sin\left(\frac{p + \omega}{2}t\right) = A(t) \cdot \sin\left(\frac{p + \omega}{2}t\right) \quad (14.60)$$

Funcția armonică:

$$A(t) = \frac{2q}{\omega^2 - p^2} \sin\left(\frac{p - \omega}{2}t\right) \quad (14.61)$$

reprezintă amplitudinea variabilă a oscilatorului iar sinusoidalele  $A(t)$  și  $-A(t)$  sunt curbele înfășurătoare ale oscilației efective reprezentată în fig.14.11.



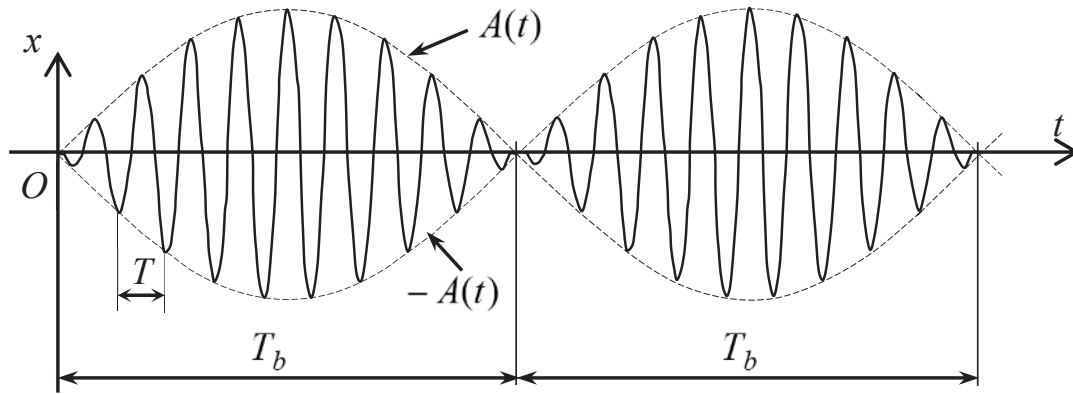


Fig.14.11

Se constată că mișcarea oscilatorului este compusă din intensificări și opriri succesive, fenomen cunoscut în Mecanică sub denumirea de „bătăi”. Perioada  $T_b$  a acestora este jumătate din cea a sinusoidei  $A(t)$  și este mult mai mare decât pseudoperioada  $T$  a oscilației propriuzise.

$$T = \frac{2 \cdot 2\pi}{p + \omega} \approx \frac{2\pi}{\omega} \quad (14.62)$$

$$T_b = \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot 2\pi}{p - \omega} = \frac{2\pi}{p - \omega} \quad (14.63)$$

d) Cazul  $\omega = p$  – Făcând înlocuirile în relația (14.54) se obține o nedeterminare. Pentru înlăturarea acesteia se folosește regula lui 1' Hôpital cu considerarea pulsației  $p$  drept variabilă:

$$x = \frac{u}{v} = \frac{q(\cos pt - \cos \omega t)}{\omega^2 - p^2} \rightarrow \quad (14.64)$$

$$\rightarrow x = \lim_{p \rightarrow \omega} \frac{u'}{v'} = \lim_{p \rightarrow \omega} \frac{-qt \sin pt}{-2p} = \frac{qt}{2\omega} \cdot \sin \omega t = A(t) \cdot \sin \omega t$$

Se observă că funcția liniară:

$$A(t) = \frac{qt}{2\omega} \quad (14.65)$$

reprezintă amplitudinea variabilă a oscilatorului iar dreptele  $A(t)$  și  $-A(t)$  mărginesc o mișcare sinusoidală cu pulsația proprie a acestuia (fig.14.12). Atunci când  $t \rightarrow \infty$  și amplitudinea oscilațiilor  $A(t) \rightarrow \infty$ ; fenomenul este cunoscut în Mecanică sub denumirea de „rezonanță”.

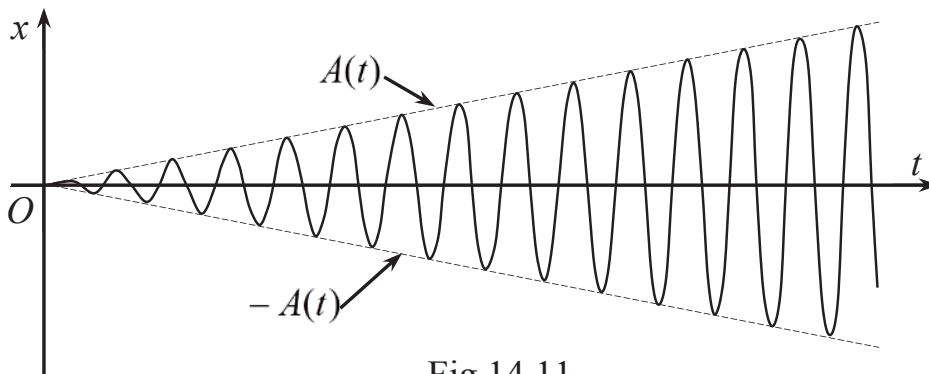


Fig.14.11

### 14.5 Oscilații forțate cu amortizare

Modelul acestui oscilator corespunde cazului general prezentat în fig.14.1 iar ecuația diferențială a mișcării este (14.5), respectiv:

$$\ddot{x} + 2\alpha \dot{x} + \omega^2 x = q \cos pt \quad (14.66)$$

Soluția generală a acestei ecuații neomogene este de forma:

$$x = x_{om} + x_p \quad (14.67)$$

Soluția  $x_{om}$  a ecuației omogene a fost analizată pe larg în cap.14.3 referitor la oscilațiile libere cu amortizare; s-a arătat că forma acestora depinde de raportul între pulsația proprie  $\omega$  și coeficientul  $\alpha$  care caracterizează tăria amortizării. De exemplu, pentru o amortizare slabă (cazul  $\alpha < \omega$ ) soluția amintită are forma:

$$x_{om} = A_0 e^{-\alpha t} \sin(\beta t + \varphi_0) \quad (14.68)$$

în care  $\beta$  este pulsația oscilației proprii amortizate iar  $A_0$  și  $\varphi_0$  sunt amplitudinea și, respectiv, faza inițială.

Pentru soluția particulară  $x_p$  se alege într-o primă etapă o expresie având forma armonică a termenului liber din ecuația diferențială (14.66):

$$x_p = C_1 \cos pt + C_2 \sin pt \quad (14.69)$$

Constantele  $C_1$  și  $C_2$  se determină din condiția ca  $x_p$  să verifice identitatea:

$$\ddot{x}_p + 2\alpha \dot{x}_p + \omega^2 x_p \equiv q \cos pt \quad (14.70)$$

Se calculează derivatele:

$$\dot{x}_p = -C_1 p \sin pt + C_2 p \cos pt \quad \ddot{x}_p = -C_1 p^2 \cos pt - C_2 p^2 \sin pt \quad (14.71)$$

și se efectuează înlocuirile:

$$(-C_1 p^2 + 2\alpha C_2 p + C_1 \omega^2) \cos pt + (-C_2 p^2 - 2\alpha C_1 p + C_2 \omega^2) \sin pt \equiv q \cos pt \quad (14.72)$$

Din sistemul de ecuații care se obține prin egalarea coeficienților funcțiilor  $\cos pt$  și  $\sin pt$ , respectiv:

$$\begin{cases} (\omega^2 - p^2)C_1 + 2\alpha p C_2 = q \\ -2\alpha p C_1 + (\omega^2 - p^2)C_2 = 0 \end{cases} \quad (14.73)$$

se determină:

$$C_1 = \frac{(\omega^2 - p^2)q}{(\omega^2 - p^2)^2 + 4\alpha^2 p^2} \quad C_2 = \frac{2\alpha p q}{(\omega^2 - p^2)^2 + 4\alpha^2 p^2} \quad (14.74)$$

Pentru aceeași soluție particulară se poate alege și forma armonică:

$$x_p = A \cos(pt - \varphi) = A \cos \varphi \cos pt + A \sin \varphi \sin pt \quad (14.75)$$

Din echivalența acestei forme cu (14.69) se deduc relațiile între constante:

$$C_1 = A \cos \varphi \quad C_2 = A \sin \varphi \quad (14.76)$$

Soluția generală a ecuației diferențiale (14.66) va lua în final forma:

$$x = x_{om} + x_p = A_0 e^{-\alpha t} \sin(\beta t + \varphi_0) + A \cos(pt - \varphi) \quad (14.77)$$

Această relație arată că mișcarea oscilatorului are loc prin suprapunerea a două oscilații – o oscilație proprie determinată de caracteristicile constructive și o oscilație întreținută datorată forței perturbatoare. Oscilația proprie se diminuează într-un interval de timp relativ scurt, în funcție de tăria amortizării, astfel că oscilatorul va rămîne cu o mișcare armonică cu pulsația forței perturbatoare:

$$x = A \cos(pt - \varphi) \quad (14.78)$$

Amplitudinea și faza inițială a acestei oscilații se determină din relațiile (14.76):

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \frac{q}{\sqrt{(\omega^2 - p^2)^2 + 4\alpha^2 p^2}} \quad (14.79)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{C_2}{C_1} = \frac{2\alpha p}{\omega^2 - p^2} \quad (14.80)$$

Oscilația forțată cu amortizare este reprezentată grafic în fig.14.12.

