

BAZELE MECANICII APLICATE**PARTEA V-a DINAMICA SOLIDULUI RIGID
CONȚINUT**

16. MOMENTE DE INERȚIE MECANICE	306
16.1 Generalități.....	306
16.2 Variația momentelor de inerție față de axe paralele.....	308
16.3 Variația momentelor de inerție față de axe concurente	309
16.4 Direcții și momente principale de inerție	311
16.5 Momente de inerție uzuale	316
16.5.1 Relațiile generale.....	316
16.5.2 Momentele de inerție la barele omogene	317
16.5.3 Momentele de inerție la plăcile omogene	319
16.5.4 Momentele de inerție la volumele omogene	328
16.5.5 Metode speciale de calcul.....	334
17. DINAMICA SOLIDULUI RIGID	337
17.1 Calculul parametrilor dinamici	337
17.1.1 Generalități	337
17.1.2 Cazul mișcării de translație.....	338
17.1.3 Cazul mișcării de rotație în jurul unui punct fix.....	339
17.1.4 Cazul mișcării de rotație în jurul unei axe fixe.....	341
17.1.5 Cazul mișcării plan-paralele	343
17.2 Teoremele generale în dinamica solidului rigid.....	344
17.3 Teoremele generale în mișcarea relativă a solidului rigid față de centrul său de masă	346
17.4 Discuție asupra teoremelor generale	349
18. DINAMICA MIȘCĂRILOR PARTICULARE ALE SOLIDULUI RIGID	352
18.1 Mișcarea de translație	352
18.2 Mișcarea de rotație față de o axă fixă.....	352
18.2.1 Sistemul de ecuații	352
18.2.2 Echilibrarea rotorilor	355
18.2.3 Pendulul fizic	357
18.3 Mișcarea de rotație față de un punct fix	360
18.3.1 Sistemul de ecuații	360
18.3.2 Giroscopul	362
18.3.3 Efectul giroscopic	368
18.4 Mișcarea plan-paralelă.....	369
19. DINAMICA SISTEMELOR DE CORPURI	372
19.1 Generalități.....	372
19.2 Metoda impulsului.....	373
19.3 Metoda energiei cinetice	377

20. CIOCNIRI ȘI PERCUȚII	381
20.1 Generalități.....	381
20.2 Teoremele generale în studiul ciocnirilor.....	382
20.3 Ciocnirea centrică a două sfere.....	384
20.4 Ciocnirea oblică a două sfere	387
20.5 Ciocnirea unei sfere cu o suprafață fixă	388
20.6 Ciocnirea unei sfere cu un corp rotitor.....	389

PARTEA V-a DINAMICA SOLIDULUI RIGID

16. MOMENTE DE INERȚIE MECANICE

16.1 Generalități

Pentru caracterizarea distribuției masei unui corp în raport cu un reper geometric (punct, axă, plan, etc.) se utilizează o mărime numită *moment de inerție mecanic*; notația curentă utilizată pentru acest parametru masic este simbolul J , însoțit de indici referitori la reperul geometric respectiv. În exprimarea curentă atributul “mecanic” se omite; el este totuși necesar atunci când trebuie făcută deosebirea de momentul de inerție geometric I al secțiunii unei bare (important în calculul de rezistență) sau de momentul rezultat M_i al forțelor de inerție.

Momentele de inerție sunt utilizate la calculul parametrilor dinamici ai unui corp (momentul cinetic, energia cinetică) specifici mișcării de rotație a acestuia.

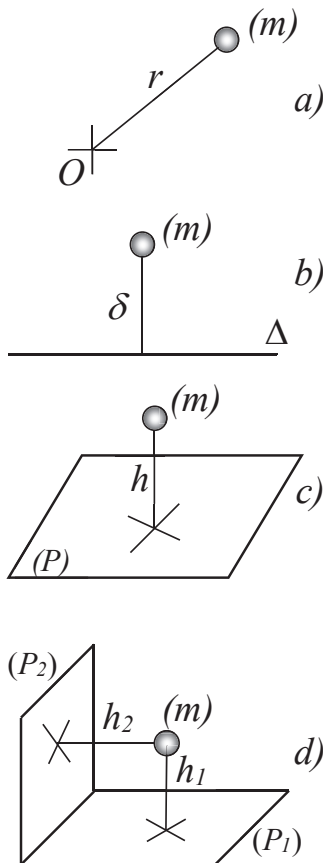


Fig.16.1

Clasificarea momentelor de inerție se face în funcție de reperul geometric în raport cu care se calculează. Considerând, de exemplu, un punct material, momentul său de inerție se obține înmulțind masa acestuia cu pătratul distanței la reperul respectiv (fig.16.1). Se deosebesc:

– *momentul de inerție polar* (fig.16.1, a):

$$J_O = m r^2 \quad (16.1)$$

în care r este distanța la punctul de reper O ;

– *momentul de inerție axial* (fig.16.1, b):

$$J_\Delta = m \delta^2 \quad (16.2)$$

în care δ reprezintă lungimea perpendicularei pe axa Δ ;

– *momentul de inerție planar* (fig.16.1, c):

$$J_{(P)} = m h^2 \quad (16.3)$$

în care h este distanța la planul (P) , măsurată pe perpendiculara coborâtă pe acesta;

– *momentul de inerție centrifugal* (fig.16.1, d):

$$J_{(P_1, P_2)} = m h_1 h_2 \quad (16.4)$$

în care h_1 și h_2 sunt distanțele la două plane, de regulă perpendiculare între ele.

Momentele de inerție ale solidului rigid se determină în special pentru situația în care reperatele geometrice menționate aparțin unui sistem de referință cartezian. În locul masei punctului material se va considera o masă elementară dm din configurația corpului, prin m înțelegându-se în acest caz masa totală a acestuia (fig.16.2). Pentru masa elementară dm se calculează un moment de inerție elementar dJ astfel că pentru întregul corp momentul de inerție va fi:

$$J = \int_{(m)} dJ \quad (16.5)$$

– *momentul de inerție polar* față de originea O a sistemului de referință se va calcula cu relația generală:

$$J_O = \int_{(m)} r^2 dm = \int_{(m)} (x^2 + y^2 + z^2) dm \quad (16.6)$$

în care $r = OP$ iar x, y, z sunt coordonatele masei elementare.

– *momentele de inerție axiale* față de Ox , Oy și Oz se definesc prin relațiile:

$$\begin{aligned} J_x &= \int_{(m)} \delta_x^2 dm = \int_{(m)} (y^2 + z^2) dm \\ J_y &= \int_{(m)} \delta_y^2 dm = \int_{(m)} (z^2 + x^2) dm \end{aligned} \quad (16.7)$$

$$J_z = \int_{(m)} \delta_z^2 dm = \int_{(m)} (x^2 + y^2) dm$$

– *momentele de inerție planare* au în acest caz expresiile:

$$J_{xOy} = \int_{(m)} z^2 dm \quad J_{yOz} = \int_{(m)} x^2 dm \quad J_{zOx} = \int_{(m)} y^2 dm \quad (16.8)$$

– *momentele de inerție centrifugale* au o notație simplificată:

$$J_{xy} = \int_{(m)} xy dm \quad J_{yz} = \int_{(m)} yz dm \quad J_{zx} = \int_{(m)} zx dm \quad (16.9)$$

Sunt evidente egalitățile:

$$J_{xy} = J_{yx} \quad J_{yz} = J_{zy} \quad J_{zx} = J_{xz} \quad (16.10)$$

Momentele de inerție mecanice sunt mărimi scalare pozitive; fac excepție cele centrifugale care pot fi și negative. Se poate observa cu ușurință că între momentele de inerție ale unui corp tridimensional există următoarele relații:

$$J_O = \frac{1}{2}(J_x + J_y + J_z) \quad (16.11) \quad J_O = J_{xOy} + J_{yOz} + J_{zOx} \quad (16.12)$$

În cazul unei plăci plane, poziționată într-un sistem de referință Oxy (fig.16.3), orice masă elementară are coordonata $z = 0$. Pentru momentele de inerție relațiile generale se stabilesc în acest caz particularizând expresiile stabilite pentru corpul tridimensional, după cum urmează:

– *momentul de inerție polar*:

$$J_O = \int_{(m)} r^2 dm = \int_{(m)} (x^2 + y^2) dm \quad (16.13)$$

– *momentele de inerție axiale*:

$$J_x = \int_{(m)} y^2 dm \quad J_y = \int_{(m)} x^2 dm \quad J_z = \int_{(m)} (x^2 + y^2) dm \quad (16.14)$$

– *momentele de inerție planare*:

$$J_{xOy} = 0 \quad J_{yOz} = \int_{(m)} x^2 dm \quad J_{zOx} = \int_{(m)} y^2 dm \quad (16.15)$$

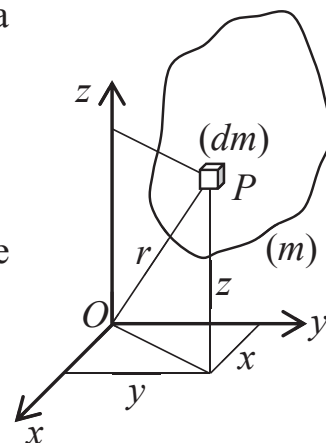


Fig.16.2

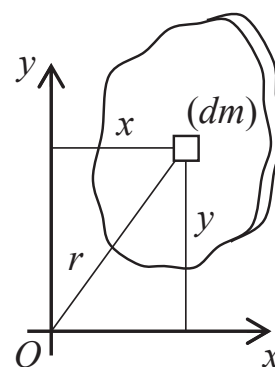


Fig.16.3

– momentele de inerție centrifugale:

$$J_{xy} = \int_{(m)} xy \, dm \quad J_{yz} = J_{zx} = 0 \quad (16.16)$$

Și în acest caz se poate pune în evidență o relație importantă între momentele de inerție ale plăcii:

$$J_O = J_z = J_x + J_y \quad (16.17)$$

Se deduce că momentul de inerție polar al unei plăci este egal cu momentul de inerție față de o axă perpendiculară pe placă în punctul respectiv; totodată, momentul de inerție polar față de punctul de intersecție al unor axe reciproc perpendiculare este egal cu suma momentelor de inerție față de aceste axe.

16.2 Variația momentelor de inerție față de axe paralele

Se consideră cunoscute momentele de inerție ale unui corp față de un sistem de referință $Oxyz$; se determină, în funcție de acestea, momentele de inerție față de sistemul de referință $Cx_1y_1z_1$ cu originea în centrul său de masă și ale căror axe sunt paralele cu cele ale sistemului dat (fig.16.4). Între coordonatele masei elementare dm în cele două sisteme de referință există relațiile:

$$x_1 = x - a \quad y_1 = y - b \quad z_1 = z - c \quad (16.18)$$

în care a, b, c sunt coordonatele punctului C în sistemul $Oxyz$.

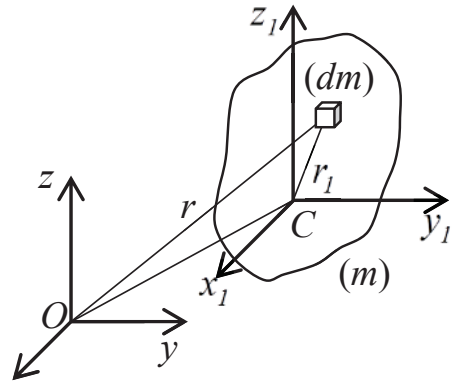


Fig.16.4

Pentru determinarea momentului de inerție polar față de punctul C se procedează în modul următor:

$$\begin{aligned} J_C &= \int_{(m)} (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) dm = \int_{(m)} [(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2] dm = \\ &= \int_{(m)} (x^2 + y^2 + z^2) dm + (a^2 + b^2 + c^2) \int_{(m)} dm - 2a \int_{(m)} x dm - 2b \int_{(m)} y dm - 2c \int_{(m)} z dm \end{aligned} \quad (16.19)$$

Pentru coordonatele centrului de masă C în sistemul $Oxyz$ se cunosc relațiile:

$$ma = \int_{(m)} x dm \quad mb = \int_{(m)} y dm \quad mc = \int_{(m)} z dm \quad (16.20)$$

Cu observația că $a^2 + b^2 + c^2 = OC^2$ și $\int_{(m)} dm = m$ relația (16.19) ia forma:

$$J_C = J_O - mOC^2 \quad (16.21)$$

În mod asemănător se procedează și pentru momentele de inerție axiale:

$$\begin{aligned} J_{x1} &= \int_{(m)} (y_1^2 + z_1^2) dm = \int_{(m)} [(y-b)^2 + (z-c)^2] dm = \\ &= \int_{(m)} (y^2 + z^2) dm + (b^2 + c^2) \int_{(m)} dm - 2b \int_{(m)} y dm - 2c \int_{(m)} z dm \end{aligned} \quad (16.22)$$