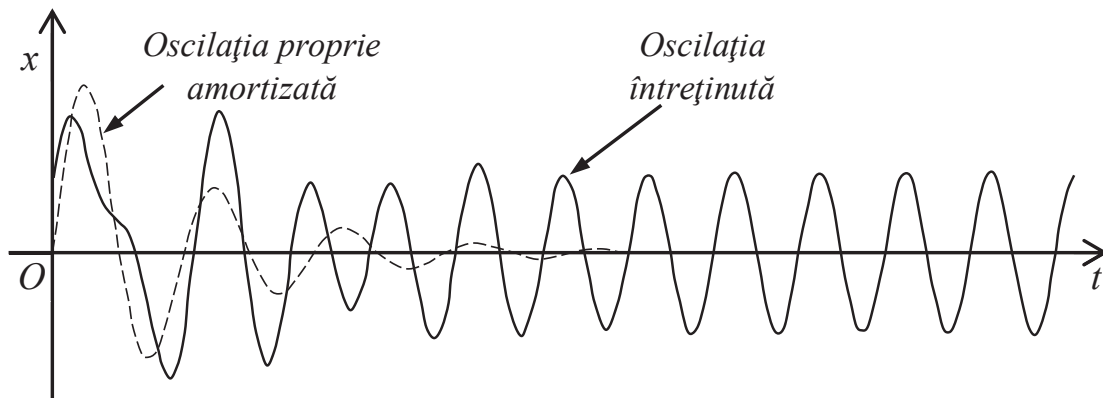


Fig.14.12

**Problema 14.1** Să se alcătuiască un program MATLAB pentru studiul general al mișcărilor oscilatorii liniare, cu un grad de libertate.

**Rezolvare:** Ecuația diferențială generală (14.5) se pune sub forma:

$$\ddot{x} = -2\alpha \dot{x} - \omega^2 x + q \cos pt \quad (14.81)$$

în care coeficienții:

$$\alpha = c/2m \quad \omega = \sqrt{k/m} \quad q = F_0/m \quad (14.82)$$

au semnificațiile indicate în cap.14.1 iar  $p$  este pulsația forței perturbatoare. Vectorul soluțiilor  $\mathbf{z}$  și cel al derivatelor **dery** au următorul conținut:

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} \quad (14.83) \quad \mathbf{dery} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ -2\alpha \dot{x} - \omega^2 x + q \cos pt \end{bmatrix} \quad (14.84)$$

Vectorul condițiilor inițiale  $\mathbf{z}_0$  conține poziția și viteza masei oscilante la  $t = 0$ :

$$\mathbf{z}_0 = \begin{bmatrix} (x)_0 \\ (\dot{x})_0 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} x_0 \\ v_0 \end{bmatrix} \quad (14.85)$$

Programul MATLAB este conținut în fila **P14\_1.m** iar funcțiile de evaluare a derivatelor sunt incluse în fila **vibr.m**.

```

P14_1.m
% OSCILATII LINIARE
clear; close all;
global OMP ALFA Q P
% DATE NUMERICE
m=1;
c=0;
k=100;
F0=0;
x0=0;
v0=0.5;
% CONSTANTE
OMP=k/m;
ALFA=0.5*c/m;
Q=F0/m;
P=5;
% INTERVALUL DE INTEGRARE
tmin=0; tmax=5;
timp=[tmin, tmax];

% CONDITIILE INITIALE
z0=[x0,v0];
% INTEGEAREA
[t,z]=ode45('vibr',timp,z0);
x=z(:,1);
xp=z(:,2);
figure(1); plot(t,x);grid;
figure(2); plot(t,xp);grid;

vibr.m
function dery=vibr(t,z)
global OMP ALFA Q P
x=z(1);
xp=z(2);
xpp=-2*ALFA*xp-OMP*x+Q*cos(P*t);
dery=[xp; xpp];

```

Acest program general poate fi rulat cu diferite date. În tabelul de mai jos sunt date câteva seturi de valori numerice cu care pot fi puse în evidență cele patru tipuri de oscilații analizate în cap.14.1.

**Tabelul 14.1**

Tipul oscilației		$m$	$k$	$c$	$F_0$	$p$	$x_0$	$v_0$	$t_{\max}$	
<i>Oscilația liberă neamortizată</i>		1	100	0	0	0	0	0,5	5	
<i>Oscilația liberă cu amortizare</i>	<i>slabă</i>	$\alpha < \omega$	1	100	0,5	0	0	0	20	
	<i>critică</i>	$\alpha = \omega$	1	100	20	0	0	0	2	
	<i>tare</i>	$\alpha > \omega$	1	100	40	0	0	0	2	
<i>Oscilația forțată neamortizată</i>	<i>slabă</i>	$\alpha \ll p$	1	100	0	100	100	0	0	1
	<i>tare</i>	$\alpha \gg p$	1	100	0	100	100	0	0	10
	<i>cu bătăi</i>	$\alpha \approx p$	1	100	0	100	100	0	0	15
	<i>rezonanța</i>	$\alpha = p$	1	100	0	100	100	0	0	10
<i>Oscilația forțată amortizată</i>		1	100	0,5	100	100	0	0	15	

Diagramele care se pot obține cu aceste date sunt analoge celor prezentate în capitolele 14.2 - 14.5.

## 15. DINAMICA MIȘCĂRII RELATIVE A PUNCTULUI MATERIAL

### 15.1 Generalități

În cap.11 s-a studiat cinematica mișcării compuse a punctului material. Se reamintesc în continuare principalele definiții (fig.15.1):

– *mișcarea absolută (MA)* – punctul  $P$  față de sistemul de referință fix  $SRF$ ;

– *mișcarea relativă (MR)* – punctul  $P$  față de sistemul de referință mobil  $SRM$ ;

– *mișcarea de transport (MT)* – sistemul de referință mobil  $SRM$  față de cel fix  $SRF$ .

Corespunzător acestor mișcări, pentru viteze și accelerații au fost stabilite relațiile:

$$\begin{cases} \bar{v}_{abs} = \bar{v}_r + \bar{v}_t \\ \bar{a}_{abs} = \bar{a}_r + \bar{a}_t + \bar{a}_{cor} \\ \bar{a}_{cor} = 2(\bar{\omega}_t \times \bar{v}_r) \end{cases} \quad (15.1)$$

în care  $\bar{v}_{abs}$  și  $\bar{a}_{abs}$  sunt viteza și accelerația mișcării absolute,  $\bar{v}_r$  și  $\bar{a}_r$  sunt viteza și accelerația mișcării relative,  $\bar{v}_t$  și  $\bar{a}_t$  sunt viteza și accelerația mișcării de transport;  $\bar{a}_{cor}$  este accelerația Coriolis care exprimă variația ca direcție a vitezei relative  $\bar{v}_r$ , datorată vitezei unghiulare  $\bar{\omega}_t$  a mișcării de transport.

Dacă asupra unui punct material de masă  $m$  acționează un sistem de forțe concurente, conform celui de al doilea principiu fundamental al Mecanicii acestea vor imprima punctului o accelerație proporțională cu rezultanta sistemului de forțe pe direcția și în sensul acesteia. În contextul unei mișcări compuse a punctului material trebuie făcută precizarea că această accelerație se referă la mișcarea lui absolută, respectiv față de sistemul de referință fix. Relația corespunzătoare principiului menționat va avea în acest caz forma:

$$m\bar{a}_{abs} = \bar{R} = \sum \bar{F}_i \quad (15.2)$$

În cazul unui punct material supus la legături rezultanta  $\bar{R}$  include atât forțele date, direct aplicate, cât și forțele de legătură (reacțiunile).