Se notează prin $\delta_x = \sqrt{b^2 + c^2}$ distanța dintre axele Ox_l și Cx și, ținând cont de observațiile precedente referitoare la centrul de masă, relația (16.22) devine:

$$J_{x_l} = J_x - m\delta_x^2 \quad (16.23)$$

În mod analog,

$$J_{y_l} = J_y - m\delta_y^2 \quad J_{z_l} = J_z - m\delta_z^2 \quad (16.24)$$

Pentru momentele de inerție centrifugale se calculează:

$$\begin{aligned} J_{x_l y_l} &= \int_{(m)} x_l y_l dm = \int_{(m)} (x-a)(y-b) dm = \\ &= \int_{(m)} xy dm + ab \int_{(m)} dm - a \int_{(m)} y dm - b \int_{(m)} x dm = J_{xy} - mab \end{aligned} \quad (16.25)$$

Celelalte momente de inerție centrifugale sunt:

$$J_{y_l z_l} = J_{yz} - mbc \quad J_{z_l x_l} = J_{zx} - mca \quad (16.26)$$

Revenind asupra momentelor de inerție axiale, se poate face o generalizare:

$$J_{\Delta_l} = J_{\Delta} + md^2 \quad (16.27)$$

Această expresie, cunoscută în Mecanică sub denumirea de *relația lui Steiner*, precizează că momentul de inerție mecanic față de o axă oarecare Δ_l se poate calcula însumând momentul de inerție față de o axă Δ , paralelă cu Δ_l și care trece prin centrul de masă al corpului, cu produsul dintre masa acestuia și pătratul distanței dintre cele două axe (fig.16.5).

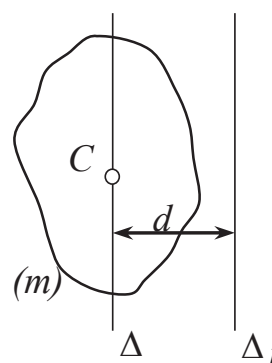


Fig.16.5

Relația (16.27) mai pune în evidență și faptul că momentele de inerție față de axe care trec prin centrul de masă al unui corp au valori minime.

16.3 Variația momentelor de inerție față de axe concurente

Se consideră cunoscute momentele de inerție axiale și centrifugale ale unui corp față de axele unui sistem de referință $Oxzy$ (fig.16.6); se cere să se determine momentul de inerție axial față de o direcție Δ poziționată în sistemul respectiv prin unghiurile directoare α, β, γ .

Se atașează direcției Δ un versor \bar{u} a cărui dezvoltare vectorială în funcție de unghiurile directoare și de versorii axelor de coordonate este:

$$\bar{u} = \cos\alpha \bar{i} + \cos\beta \bar{j} + \cos\gamma \bar{k} \quad (16.28)$$

Între cosinusurile directoare există relația:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 \quad (16.29)$$

Momentul de inerție axial față de direcția Δ este definit prin relația generală:

$$J_{\Delta} = \int_{(m)} \delta^2 dm \quad (16.30)$$

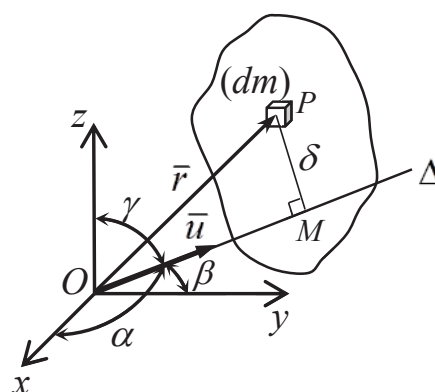


Fig.16.6

în care δ este lungimea perpendicularei pe direcția Δ dusă din punctul $P(x,y,z)$ în care se află masa elementară dm . Din triunghiul dreptunghic OPM se deduce:

$$\delta^2 = PM^2 = OP^2 - OM^2 \quad (16.31)$$

Pentru termenii acestei relații se pot face următoarele prelucrări:

$$OP^2 = |\bar{r}|^2 = (x^2 + y^2 + z^2)(\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) \quad (16.32)$$

$$OM = pr_{\Delta} \bar{r} = \bar{r} \cdot \bar{u} = (x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}) \cdot (\cos \alpha \bar{i} + \cos \beta \bar{j} + \cos \gamma \bar{k}) = \\ = x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma \quad (16.33)$$

Se fac înlocuirile în relația (16.31) și se obține:

$$\delta^2 = (y^2 + z^2) \cos \alpha + (y^2 + x^2) \cos \beta + (z^2 + x^2) \cos \gamma - \\ - 2xy \cos \alpha \cos \beta - 2yz \cos \beta \cos \gamma - 2zx \cos \gamma \cos \alpha \quad (16.34)$$

Cu această determinare, momentul de inerție față de direcția Δ devine:

$$J_{\Delta} = \cos^2 \alpha \int_{(m)} (y^2 + z^2) dm + \cos^2 \beta \int_{(m)} (z^2 + x^2) dm + \cos^2 \gamma \int_{(m)} (z^2 + x^2) dm - \\ - 2 \cos \alpha \cos \beta \int_{(m)} xy dm - 2 \cos \beta \cos \gamma \int_{(m)} yz dm - 2 \cos \gamma \cos \alpha \int_{(m)} zx dm \quad (16.35)$$

Se recunosc în integralele din această expresie relațiile de definiție ale momentelor axiale și centrifugale față de axele sistemului de referință $Oxyz$. Se obține în final:

$$J_{\Delta} = J_x \cos^2 \alpha + J_y \cos^2 \beta + J_z \cos^2 \gamma \\ - 2J_{xy} \cos \alpha \cos \beta - 2J_{yz} \cos \beta \cos \gamma - 2J_{zx} \cos \gamma \cos \alpha \quad (16.36)$$

Această relație poate fi pusă și sub o formă matriceală:

$$J_{\Delta} = [\cos \alpha \quad \cos \beta \quad \cos \gamma] \begin{bmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \cos \beta \\ \cos \gamma \end{bmatrix} \quad (16.37)$$

Folosind pentru notarea matricelor și a vectorilor o simbolizare adecvată (în cazul de față prin caractere îngroșate – „bold”), relația de mai sus se poate scrie:

$$J_{\Delta} = \mathbf{u}_t \mathbf{J} \mathbf{u} \quad (16.38)$$

în care s-au notat:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_z \end{bmatrix} \quad (16.39) \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \cos \beta \\ \cos \gamma \end{bmatrix} \quad (16.40)$$

Matricea \mathbf{J} conține toate momentele de inerție axiale și centrifugale; se observă că momentele axiale sunt dispuse pe diagonala principală iar cele centrifugale, luate cu semn schimbat, sunt dispuse simetric față de aceasta; s-a arătat mai înainte (rel.16.10) că momentele centrifugale cu aceiași indici sunt egale între ele. Matricea \mathbf{J} se va numi în continuare *matricea de inerție* a corpului față de sistemul de referință $Oxyz$. Elementele vectorului coloană \mathbf{u} , corespunzător versorului \bar{u} , sunt cosinusurile directoare ale direcției Δ ; \mathbf{u}_t este transpusa lui \mathbf{u} (se reamintește că prin transpunere liniile unei matrici devin coloane iar coloanele devin linii).

16.4 Direcții și momente principale de inerție

Relația (16.36) pune în evidență faptul că momentul de inerție J_{Δ} față de o direcție oarecare este o mărime variabilă în funcție de cele trei unghiuri directoare α, β, γ , respectiv în funcție de cosinusurile acestora:

$$J_{\Delta} = J_{\Delta}(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) \quad (16.41)$$

Pentru aplicații este deosebit de importantă determinarea extremelor acestei funcții, respectiv a valorilor maxime și minime, precum și a direcțiilor corespunzătoare acestor extreme. Se va utiliza în acest scop *metoda multiplicatorilor lui Lagrange*.

Se alcătuește o funcție auxiliară de forma:

$$\Phi = J_{\Delta} + \lambda\varphi \quad (16.42)$$

în care λ este un multiplicator Lagrange. Ținând cont de relația (16.29) dintre cosinusurile directoare, se notează:

$$\varphi = 1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma = 0 \quad (16.43)$$

Condițiile de extrem pentru funcția auxiliară Φ impun ca derivatele parțiale în raport cu fiecare din cele trei variabile să fie nule:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial(\cos\alpha)} = 0 \quad \frac{\partial\Phi}{\partial(\cos\beta)} = 0 \quad \frac{\partial\Phi}{\partial(\cos\gamma)} = 0 \quad (16.44)$$

Prima din aceste derivate are expresia:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial(\cos\alpha)} = 2J_x \cos\alpha - 2J_{xy} \cos\beta - 2J_{xz} \cos\gamma - 2\lambda \cos\alpha = 0 \quad (16.45)$$

În mod analog se fac calculele și pentru celelalte două derivate. Se obține un sistem de ecuații liniare omogene având ca necunoscute cosinusurile directoare:

$$\begin{cases} (J_x - \lambda)\cos\alpha - J_{xy}\cos\beta - J_{xz}\cos\gamma = 0 \\ -J_{yx}\cos\alpha + (J_y - \lambda)\cos\beta - J_{yz}\cos\gamma = 0 \\ -J_{zx}\cos\alpha - J_{zy}\cos\beta + (J_z - \lambda)\cos\gamma = 0 \end{cases} \quad (16.46)$$

Acest sistem poate fi pus sub forma matriceală:

$$\begin{bmatrix} J_x - \lambda & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_y - \lambda & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_z - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (16.47)$$

Același sistem mai poate fi pus și sub forma echivalentă:

$$\begin{bmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{bmatrix} \quad (16.48)$$

care, ținând cont de notațiile simbolice din relațiile (16.39) și (16.40), se mai poate scrie concentrat:

$$\mathbf{J}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u} \quad (16.49)$$

Cosinusurile directoare nu pot fi simultan toate nule astfel încât condiția (16.47) este îndeplinită numai dacă determinantul coeficienților este nul. Dezvoltând acest determinat se obține ecuația caracteristică de gradul 3 în parametrul λ având forma generală:

$$a\lambda^3 + b\lambda^2 + c\lambda + d = 0 \quad (16.50)$$

Rădăcinile acestei ecuații satisfac fiecare condiția de anulare a valorii determinantului. Fiind de natura unor momente de inerție axiale, aceste rădăcini se vor nota:

$$\lambda_1 = J_1 \quad \lambda_2 = J_2 \quad \lambda_3 = J_3 \quad (16.51)$$

Înlocuind succesiv aceste valori în sistemul (16.46) sau (16.47) se pot calcula trei seturi de sinusuri directoare, fiecare set corespunzând uneia din direcțiile căutate. Astfel, pentru $\lambda = J_1$ sistemul ia forma:

$$\begin{bmatrix} J_x - J_1 & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_y - J_1 & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_z - J_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha_1 \\ \cos\beta_1 \\ \cos\gamma_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (16.52)$$

Prin rezolvarea acestuia se obțin sinusurile directoare ale uneia dintre direcțiile căutate, notată în acest caz Δ_1 . În mod analog, pentru $\lambda = J_2$ și $\lambda = J_3$ se obțin sinusurile directoare ale unor direcții Δ_2 și Δ_3 .

Cele trei direcții Δ_1 , Δ_2 și Δ_3 se numesc *direcții principale de inerție* iar momentele J_1 , J_2 și J_3 se numesc *momente principale de inerție*. Valorile maximă și respectiv minimă ale funcției J_Δ se găsesc printre aceste valori.

Se poate demonstra că cele trei direcții principale de inerție sunt reciproc perpendiculare. Demonstrația se face mai comod apelând la cunoștințele de analiză matriceală. Astfel, fiecareia dintre direcții i se poate atașa câte un versor:

$$\begin{aligned} \bar{u}_1 &= \cos\alpha_1 \bar{i} + \cos\beta_1 \bar{j} + \cos\gamma_1 \bar{k} \\ \bar{u}_2 &= \cos\alpha_2 \bar{i} + \cos\beta_2 \bar{j} + \cos\gamma_2 \bar{k} \\ \bar{u}_3 &= \cos\alpha_3 \bar{i} + \cos\beta_3 \bar{j} + \cos\gamma_3 \bar{k} \end{aligned} \quad (16.53)$$