### 15.2 Ecuația generală a mișcării relative

În multe aplicații interesează mișcarea punctului material în raport cu sistemul de referință mobil. Pentru determinarea acesteia se stabilește mai întâi ecuația diferențială generală a mișcării relative, prin integrarea căreia să se poată obține legea mișcării relative, respectiv legea vitezei și legea spațiului. Ținând cont de definiția accelerației absolute din (15.1), prima parte a relația (15.2) se mai poate scrie:

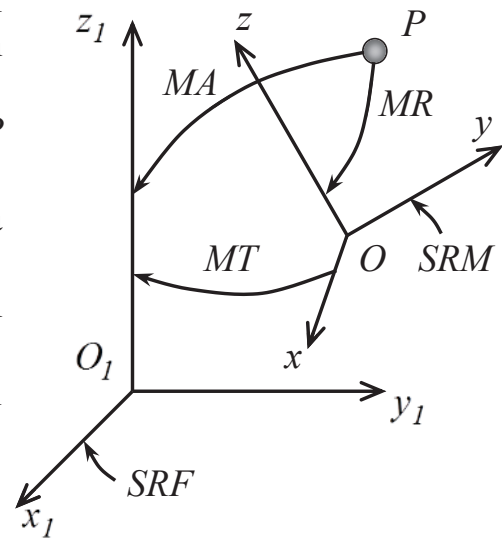


Fig.15.1

$$m\bar{a}_r = m\bar{a}_{abs} - m\bar{a}_t - m\bar{a}_{cor} \quad (15.3)$$

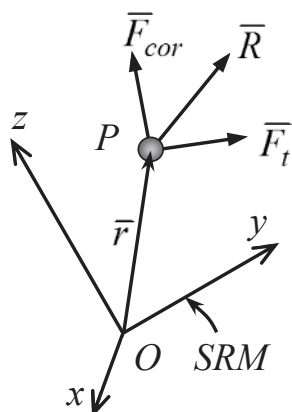
Se prelucrează această relație după cum urmează:

$$m\bar{a}_r = \bar{R} + \bar{F}_t + \bar{F}_{cor} \quad (15.4)$$

În această relație, pe lângă rezultanta  $\bar{R}$  a forțelor date, apar două forțe complementare:

$$\bar{F}_t = -m\bar{a}_t \quad (15.5) \quad \bar{F}_{cor} = -m\bar{a}_{cor} = -2m(\bar{\omega}_t \times \bar{v}_r) \quad (15.6)$$

numite *forța de transport* și, respectiv, *forța Coriolis*. Se observă că forța Coriolis este nulă atunci când mișcarea de transport este o translație, respectiv  $\bar{\omega}_t = 0$ ; aceasta mai este nulă și în cazul particular în care vectorii  $\bar{\omega}_t$  și  $\bar{v}_r$  sunt paraleli.



Relația (15.4) se mai poate scrie:

$$m\ddot{\bar{r}} = \bar{R} + \bar{F}_t + \bar{F}_{cor} \quad (15.7)$$

cu precizarea că în acest caz termenul  $\ddot{\bar{r}} = \bar{a}_r$  reprezintă derivata locală a vectorului de poziție al punctului  $P$  în sistemul de referință mobil  $SRM$  (fig.15.2), făcându-se abstracție de mișcarea acestui sistem în raport cu sistemul de referință fix<sup>\*)</sup>. Determinarea legii de mișcare a punctului material în raport cu  $SRM$  presupune integrarea ecuației de mai sus pentru determinarea vitezei relative  $\dot{\bar{r}} = \bar{v}_r$  și a poziției  $\bar{r} = \bar{r}(t)$ . Ca și în cazul mișcării absolute (cap.13), din ecuația vectorială (15.7) se poate

obține un sistem de ecuații diferențiale scalare, a cărui configurație va depinde de sistemul de referință mobil utilizat (cartezian, polar, etc).

Dacă mișcarea de transport este rectilinie și uniformă, atunci  $\bar{a}_t = 0$  și  $\bar{\omega}_t = 0$ , ceea ce implică  $\bar{F}_t = 0$  și  $\bar{F}_{cor} = 0$ . Ecuația (15.4) va lua forma:

$$m\bar{a}_r = \bar{R} = \sum \bar{F}_i = m\bar{a}_{abs} \quad (15.8)$$

Rezultă că  $\bar{a}_r = \bar{a}_{abs}$  și mișcarea relativă a punctului material față de sistemul de referință mobil este identică cu cea față de sistemul de referință fix. Un sistem de referință mobil care se deplasează rectiliniu și uniform în raport cu un sistem fix, poartă numele de *sistem de referință inerțial*.

Un alt caz special este cel în care mișcarea relativă a punctului material încetează;  $\bar{a}_r = 0$ ,  $\bar{v}_r = 0$  și  $\bar{F}_{cor} = 0$ . Din ecuația (15.4) termenii care rămân, respectiv:

$$\bar{R} + \bar{F}_t = 0 \quad (15.9)$$

indică apariția unei stări de echilibru. Punctul material rămâne imobil în raport cu sistemul de referință mobil, dar continuă să se miște împreună cu acesta. Această situație este cunoscută sub denumirea de *repaus relativ*.

<sup>\*)</sup> În cap.11 derivatele locale au fost notate prin  $\partial r / \partial t$  și respectiv  $\partial^2 r / \partial t^2$  pentru a fi deosebite de cele absolute.

**Problema 15.1** Punctul material  $I$  se deplasează pe un plan înclinat mobil 2 sub acțiunea greutății proprii (fig.15.3). Să se determine accelerațiile corpurilor.

**Date:**  $m_1, m_2, \alpha$

**Cerute:**  $a_r, a_t$

**Rezolvare:** Corpul  $I$  are o mișcare relativă în raport cu sistemul de referință mobil atașat corpului 2 iar acesta are o mișcare absolută în raport cu sistemul de referință fix. Ambele mișcări sunt translații rectilinii. Accelerația absolută a corpului 2 este în același timp accelerație de transport pentru corpul  $I$ . Accelerația Coriolis a corpului  $I$  este nulă ( $\bar{\omega}_t = 0$ ).

Pentru corpul  $I$  relația generală (15.4) ia forma vectorială:

$$m_1 \bar{a}_r = \bar{G}_1 + \bar{N} + \bar{F}_t \quad (15.10)$$

care se proiectează pe axele sistemului de referință mobil (fig.15.4):

$$\begin{cases} m_1 a_r = F_t \cos \alpha + G_1 \sin \alpha \\ 0 = N_1 + F_t \sin \alpha - G_1 \cos \alpha \end{cases} \quad (15.11)$$

în care  $G_1 = m_1 g$  și  $F_t = m_1 a_t$ . Pentru corpul 2 se pornește de la o relație de forma (15.2) în care  $\bar{a}_{abs} \equiv \bar{a}_t$ :

$$m_2 \bar{a}_t \equiv \bar{G}_2 + \bar{N}_1 + \bar{N}_2 \quad (15.12)$$

Proiectând ecuația pe axele sistemului de referință fix (fig.15.5) se obțin relațiile:

$$\begin{cases} -m_2 a_t = -N_1 \sin \alpha \\ 0 = N_2 - N_1 \cos \alpha - G_2 \end{cases} \quad (15.13)$$

în care  $G_2 = m_2 g$ .

Se rezolvă sistemul format din ecuațiile (15.11) și (15.13) în raport cu cele două accelerații. Se obține:

$$a_r = \frac{m_1 \cos \alpha}{\frac{m_2}{\sin \alpha} + m_1 \sin \alpha} g \quad (15.14)$$

$$a_t = \frac{m_1 + m_2}{\frac{m_2}{\sin \alpha} + m_1 \sin \alpha} g \quad (15.15)$$

**Observație:** Apariția unei accelerații de transport ca urmare a alunecării masei aflate pe planul înclinat este vizibilă, de exemplu, la descărcarea unei cantități mai mari de material, transportată pe platforma basculantă către înapoi a unui camion; într-o astfel de situație, pentru evitarea împrăștierii nedorite a materialului, deplasarea către înainte a camionului se blochează cu ajutorul sistemului de frânare.

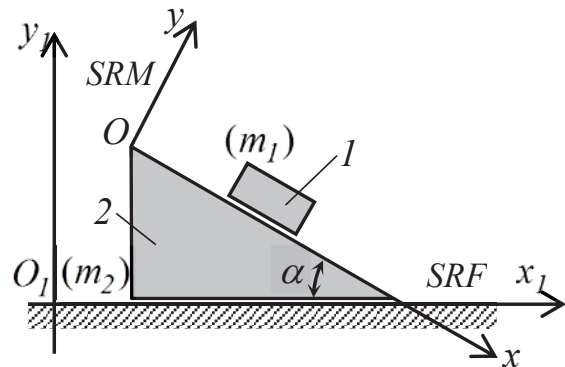


Fig.15.3

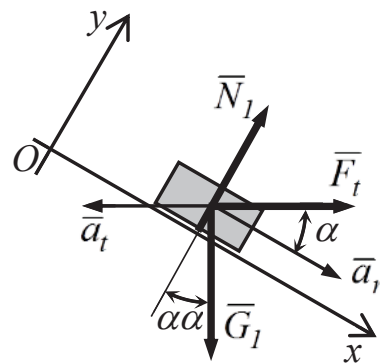


Fig.15.4

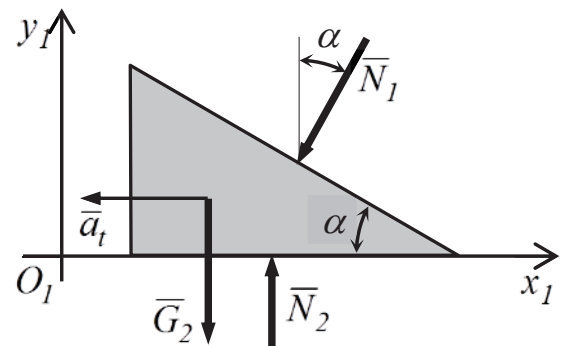


Fig.15.5



### 15.3 Mișcarea unei culise pe o bară oblică în rotație

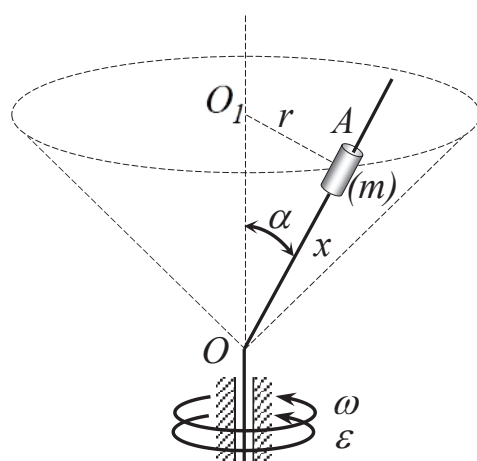


Fig.15.6

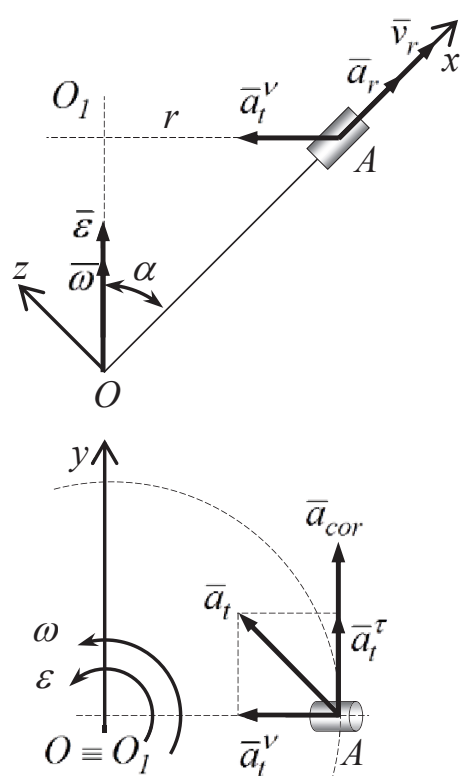


Fig.15.17

Sub acțiunea greutatei proprii o culisă de masă  $m$  alunecă în lungul unei bare oblice înclinată cu unghiul  $\alpha$  față de o axă verticală (fig.15.6); rotația barei în jurul axei se efectuează cu  $\omega$  și  $\varepsilon$ . Între culisă și bară există frecare cu coeficientul  $\mu$ .

Mișcarea relativă a culisei este o translație rectilinie a cărei lege  $x=x(t)$  trebuie determinată. Rotația barei în jurul axei verticale reprezintă pentru culisă mișcarea de transport.

Sistemul de referință mobil se alege cu axa  $Ox$  în lungul barei, axa  $Oz$  perpendiculară pe bară în planul vertical al acesteia; axa  $Oy$ , perpendiculară pe planul barei, va fi orizontală.

Relația fundamentală a dinamicii mișcării relative are forma generală:

$$m\bar{a}_r = \bar{R} + \bar{F}_t + \bar{F}_{cor} \quad (15.16)$$

În relație, pe lângă rezultanta  $\bar{R}$  a forțelor date, apar cele două forțe complementare:

$$\bar{F}_t = -m\bar{a}_t \quad (15.17)$$

$$\bar{F}_{cor} = -m\bar{a}_{cor} = -2m(\bar{\omega}_t \times \bar{v}_r) \quad (15.18)$$

În fig.15.17 sunt reprezentate accelerațiile culisei corespunzătoare mișcării compuse. Viteza relativă  $\bar{v}_r$  și accelerația relativă  $\bar{a}_r$  sunt coliniare cu bara  $OA$  și au sensul alunecării culisei; scalarii acestor vectori sunt  $v_r = \dot{x}$  și  $a_r = \ddot{x}$ . Pentru accelerația de transport se poate scrie:

$$\bar{a}_t = \bar{a}_t^v + \bar{a}_t^\tau \quad (15.19)$$

Componentele se află în planul orizontal și au sensurile determinate de  $\omega$  și respectiv  $\varepsilon$ ; la nivel scalar acestea se definesc prin relațiile:

$$a_t^v = \omega^2 r = \omega^2 x \sin \alpha \quad a_t^\tau = \varepsilon r = \varepsilon x \sin \alpha \quad (15.20)$$

Vectorul accelerației Coriolis:

$$\bar{a}_{cor} = 2(\bar{\omega} \times \bar{v}_r) \quad (15.21)$$

este perpendicular pe planul format de vectorii  $\bar{\omega}$  și  $\bar{v}_r$ , conținuți în planul vertical al barei; sensul acestei accelerații se determină aplicând regula șurubului drept la rotația vectorului  $\bar{\omega}$  către vectorul  $\bar{v}_r$ . La nivel scalar:

$$a_{cor} = 2\omega v_r \sin \alpha = 2\omega \dot{x} \sin \alpha \quad (15.22)$$

În fig.15.18 sunt reprezentate forțele aplicate culisei; sensurile acestora corespund situației în care  $\omega$  și  $\varepsilon$  sunt pozitive (în sens trigonometric). Relația generală (15.16) are în acest caz forma:

$$m\bar{a}_r = \bar{G} + \bar{N} + \bar{F}_f + \bar{F}_t + \bar{F}_{cor} \quad (15.23)$$

Reacțiunea normală  $\bar{N}$  este conținută într-un plan perpendiculară pe bara  $OA$ ; ea se va descompune în componentele  $\bar{N}_y$  și  $\bar{N}_z$ .

Forța de frecare  $\bar{F}_f$  este coliniară cu bara  $OA$ , în sens invers mișcării culisei; exceptând starea de repaus relativ, mărimea ei este:

$$F_f = \mu N \quad (15.24)$$

Ținând cont că ea este îndreptată în sens invers vitezei relative, pentru a acoperi toate situațiile, această forță se mai poate pune sub forma:

$$F_f = -\mu N \frac{v_r}{|v_r|} = -\mu \sqrt{N_y^2 + N_z^2} \cdot \frac{\dot{x}}{|\dot{x}|} \quad (15.25)$$

Forța de transport are componente corespunzătoare accelerațiilor normală și tangențială:

$$\bar{F}_t = -m\bar{a}_t = -m\bar{a}_t^v - m\bar{a}_t^\tau = \bar{F}_t^v + \bar{F}_t^\tau \quad (15.26)$$

La nivel scalar cele două componente au expresiile:

$$F_t^v = ma_t^v = m\omega^2 x \sin \alpha \quad (15.27) \quad F_t^\tau = ma_t^\tau = m\varepsilon x \sin \alpha \quad (15.28)$$

Forța Coriolis, definită prin relația  $\bar{F}_{cor} = -m\bar{a}_{cor}$ , are forma scalară:

$$F_{cor} = 2m\omega\dot{x} \sin \alpha \quad (15.29)$$

Ecuția (15.23) se proiectează pe axele sistemului de referință mobil  $Oxyz$ :

$$\begin{cases} ma_r = -G \cos \alpha + F_t^v \sin \alpha + F_f \\ 0 = N_y - F_t^\tau - F_{cor} \\ 0 = N_z - G \sin \alpha - F_t^v \cos \alpha \end{cases} \quad (15.30)$$

Se fac înlocuirile conform analizei de mai sus și rezultă sistemul de ecuații diferențiale general prin integrarea căruia se poate determina atât legea de mișcare a culisei pe bară cât și reacțiunea normală prin componentele sale:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -mg \cos \alpha + m\omega^2 x \sin^2 \alpha - \mu \sqrt{N_y^2 + N_z^2} \cdot \frac{\dot{x}}{|\dot{x}|} \\ N_y = m\varepsilon x \sin \alpha + 2m\omega\dot{x} \sin \alpha \\ N_z = mg \sin \alpha + m\omega^2 x \sin \alpha \cos \alpha \end{cases} \quad (15.31)$$

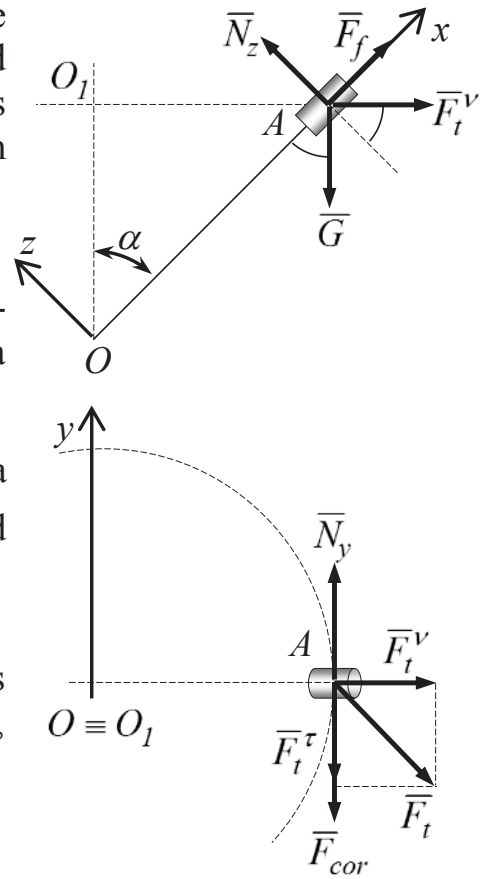


Fig.15.18

După cum se poate observa, cele trei ecuații diferențiale sunt cuplate iar sistemul este neliniar. Integrarea acestuia se poate face numai pe cale numerică.