Conform relației (16.40), vectorii coloană corespunzători acestor versori sunt:

$$\mathbf{u1} = \begin{bmatrix} \cos\alpha_1 \\ \cos\beta_1 \\ \cos\gamma_1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{u2} = \begin{bmatrix} \cos\alpha_2 \\ \cos\beta_2 \\ \cos\gamma_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{u3} = \begin{bmatrix} \cos\alpha_3 \\ \cos\beta_3 \\ \cos\gamma_3 \end{bmatrix} \quad (16.54)$$

Luând, de exemplu, versorii \bar{u}_1 și \bar{u}_2 , aceștia vor fi perpendiculari dacă produsul lor scalar este nul, respectiv dacă:

$$\begin{aligned} \bar{u}_1 \cdot \bar{u}_2 &= \mathbf{u1}_t \mathbf{u2} = [\cos\alpha_1 \quad \cos\beta_1 \quad \cos\gamma_1] \begin{bmatrix} \cos\alpha_2 \\ \cos\beta_2 \\ \cos\gamma_2 \end{bmatrix} = \\ &= \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \cos\beta_1 \cos\beta_2 + \cos\gamma_1 \cos\gamma_2 = 0 \end{aligned} \quad (16.55)$$

Pentru a demonstra nulitatea produsului scalar respectiv se particularizează mai întâi relația matriceală (16.49) pentru $\lambda = J_1$ și $\lambda = J_2$:

$$\mathbf{J} \mathbf{u}_1 = J_1 \mathbf{u}_1 \quad (16.56) \quad \mathbf{J} \mathbf{u}_2 = J_2 \mathbf{u}_2 \quad (16.57)$$

Prima relație se înmulțește la stânga cu vectorul \mathbf{u}_{2_t} iar cea de a doua cu \mathbf{u}_{1_t} :

$$\mathbf{u}_{2_t} \mathbf{J} \mathbf{u}_1 = J_1 \mathbf{u}_{2_t} \mathbf{u}_1 \quad (16.58) \quad \mathbf{u}_{1_t} \mathbf{J} \mathbf{u}_2 = J_2 \mathbf{u}_{1_t} \mathbf{u}_2 \quad (16.59)$$

În continuare se procedează la transpunerea relația (16.58). Trebuie făcută precizarea că matricea de inerție \mathbf{J} este simetrică și în consecință $\mathbf{J}_t = \mathbf{J}$. Se reamintește că la transpunerea unui produs de matrici ordinea acestora se inversează iar transpusa transpusei unei matrici este matricea respectivă. Se obține:

$$\mathbf{u}_{1_t} \mathbf{J} \mathbf{u}_2 = J_1 \mathbf{u}_{1_t} \mathbf{u}_2 \quad (16.60)$$

Comparând această relație cu (16.59) se constată egalitatea:

$$J_1 \mathbf{u}_{1_t} \mathbf{u}_2 = J_2 \mathbf{u}_{1_t} \mathbf{u}_2 \quad (16.61)$$

sau, trecând totul în partea stângă:

$$(J_1 - J_2) \mathbf{u}_{1_t} \mathbf{u}_2 = 0 \quad (16.62)$$

În cazul general $J_1 \neq J_2$, astfel că produsul scalar $\mathbf{u}_{1_t} \mathbf{u}_2 = 0$, ceea ce era de demonstrat în relația (16.55). În mod analog se poate demonstra că versorul \bar{u}_3 este perpendicular pe \bar{u}_1 și \bar{u}_2 . Se confirmă astfel că direcțiile principale de inerție sunt perpendiculare una pe cealaltă.

Pe baza relației generale (16.38) momentele principale de inerție se pot exprima sub formă matriceală după cum urmează:

$$J_1 \equiv J_{\Delta_1} = \mathbf{u}_{1_t} \mathbf{J} \mathbf{u}_1 \quad J_2 \equiv J_{\Delta_2} = \mathbf{u}_{2_t} \mathbf{J} \mathbf{u}_2 \quad J_3 \equiv J_{\Delta_3} = \mathbf{u}_{3_t} \mathbf{J} \mathbf{u}_3 \quad (16.63)$$

S-a demonstrat mai sus că $\mathbf{u}_{1_t} \mathbf{u}_2 = 0$; se deduce că partea stângă a relației (16.59) este nulă. Generalizând această observație pentru toate produsele scalare dintre versorii $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3$ se deduc relațiile matriceale:

$$\begin{array}{lll} \mathbf{u}_{1_t} \mathbf{J} \mathbf{u}_2 = 0 & \mathbf{u}_{2_t} \mathbf{J} \mathbf{u}_3 = 0 & \mathbf{u}_{3_t} \mathbf{J} \mathbf{u}_1 = 0 \\ \mathbf{u}_{2_t} \mathbf{J} \mathbf{u}_1 = 0 & \mathbf{u}_{3_t} \mathbf{J} \mathbf{u}_2 = 0 & \mathbf{u}_{1_t} \mathbf{J} \mathbf{u}_3 = 0 \end{array} \quad (16.64)$$

Pornind de la matricea de inerție \mathbf{J} , calculată față de sistemul de referință dat $Oxyz$, se poate calcula o matrice de inerție \mathbf{J}^* față de un sistem de axe alcătuit din cele trei direcții principale de inerție Δ_1, Δ_2 și Δ_3 . În acest scop se alcătuieste o matrice de transformare \mathbf{U} care va conține cosinusurile directe ale acestor axe față de cele inițiale:

$$\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \ \mathbf{u}_3] = \begin{bmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\alpha_2 & \cos\alpha_3 \\ \cos\beta_1 & \cos\beta_2 & \cos\beta_3 \\ \cos\gamma_1 & \cos\gamma_2 & \cos\gamma_3 \end{bmatrix} \quad (16.65)$$

Relația matriceală de transformare se poate pune sub forma simbolică:

$$\mathbf{J}^* = \mathbf{U}_t \mathbf{J} \mathbf{U} \quad (16.66)$$

sau, sub forma detaliată:

$$\mathbf{J}^* = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\beta_1 & \cos\gamma_1 \\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2 & \cos\gamma_2 \\ \cos\alpha_3 & \cos\beta_3 & \cos\gamma_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\alpha_2 & \cos\alpha_3 \\ \cos\beta_1 & \cos\beta_2 & \cos\beta_3 \\ \cos\gamma_1 & \cos\gamma_2 & \cos\gamma_3 \end{bmatrix} \quad (16.67)$$