Trebuie făcută observația că, în timpul integrării, poate interveni situația în care  $v_r = \dot{x} = 0$ , ceea ce introduce o nedeterminare în relația (15.25) pentru evaluarea forței de frecare și în prima ecuație a sistemului (15.31).

O primă cauză a acestei situații o poate constitui schimbarea de sens a mișcării culisei și, implicit, a vitezei relative, situație dependentă și de viteza inițială cu care a fost lansată culisa în lungul barei. În momentul schimbării sensului vitezei relative, forța de frecare își schimbă deasemenea sensul. Într-o astfel de situație  $a_r = \ddot{x} \neq 0$  și  $F_f = 0$ . Prima relație (15.31) ia forma:

$$m\ddot{x} = -mg \cos \alpha + m\omega^2 x \sin^2 \alpha \quad (15.32)$$

O a doua cauză poate proveni din intrarea culisei într-o stare de repaus relativ, cu sau fără frecare, când mișcarea culisei în raport cu bara încetează, ea continuând să se rotească împreună cu aceasta în jurul axei verticale. În cazul repausului relativ cu frecare, forța de frecare există dar are valoarea inferioară celei din mișcare.

Pentru a constata existența unui repaus relativ, în care și  $a_r = \ddot{x} = 0$ , trebuie verificată condiția:

$$|F_f| \leq \mu \sqrt{N_y^2 + N_z^2} \quad (15.34)$$

Ținând cont de relațiile (15.30), în care și  $F_{cor} = 0$  (dependentă de  $v_r$ ), această condiție va lua forma:

$$|G \cos \alpha - F_t^v \sin \alpha| \leq \mu \sqrt{(F_t^r)^2 + (G \sin \alpha + F_t^v \cos \alpha)^2} \quad (15.35)$$

Pornind de la această relație se poate face o analiză mai aprofundată privind posibilitatea apariției repausului relativ cu frecare.

Dacă se ridică la pătrat relația (15.35) și se înlocuiesc expresiile componentelor forței de transport și ale greutateii, se obține o inecuație de gradul 2 în variabila  $x$ , având forma generală:

$$f(x) = ax^2 + bx + c \leq 0 \quad (15.36)$$

Introducând relațiile de definiție pentru  $G$ ,  $F_t^v$  și  $F_t^r$  și simplificând masa culisei, se pot calcula expresiile coeficienților funcției  $f(x)$ :

$$\begin{cases} a = \sin^2 \alpha [\omega^4 (\sin^2 \alpha - \mu^2 \cos^2 \alpha) - \mu^2 \varepsilon^2] \\ b = -2g\omega^2 (1 + \mu^2) \sin^2 \alpha \cos \alpha \\ c = g^2 (\cos^2 \alpha - \mu^2 \sin^2 \alpha) \end{cases} \quad (15.37)$$

Se reamintește că ecuația  $f(x) = 0$  reprezintă din punct de vedere al analizei matematice o parabolă (fig.15.19) și are rădăcinile de forma:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (15.38)$$

Zona de pe bară în care culisa se află în echilibru cu frecare corespunde intervalului cuprins între cele două rădăcini ale ecuației  $f(x) = 0$ . Acest interval există dacă sunt îndeplinite simultan următoarele condiții:

– rădăcinile  $x_1$  și  $x_2$  sunt reale și pozitive; în particular, dacă numai  $x_2 > 0$ , zona de echilibru este cuprinsă între  $x = 0$  și  $x_2$ ;

– funcția  $f(x) < 0$  între rădăcini dacă  $a > 0$ .

Pornind de la relația de definiție a coeficientului  $a$  din (15.37) se poate stabili o condiție cinematică pentru existența echilibrului relativ cu frecare:

$$\frac{\varepsilon}{\omega^2} > \frac{1}{\mu} \sqrt{\sin^2 \alpha - \mu^2 \cos^2 \alpha} \quad (15.39)$$

precum și o condiție geometrică:

$$\operatorname{tg} \alpha > \mu \quad (15.40)$$

Se poate face o paralelă între echilibrul relativ cu frecare al culisei și echilibrul cu frecare al unui punct material pe un plan înclinat, studiat în cap.5. Astfel, între cele două poziții limită  $x_1$  și  $x_2$  există o poziție  $x_e$  în care culisa se află în echilibru fără frecare. Valoarea acesteia se determină punând condiția:

$$F_f = G \cos \alpha - F_t^V \sin \alpha = 0 \quad (15.41)$$

Făcând înlocuirile se obține:

$$x_e = \frac{g}{\omega^2} \frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha} \quad (15.42)$$

Aceeași valoare se obține dacă, observând simetria parabolei din fig.15.19, se calculează coordonata pentru care funcția  $f(x)$  este minimă, respectiv cea pentru care derivata de ordinul I se anulează:

$$f'_x = 2ax_e + b = 0 \rightarrow x_e = -\frac{b}{2a} \quad (15.43)$$

Făcând înlocuirile coeficienților și introducând  $\mu = 0$ , se găsește relația (15.42).

Se poate observa că poziția de echilibru fără frecare există, respectiv  $x_e \geq 0$ , numai dacă  $\alpha < \pi/2$ . Dacă rotația barei este uniformă,  $\omega = \text{const.}$  și poziția de repaus relativ fără frecare este permanentă.

În cazul în care bara este orizontală,  $\alpha = \pi/2$  și  $x_e = 0$ ; în absența frecării singura poziție de echilibru este pe axa de rotație.

Pentru unghiuri  $\alpha > \pi/2$  nu există o poziție de echilibru fără frecare.

Zona în care există echilibru cu frecare, delimitată de coordonatele  $x_1$  și  $x_2$ , este dependentă de valorile parametrilor cinematici  $\omega$  și  $\varepsilon$ . Dacă în timpul rotației barei coordonata curentă  $x$  se află în afara acestei zone, starea de repaus relativ a culisei încetează.

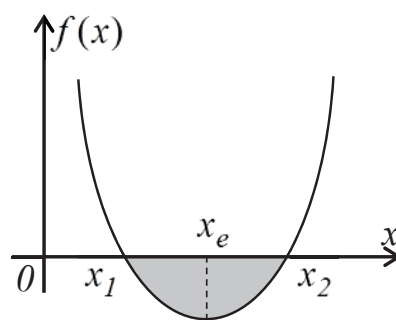


Fig.15.19

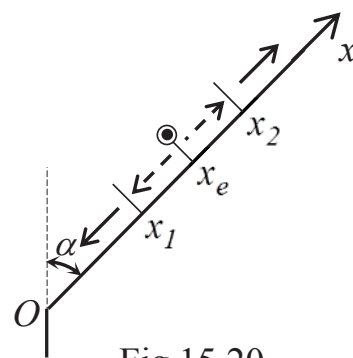


Fig.15.20

**Problema 15.2** Să se integreze ecuațiile mișcării relative a culisei pe bară (15.30) considerând că aceasta se rotește având legea de mișcare  $\omega = \omega_0 + \varepsilon t$ .

Date numerice:  $m = 1 \text{ kg}$ ,  $\alpha = 60^\circ$ ,  $\mu = 0.25$ ,  $\omega_0 = 3.5 \text{ s}^{-1}$ ,

$$\varepsilon = 0.4 \text{ s}^{-2}, \quad x_0 = 1 \text{ m}, \quad v_0 = -0.5 \text{ m/s}$$

Cerute:  $x, v_r$

Rezolvare: Se alcătuieste un vector  $\mathbf{u}$  al soluțiilor și un vector  $\mathbf{dery}$  al derivatelor:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} \quad (15.44) \quad \mathbf{dery} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \dot{x} \\ (-G \cos \alpha + F_t^v \sin \alpha + F_f) / m \end{bmatrix} \quad (15.45)$$

Vectorul condițiilor inițiale  $\mathbf{u0}$  conține poziția și viteza culisei pe bară la  $t = 0$ :

$$\mathbf{u0} = \begin{bmatrix} (x)_0 \\ (\dot{x})_0 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} x_0 \\ v_0 \end{bmatrix} \quad (15.46)$$

Programul MATLAB care rezolvă problema propusă are următoarea configurație:

```

culisa.m                                % INTEGEAREA                                Ftt=M*att;
% MISCAREA RELATIVA                       [t,u]=ode45('deriv',timp,u0);           Ftn=M*atn;
clear; close all;                          % REZULTATE                                Fcor=M*acor;
global M G OM0 EPS                         x=u(:,1);                                Ny=Fcor+Ftt;
global CA SA MIU                            vrel=u(:,2);                              Nz=G*SA+Ftn*CA;
% DATE NUMERICE                             figure(1);plot(t,x); grid;                N=sqrt(Ny^2+Nz^2);
M=1; OM0=3.5; EPS=0.4;                     figure(2);plot(t,vrel); grid;              if vrel~=0
alfa=pi/3; g=9.81;
MIU=0.25;
x0=1; v0=-0.5;
% CONSTANTE                                 deriv.m
CA=cos(alfa);                               function dery=deriv(t,u)
SA=sin(alfa);                               global M G OM0 EPS
G=M*g;                                       global CA SA MIU
% INTERVALUL DE                             x=u(1);
% INTEGRARE                                  xp=u(2);
tmin=0; tmax=0.5;                           vrel=xp;
timp=[tmin, tmax];                           om=OM0+EPS*t;
% CONDITIILE INITIALE                       omp=om^2;
u0=[x0,v0];                                  r=x*SA;
                                                att=EPS*r;
                                                atn=omp*r;
                                                acor=2*omp*vrel*SA;

```

În fig.15.21 și 15.22 se prezintă diagramele obținute pentru  $x$  și  $\dot{x} = v_r$ . Se poate observa existența unui punct de întoarcere a culisei.

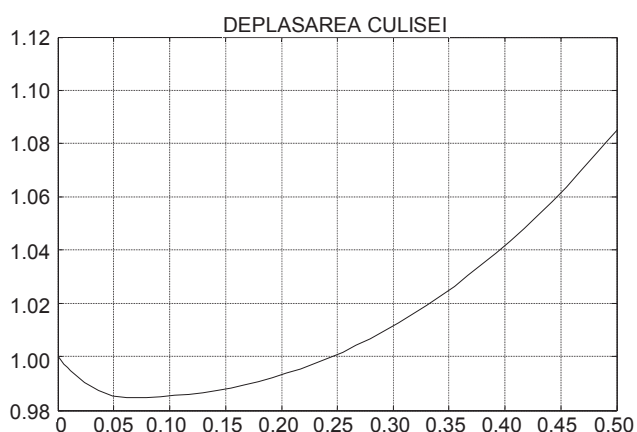


Fig.15.21

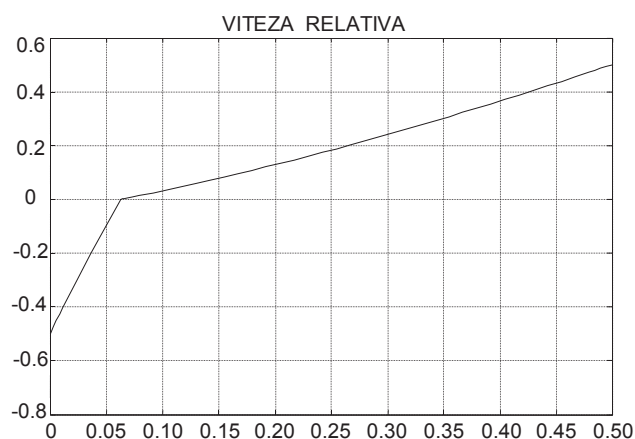


Fig.15.22

### 15.4 Mișcarea unei particule pe suprafața interioară a unui cilindru înclinat

O particulă de masă  $m$  este lansată pe suprafața interioară a unui cilindru de rază  $R$  înclinat cu unghiul  $\alpha$  față de orizontală; cilindrul se rotește în jurul axei sale longitudinale după o lege de mișcare dată  $\varphi = \varphi(t)$ .

Între particulă și suprafața cilindrului există frecare de alunecare cu coeficientul  $\mu$ .

Pentru raportarea mișcărilor absolute ale cilindrului și particulei, lansată din poziția  $P_0$ , se alege un sistem de referință fix  $Oxyz$  dispus ca în fig.15.23. În acest sistem poziția cilindrului este dată prin unghiul de rotație  $\varphi$  iar cea a particulei prin unghiul  $\theta$  și deplasarea longitudinală  $z$ . Poziția relativă a particulei în raport cu cilindrul va fi cunoscută prin unghiul  $\varphi - \theta$  și coordonata  $z$ . În secțiunea cilindrului în care se află particula la un moment dat, se introduce și sistem de referință local format din tangenta  $P\tau$  și normala  $Pv$ .

Ecuatiile mișcării particulei pot fi stabilite mai comod în raport cu sistemul de referință fix. Direcția și sensul forței de frecare vor fi determinate însă de viteza relativă  $\bar{v}_r$  a acesteia în raport cu suprafața cilindrului. Pentru stabilirea acesteia se pornește de la relația de legătură cu viteza absolută  $\bar{v}_a$ :

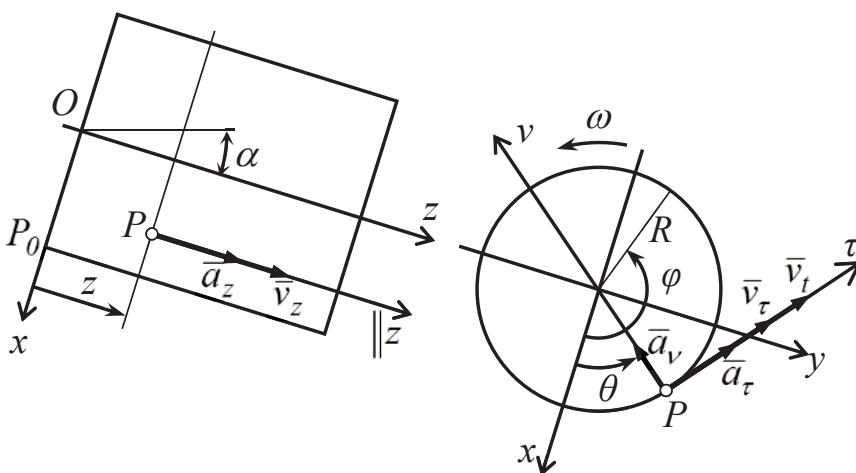


Fig.15.23

$$\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_t \quad (15.47)$$

în care  $\bar{v}_t$  este viteza de transport imprimată de cilindru. Viteza absolută:

$$\bar{v}_a = \bar{v}_\tau + \bar{v}_z \quad (15.48)$$

are componentele evidențiate în fig.15.23. La nivel scalar:

$$v_\tau = R\omega_a = R\dot{\theta} \quad v_z = \dot{z} \quad v_t = R\omega = R\dot{\varphi} \quad (15.49)$$

Rezultă pentru viteza relativă relația vectorială:

$$\bar{v}_r = \bar{v}_a - \bar{v}_t = (\bar{v}_\tau - \bar{v}_t) + \bar{v}_z = \bar{v}_{r\tau} + \bar{v}_{rz} \quad (15.50)$$

iar pentru componentele acesteia relațiile scalare:

$$v_{r\tau} = R(\dot{\theta} - \omega) \quad (15.51) \quad v_{rz} \equiv v_z = \dot{z} \quad (15.52)$$

Cele două componente sunt perpendiculare una pe cealaltă, astfel că:

$$|v_r| = \sqrt{v_{r\tau}^2 + v_z^2} = \sqrt{R^2(\dot{\theta} - \omega)^2 + \dot{z}^2} \quad (15.53)$$

Accelerația absolută a particulei are dezvoltarea vectorială:



$$\bar{a}_a = \bar{a}_\tau + \bar{a}_v + \bar{a}_z \quad (15.54)$$

Componentele acestora, prezentate deasemenea în fig.15.23, au relațiile scalare:

$$a_\tau = R\varepsilon_a = R\ddot{\theta} \quad a_v = R\omega_a^2 = R\dot{\theta}^2 \quad a_z = \ddot{z} \quad (15.55)$$