Elementele matricii de inerție \mathbf{J}^* se obțin aplicând regulile de înmulțire matriceală. Astfel, ținând cont de relațiile (16.63) și (16.64) elementele acesteia sunt:

$$\begin{aligned} J_{11} &= \mathbf{u1}_t \mathbf{J} \mathbf{u1} = J_1 & J_{12} &= \mathbf{u1}_t \mathbf{J} \mathbf{u2} = 0 & J_{13} &= \mathbf{u1}_t \mathbf{J} \mathbf{u3} = 0 \\ J_{21} &= \mathbf{u2}_t \mathbf{J} \mathbf{u1} = 0 & J_{22} &= \mathbf{u2}_t \mathbf{J} \mathbf{u2} = J_2 & J_{23} &= \mathbf{u2}_t \mathbf{J} \mathbf{u3} = 0 \\ J_{31} &= \mathbf{u3}_t \mathbf{J} \mathbf{u1} = 0 & J_{32} &= \mathbf{u3}_t \mathbf{J} \mathbf{u2} = 0 & J_{33} &= \mathbf{u3}_t \mathbf{J} \mathbf{u3} = J_3 \end{aligned} \quad (16.68)$$

În final, matricea de inerție \mathbf{J}^* față de direcțiile principale de inerție are o formă diagonală, elementele acesteia fiind tocmai momentele principale de inerție:

$$\mathbf{J}^* = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{bmatrix} \quad (16.69)$$

Recapitulând cele demonstrate mai înainte, în cazul raportării corpului la un sistem de referință $Oxzy$ oarecare, se pot pune în evidență câteva concluzii:

- există trei direcții principale de inerție, reciproc perpendiculare, concurente în originea O a sistemului de referință;
- valorile extreme ale momentelor de inerție axiale se află printre momentele principale de inerție;
- față de direcțiile principale de inerție momentele centrifugale sunt nule.

În cazul în care sistemul de referință are originea în centrul de masă al corpului se mai pot face următoarele precizări:

- ținând cont de relația lui Steiner (16.27) care arată că momentele de inerție axiale au valori minime față de direcții care trec prin centrul de masă al corpului, se deduce că în acest caz toate momentele de inerție principale au valori minimale;
- conform celor arătate în Statică, dacă un corp are una sau mai multe axe de simetrie, centrul lui de masă se va afla pe axa sau la intersecția axelor respective; în consecință axele de simetrie se află printre direcțiile principale de inerție;
- față de axele de simetrie ale corpului momentele centrifugale sunt nule.

O observație deosebit de importantă pentru aplicațiile practice rezolvate pe calculator este aceea că momentele principale de inerție sunt valorile proprii ale matricii de inerție; toate mediile de programare cu specific matematic posedă programe destinate calculării acestor valori.

Studiului privitor la direcțiile și momentele principale de inerție i se poate adăuga și o interesantă interpretare geometrică, mai puțin utilă însă în aplicațiile practice. Astfel, pe o direcție oarecare Δ (fig.16.7) se marchează un punct A astfel încât distanța OA să fie corelată, făcând abstracție de elementele dimensionale, cu valoarea momentului de inerție față de această direcție prin intermediul relației:

$$OA = \frac{l}{\sqrt{J_{\Delta}}} \quad (16.70)$$

Vectorul de poziție al punctului A va fi:

$$\begin{aligned} \overline{OA} &= OA \cdot \vec{u} = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{J_{\Delta}}} \vec{i} + \frac{\cos\beta}{\sqrt{J_{\Delta}}} \vec{j} + \frac{\cos\gamma}{\sqrt{J_{\Delta}}} \vec{k} = \\ &= x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \end{aligned} \quad (16.71)$$

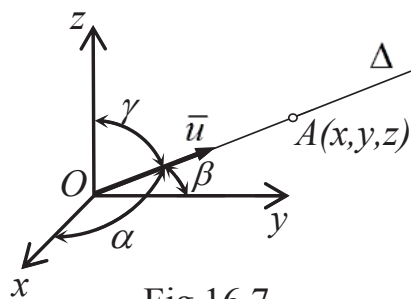


Fig.16.7

Rezultă pentru punctul A coordonatele:

$$x = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{J_{\Delta}}} \quad y = \frac{\cos\beta}{\sqrt{J_{\Delta}}} \quad z = \frac{\cos\gamma}{\sqrt{J_{\Delta}}} \quad (16.72)$$

Din relația de definiție pentru momentul de inerție J_{Δ} , stabilită anterior, respectiv:

$$\begin{aligned} J_{\Delta} &= J_x \cos^2 \alpha + J_y \cos^2 \beta + J_z \cos^2 \gamma \\ &\quad - 2J_{xy} \cos\alpha \cos\beta - 2J_{yz} \cos\beta \cos\gamma - 2J_{zx} \cos\gamma \cos\alpha \end{aligned} \quad (16.73)$$

se obține, după împărțirea cu J_{Δ} :

$$J_x x^2 + J_y y^2 + J_z z^2 - 2J_{xy} xy - 2J_{yz} yz - 2J_{zx} zx = l \quad (16.74)$$

Se deduce că locul geometric al punctului A este reprezentat de suprafața unui elipsoid cu centrul în punctul O numit *elipsoidul de inerție*.

În sistemul de referință format de direcțiile principale de inerție $\Delta_1 \equiv x'$, $\Delta_2 \equiv y'$ și $\Delta_3 \equiv z'$ (fig.16.8), acest elipsoid va avea ecuația:

$$J_1 x'^2 + J_2 y'^2 + J_3 z'^2 = l \quad (16.75)$$

deoarece, așa cum s-a arătat mai sus, momentele de inerție centrifugale sunt în acest caz nule. Direcțiile principale de inerție sunt axele de simetrie ale acestui elipsoid iar semiaxele acestuia au expresiile:

$$a = \frac{l}{\sqrt{J_1}} \quad b = \frac{l}{\sqrt{J_2}} \quad c = \frac{l}{\sqrt{J_3}} \quad (16.76)$$

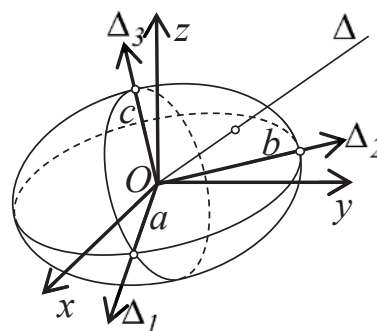


Fig.16.8

În acest sistem momentul de inerție față de direcția Δ va fi dat de relația:

$$J_{\Delta} = J_1 \cos^2 \alpha' + J_2 \cos^2 \beta' + J_3 \cos^2 \gamma' \quad (16.77)$$

în care α' , β' , γ' sunt unghiurile directe ale acesteia față de Δ_1 , Δ_2 și Δ_3 .