Ecuția fundamentală a Dinamicii aplicată mișcării particulei are forma vectorială generală:

$$m\bar{a}_a = \bar{G} + \bar{N} + \bar{F}_f \quad (15.56)$$

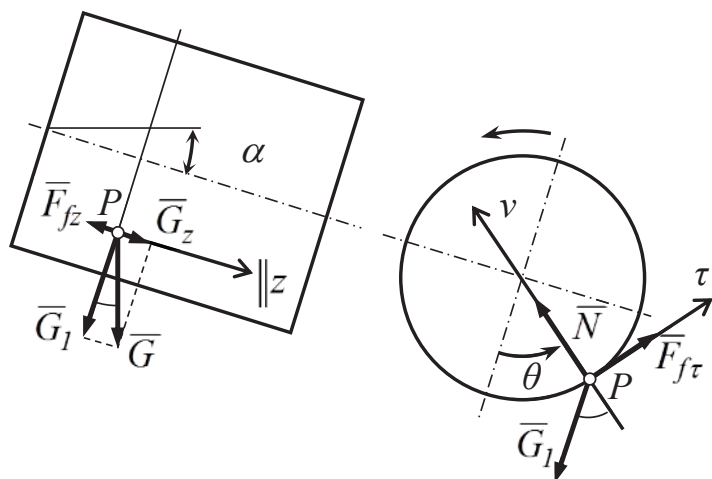


Fig.15.24

Greutatea particulei se descompune după direcțiile axelor locale (fig.15.24):

$$\begin{aligned} \bar{G} &= \bar{G}_1 + \bar{G}_z = \\ &= \bar{G}_\tau + \bar{G}_v + \bar{G}_z \end{aligned} \quad (15.57)$$

La nivel scalar aceste componente au expresiile:

$$\begin{cases} G_\tau = -G \cos \alpha \sin \theta \\ G_v = -G \cos \alpha \cos \theta \\ G_z = G \sin \alpha \end{cases} \quad (15.58)$$

Reacțiunea  $\bar{N}$  se află integral pe direcția normalei  $Pv$ . Forța de frecare acționează într-un plan tangent la suprafața cilindrului. Dacă particula se află în mișcare, forța de frecare va avea direcția vitezei relative și sensul invers acesteia:

$$\bar{F}_f = -\mu N \frac{\bar{v}_r}{|\bar{v}_r|} = -\frac{\mu N}{|\bar{v}_r|} (\bar{v}_{r\tau} + \bar{v}_z) = \bar{F}_{f\tau} + \bar{F}_{fz} \quad (15.59)$$

Proiecțiile pe axele locale ale forței de frecare vor avea expresiile:

$$\begin{cases} F_{f\tau} = -\mu N \frac{v_{r\tau}}{|\bar{v}_r|} = -\mu N \cdot \frac{R(\dot{\theta} - \omega)}{\sqrt{R^2(\dot{\theta} - \omega)^2 + \dot{z}^2}} \\ F_{fz} = -\mu N \frac{v_z}{|\bar{v}_r|} = -\mu N \cdot \frac{\dot{z}}{\sqrt{R^2(\dot{\theta} - \omega)^2 + \dot{z}^2}} \end{cases} \quad (15.60)$$

Proiectând ecuația (15.56) pe axele locale se obțin ecuații scalare:

$$ma_\tau = G_\tau + F_{f\tau} \quad ma_v = G_v + N \quad ma_z = G_z + F_{fz} \quad (15.61)$$

care au drept necunoscute coordonate poziționale ale particulei în raport cu sistemul de referință fix, respectiv  $\theta = \theta(t)$  și  $z = z(t)$ , precum și reacțiunea normală  $N$  care este și ea variabilă în raport cu timpul prin intermediul unghiului  $\theta$ . Se înlocuiesc componentele accelerațiilor și cele ale forțelor prezentate mai înainte:

$$\begin{cases} mR\ddot{\theta} = -G \cos \alpha \sin \theta + F_{f\tau} \\ mR\dot{\theta}^2 = N - G \cos \alpha \cos \theta \\ m\ddot{z} = G \sin \alpha + F_{fz} \end{cases} \quad (15.62)$$



Acest sistem se prelucrează în continuare pentru obținerea explicită a ecuațiilor diferențiale ale mișcării particulei:

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = \frac{1}{mR} \left( G \cos \alpha \sin \theta - \mu N \cdot \frac{R(\dot{\theta} - \omega)}{\sqrt{R^2(\dot{\theta} - \omega)^2 + \dot{z}^2}} \right) \\ N = mR\dot{\theta}^2 + G \cos \alpha \cos \theta \\ \ddot{z} = \frac{1}{m} \left( G \sin \alpha - \mu N \cdot \frac{\dot{z}}{\sqrt{R^2(\dot{\theta} - \omega)^2 + \dot{z}^2}} \right) \end{cases} \quad (15.63)$$

Sub această formă se evidențiază faptul că ecuațiile diferențiale ale sistemului sunt neliniare și sunt cuplate între ele. Integrarea lor în vederea determinării legii de mișcare a particulei se poate face numai pe cale numerică.

În timpul integrării poate interveni situația în care  $N < 0$ ; aceasta indică desprinderea particulei de pe suprafața cilindrului și continuarea liberă a mișcării având drept condiții inițiale poziția și viteza absolută din momentul desprinderii. Situația este posibilă atunci când  $\cos \theta < 0$ , respectiv dacă  $\pi/2 < \theta < 3\pi/2$ .

În enunțul aplicației și în tratare s-a considerat că particula se lansează în mișcare pe la partea superioară a cilindrului, unghiul de înclinare  $\alpha$  al axei acestuia față de orizontală fiind considerat pozitiv în sens invers trigonometric. În aceste condiții funcția  $\cos \alpha > 0$  și posibilitatea desprinderii menționată mai sus este dependentă numai de valoarea unghiului  $\theta$ . Dacă înclinarea cilindrului este inversă, unghiul  $\alpha$  este negativ, funcția  $\sin \alpha < 0$  și accelerația longitudinală a particulei  $a_z = \ddot{z} < 0$ ; dacă a fost lansată cu viteză inițială longitudinală  $v_z = \dot{z} > 0$ , particula își va modifica după un timp sensul de mișcare revenind către poziția de lansare.

Repausul relativ cu frecare al particulei se produce atunci când când încetează mișcarea relativă a acesteia în raport cu cilindrul, ea continuând să se rotească împreună cu acesta. O primă condiție ar fi legată de anularea vitezei relative; din relațiile (15.51) și (15.52) se deduce că aceasta are loc atunci când  $\dot{\theta} = \omega$  și  $\dot{z} = 0$ . Această condiție este necesară dar nu și suficientă deoarece oprirea particulei poate corespunde momentului schimbării sensului de mișcare. Ea trebuie extinsă și la derivatele de ordinul II care indică și încetarea accelerației relative. Astfel repausul relativ este asigurat dacă  $\ddot{\theta} = \dot{\omega} = \varepsilon$  și  $\ddot{z} = 0$ . Punând aceste condiții în relațiile (15.62) acestea devin:

$$\begin{cases} mR\varepsilon = -G \cos \alpha \sin \theta + F_{f\tau} \\ mR\omega^2 = N - G \cos \alpha \cos \theta \\ 0 = G \sin \alpha + F_{fz} \end{cases} \quad (15.64)$$

Ca și în aplicația din capitolul precedent, există un domeniu de variație al unghiului  $\theta$  în care particula se află în repaus relativ față de cilindru. Pentru identificarea acestuia se pornește de la condiția pe care trebuie să o îndeplinească

forța de frecare totală într-o astfel de situație, respectiv:

$$|F_f| < \mu N \quad (15.65)$$

Componentele forței de frecare sunt reciproc perpendiculare și în consecință:

$$\sqrt{(F_{f\tau})^2 + (F_{fz})^2} < \mu N \quad (15.66)$$

Se explicitază termenii inecuației cu expresiile corespondente extrase din sistemul (15.64), respectiv:

$$\begin{cases} F_{f\tau} = mR\varepsilon + mg \cos\alpha \sin\theta \\ F_{fz} = -mg \sin\alpha \\ N = mR\omega^2 + mg \cos\alpha \cos\theta \end{cases} \quad (15.67)$$

și, simplificând cu masa  $m$ , se formează inecuația:

$$f(\theta) = \sqrt{(R\varepsilon + g \cos\alpha \sin\theta)^2 + (-g \sin\alpha)^2} - \mu(R\omega^2 + g \cos\alpha \cos\theta) < 0 \quad (15.68)$$

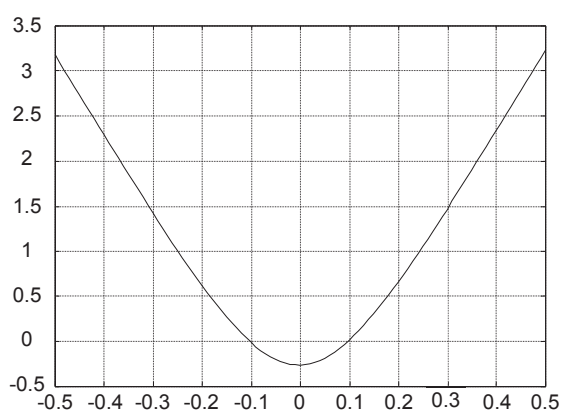


Fig.15.25

Rezolvarea ecuației trigonometrice  $f(\theta) = 0$  pe cale analitică este dificilă; rădăcinile acesteia, pot fi însă determinate pe cale numerică. Pentru un set de valori  $\omega$ ,  $\varepsilon$  și  $\mu$  se trasează curba  $f(\theta)$  pentru un interval corespunzător de variație al unghiului  $\theta$ . Astfel, pentru  $\omega = 0.8 s^{-1}$ ,  $\varepsilon = 0.1 s^{-2}$  și  $\mu = 0.2$  se obține diagrama din fig.15.25. Curba de variație este simetrică și admite două rădăcini egale și de semn contrar.

Dacă cele două rădăcini ale ecuației sunt reale, atunci există un interval cuprins între unghiurile  $\theta_1$  și  $\theta_2$  în care particula se află în repaus relativ cu frecare. Pentru exemplul considerat cele două rădăcini sunt  $\theta_1 = -0.1 rad$  și  $\theta_2 = 0.1 rad$ . Funcția  $f(\theta) < 0$  în intervalul cuprins între aceste limite.

Valorile acestor poziții extreme depind de coeficientul de frecare  $\mu$  și de parametrii  $\omega$  și  $\varepsilon$  ai rotației cilindrului. Dacă valoarea curentă a unghiului  $\theta$  se află între cele două limite particula se află în repaus relativ cu frecare; mișcarea relativă reîncepe atunci când valoarea curentă a unghiului  $\theta$  se situează în afara intervalului respectiv.

**Problema 15.3** În condițiile tratării teoretice de mai înainte, să se integreze ecuațiile mișcării particulei pe suprafața cilindrului, considerând că acesta se rotește având legea de mișcare  $\omega = \omega_0 + \varepsilon t$ .

**Date numerice:**  $R = 0.25m$ ,  $\alpha = 10^\circ$ ,  $\omega_0 = 0.8 s^{-1}$ ,  $\varepsilon = 0.2 s^{-2}$ ,  $m = 0.2 kg$ ,  $\mu = 0.1$ ;

Intervalul de integrare:  $0..5 s$ . Condițiile inițiale:  $\theta_0 = 0$ ,  $\dot{\theta}_0 = 0$ ,  $z_0 = 0$ ,  $\dot{z}_0 = 0$ .

**Rezolvare:** Pentru integrarea numerică a sistemului de ecuații (15.62) se alcătuiește un vector  $\mathbf{u}$  al soluțiilor și un vector  $\mathbf{dery}$  al derivatelor:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ z \\ \dot{z} \end{bmatrix} \quad (15.69) \quad \text{dery} = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \\ \dot{z} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ (-G \cos \alpha \sin \theta + F_{f\tau}) / mR \\ \dot{z} \\ (G \sin \alpha + F_{fz}) / m \end{bmatrix} \quad (15.70)$$

Vectorul condițiilor inițiale  $\mathbf{u0}$  conține poziția și viteza particulei la  $t = 0$ :

$$\mathbf{u0} = [\theta_0 \quad \dot{\theta}_0 \quad z_0 \quad \dot{z}_0] \quad (15.71)$$

Programul MATLAB are următoarea configurație:

#### cilindru.m

```
% MISCAREA RELATIVA A PARTICULEI PE CILINDRU
clear; close all;
global R M G1 GZ OM0 EPS CA SA MIU
% DATE NUMERICE
R=0.25;
M=0.2;
OM0=0.8; EPS=0.2;
alfa=pi/18;
g=9.81;
MIU=0.1;
teta0=0; tetap0=0;
z0=0; vz0=0;
% CONSTANTE
CA=cos(alfa); SA=sin(alfa);
G=M*g; G1=G*CA; GZ=G*SA;
% INTERVALUL DE INTEGRARE
tmin=0; tmax=5;
timp=[tmin, tmax];
% CONDITIILE INITIALE
u0=[teta0, tetap0, z0, vz0];
% INTEGEAREA
[t,u]=ode45('deriv',timp,u0);
teta=u(:,1);
tetap=u(:,2);
z=u(:,3);
zp=u(:,4);
figure(1);plot(t,teta); grid;
figure(2);plot(t,tetap); grid;
figure(3);plot(t,z); grid;
figure(4);plot(t,zp); grid;
```

#### deriv.m

```
function dery=deriv(t,u);
global R M G1 GZ OM0 EPS CA SA MIU
teta=u(1); tetap=u(2);
z=u(3); zp=u(4);
ct=cos(teta);
st=sin(teta);
om=OM0+EPS*t;
vrt=R*(tetap-om);
vrz=zp;
vr=sqrt(vrt^2+vrz^2);
N=M*R*tetap^2+G1*ct;
Fft=-MIU*N*vrt/vr;
Ffz=-MIU*N*vrz/vr;
tetapp=(-G1*st+Fft)/(M*R);
zpp=(GZ+Ffz)/M;
dery=[tetap; tetapp; zp; zpp];
```

Diagramele obținute prin rularea programului sunt prezentate în fig.15.26.

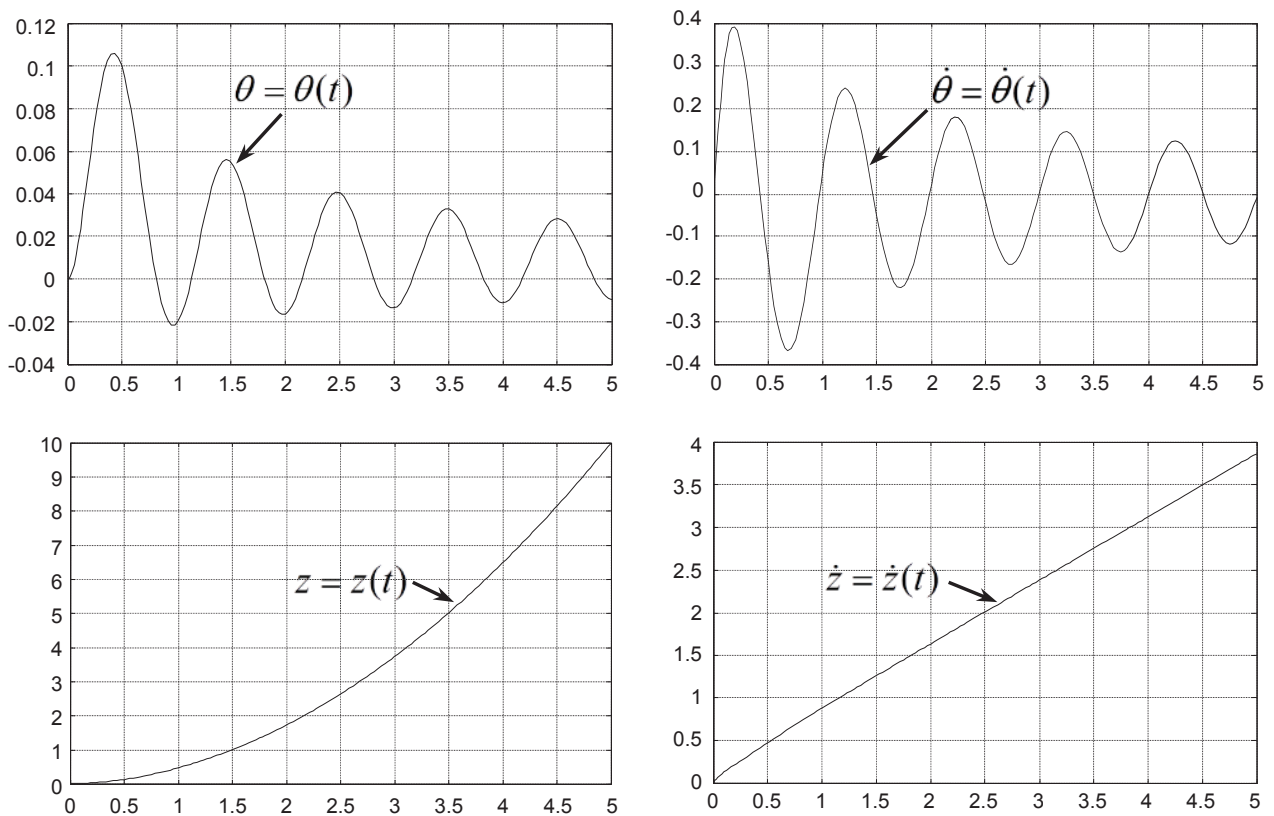


Fig.15.26