16.5 Momente de inerție uzuale

16.5.1 Relațiile generale

Pentru corpurile omogene uzuale din categoriile de modele bare, plăci și volume se determină momentele de inerție polare, axiale și centrifugale în raport cu un sistem de referință $Oxyz$ convenabil ales. Se reamintesc relațiile generale:

$$J_O = \int_{(m)} r^2 dm = \int_{(m)} (x^2 + y^2 + z^2) dm \quad (16.78)$$

$$J_x = \int_{(m)} (y^2 + z^2) dm \quad J_y = \int_{(m)} (z^2 + x^2) dm \quad J_z = \int_{(m)} (x^2 + y^2) dm \quad (16.79)$$

$$J_{xy} = \int_{(m)} xy dm \quad J_{yz} = \int_{(m)} yz dm \quad J_{zx} = \int_{(m)} zx dm \quad (16.80)$$

Cu aceste valori se alcătuiește matricea de inerție:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_z \end{bmatrix} \quad (16.81)$$

Folosind relațiile stabilite pentru variația momentelor de inerție față de axe paralele, respectiv:

$$\begin{aligned} J_{x1} &= J_x - m\delta_x^2 & J_{y1} &= J_y - m\delta_y^2 & J_{z1} &= J_z - m\delta_z^2 \\ J_{x1y1} &= J_{xy} - mab & J_{y1z1} &= J_{yz} - mbc & J_{z1x1} &= J_{zx} - mca \end{aligned} \quad (16.82)$$

se va calcula și matricea de inerție \mathbf{J}^* față de un sistem de referință cu originea în centrul de masă al corpului, ale cărui axe sunt paralele cu cele ale sistemului $Oxyz$:

$$\mathbf{J}^* = \begin{bmatrix} J_{x1} & -J_{x1y1} & -J_{x1z1} \\ -J_{y1x1} & J_{y1} & -J_{y1z1} \\ -J_{z1x1} & -J_{z1y1} & J_{z1} \end{bmatrix} \quad (16.83)$$

Se vor indica, după caz, direcțiile principale de inerție.

Momentele de inerție ale corpurilor compuse, formate prin alipirea sau decuparea unor corpuri cu forme geometrice simple, se obțin prin însumarea sau, respectiv, scăderea momentelor acestora. Fie, de exemplu, un corp compus oarecare format prin alipirea corpurilor (1) și (2) din care se decupează corpul (3). Masa corpului compus va fi:

$$m = m_1 + m_2 - m_3 \quad (16.84)$$

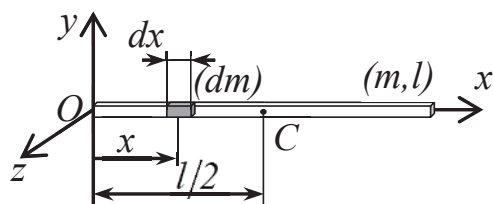
Pentru momentul de inerție polar față de un reper O se poate scrie:

$$J_O = \int_{(m_1+m_2-m_3)} r^2 dm = \int_{(m_1)} r^2 dm + \int_{(m_2)} r^2 dm - \int_{(m_3)} r^2 dm = J_O^{(1)} + J_O^{(2)} - J_O^{(3)} \quad (16.85)$$

La fel se procedează și pentru momentele axiale și centrifugale.

16.5.2 Momentele de inerție la barele omogene

a) Bara rectilinie (fig.16.9)



În sistemul $Oxyz$ masa elementară dm are coordonatele $y = z = 0$. În funcție de masa și lungimea barei:

$$dm = \rho_l dx = \frac{m}{l} dx \quad (16.86)$$

Fig.16.9

unde ρ_l este densitatea liniară a acesteia. Se observă că $J_x = 0$ și $J_{xy} = J_{yz} = J_{zx} = 0$. Celelalte momente de inerție sunt:

$$J_y = J_z = J_O = \int_{(m)} x^2 dm = \frac{m}{l} \int_0^l x^2 dx = \frac{1}{3} ml^2 \quad (16.87)$$

Matricea de inerție se scrie concentrat:

$$\mathbf{J} = \frac{1}{3} ml^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (16.88)$$

În sistemul $Cx_l y_l z_l$, $J_{x_l} = 0$ și $J_{x_l y_l} = J_{y_l z_l} = J_{z_l x_l} = 0$. Celelalte momente sunt:

$$J_{y_l} = J_{z_l} = J_C = J_O - mOC^2 = \frac{1}{3} ml^2 - m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{12} ml^2 \quad (16.89)$$

Față de acest sistem matricea de inerție are forma concentrată:

$$\mathbf{J}^* = \frac{1}{12} ml^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (16.90)$$

Axele acestui sistem sunt direcții principale de inerție.

b) Bara în formă de arc de cerc (fig.16.10)

Bara se așează planul Oxy , cu axa de simetrie suprapusă axei Ox . Masa elementară dm se calculează cu relația:

$$dm = \rho_l ds = \frac{m}{2R\alpha} R d\theta = \frac{m}{2\alpha} d\theta \quad (16.91)$$

în care ds este lungimea arcului elementar iar α este semiunghiul la centru al barei. Cu observația că $r = R = \text{const.}$ momentul de inerție polar este:

$$J_O = J_z = \int_{(m)} r^2 dm = R^2 \int_{(m)} dm = mR^2 \quad (16.92)$$

Se observă că acesta nu depinde de unghiul la centru, relația fiind valabilă pentru orice unghi.

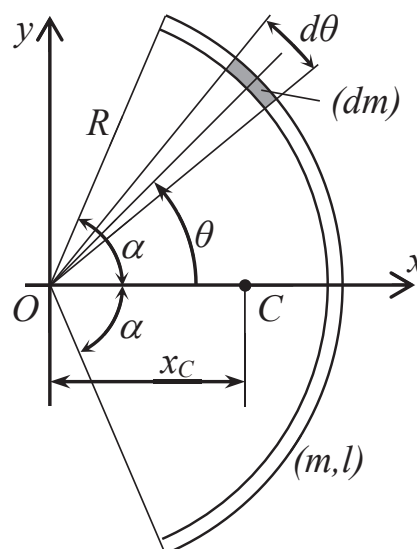


Fig.16.10

Coordonatele masei elementare sunt $x = R \cos \theta$, $y = R \sin \theta$ și $z = 0$. Față de axa Ox momentul de inerție este:

$$\begin{aligned} J_x &= \int_{(m)} y^2 dm = \int_{(m)} (R \sin \theta)^2 \frac{m}{2\alpha} d\theta = \frac{mR^2}{2\alpha} \int_{-\alpha}^{\alpha} \sin^2 \theta d\theta = \\ &= \frac{mR^2}{2\alpha} \left[\frac{1}{2} \theta - \frac{1}{4} \sin 2\theta \right]_{-\alpha}^{\alpha} = mR^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{\sin 2\alpha}{4\alpha} \right) \end{aligned} \quad (16.93)$$

în care unghiul α se introduce în radiani. În mod asemănător se determină:

$$J_y = \int_{(m)} x^2 dm = \int_{(m)} (R \cos \theta)^2 \frac{m}{2\alpha} d\theta = mR^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{\sin 2\alpha}{4\alpha} \right) \quad (16.94)$$

Se verifică cu ușurință relația $J_O = J_x + J_y$ demonstrată anterior.

Deoarece $z = 0$ și Ox este axă de simetrie se deduce că toate momentele de inerție centrifugale sunt nule. Matricea de inerție față de sistemul $Oxyz$ are forma:

$$\mathbf{J} = mR^2 \begin{vmatrix} 1/2 - \sin 2\alpha / 4\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 + \sin 2\alpha / 4\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (16.95)$$

Față de sistemul de referință paralel $Cx_1y_1z_1$ se utilizează pentru momentele de inerție axiale relațiile:

$$J_{x_1} = J_x \quad J_{y_1} = J_y - mx_C^2 \quad J_{z_1} = J_C = J_z - mx_C^2 \quad (16.96)$$

în care $x_C = OC = R \sin \alpha / \alpha$.

Momentele de inerție centrifugale sunt de asemenea nule. Axele acestui sistem sunt direcții principale de inerție iar momentele axiale de mai sus sunt momente principale de inerție.

Problema 16.1 Să se determine matricea de inerție pentru o bară curbă avînd masa m și raza R și forma în variantele din fig.16.11; să se indice direcțiile principale de inerție și să se calculeze matricea de inerție față de aceste direcții.

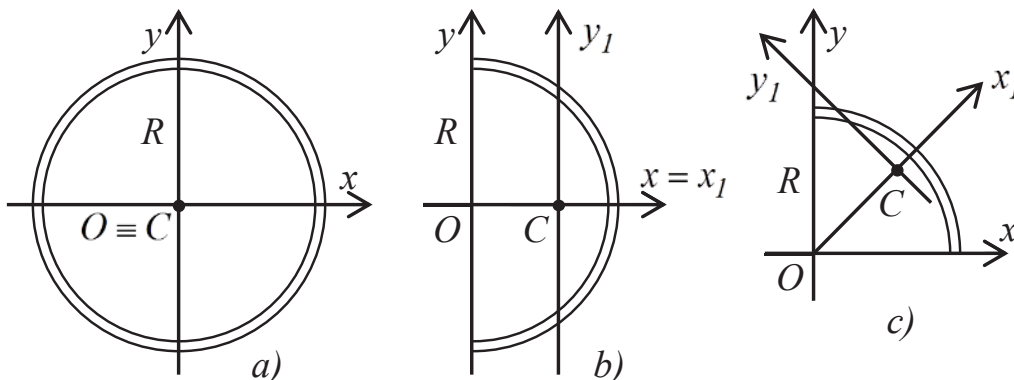


Fig.16.11

Rezolvare: S-a arătat mai înainte că momentul de inerție polar față de centrul geometric O nu depinde de unghiul la centru al arcului; în consecință:

$$J_O \equiv J_z = mR^2 \quad (16.97)$$

La cercul complet (fig.16.11, a) $\alpha = \pi$ și rezultă din relația (16.95):

$$\mathbf{J} = mR^2 \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (16.98)$$

Este evident că axele Ox , Oy , Oz sunt direcții principale de inerție.

Pentru semicerc (fig.16.11, b) $\alpha = \pi/2$ și rezultă că matricea de inerție față de $Oxyz$ este identică cu (16.98); introducând în (16.96) distanța $x_C = 2R/\pi$ rezultă matricea față de $Cx_1y_1z_1$:

$$\mathbf{J}^* = mR^2 \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 - 4/\pi^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - 4/\pi^2 \end{bmatrix} \quad (16.99)$$

Axele acestui sistem sunt direcțiile principale de inerție.

La sfertul de cerc (fig.16.11, c), reamintind că $J_O = J_x + J_y$, se obține:

$$J_x = J_y = \frac{1}{2} J_O = \frac{mR^2}{2} \quad (16.100)$$

Momentul de inerție centrifugal J_{xy} se determină distinct observând că densitatea liniară este în acest caz $\rho_l = 2m/\pi$:

$$J_{xy} = \int_{(m)} xy dm = \int_0^{\pi/2} R^2 \sin \theta \cos \theta \cdot \frac{2m}{\pi} d\theta = \frac{2mR^2}{\pi} \left| \frac{1}{2} \sin^2 \theta \right|_0^{\pi/2} = \frac{mR^2}{\pi} \quad (16.101)$$

Matricea de inerție față de $Oxyz$ are forma:

$$\mathbf{J} = mR^2 \begin{bmatrix} 1/2 & -1/\pi & 0 \\ -1/\pi & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (16.102)$$

Bisectoarea arcului este axă de simetrie, pe ea aflându-se și centrul de masă al barei; în consecință axele sistemului $Cx_1y_1z_1$ sunt direcțiile principale de inerție. Momentele principale de inerție se determină cu relațiile (16.95) și (16.96) în care se introduce $\alpha = \pi/4$ și $x_C = 2R\sqrt{2}/\pi$. Se obține matricea de inerție:

$$\mathbf{J}^* = mR^2 \begin{bmatrix} 1/2 - 1/\pi & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 + 1/\pi - 8/\pi^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - 8/\pi^2 \end{bmatrix} \quad (16.103)$$

16.5.3 Momentele de inerție la plăcile omogene

a) Placa dreptunghiulară (fig.16.12)

Se cunoaște masa m și laturile a și b ale plăcii; notând prin ρ_A densitatea superficială, se exprimă masa elementară prin relația:

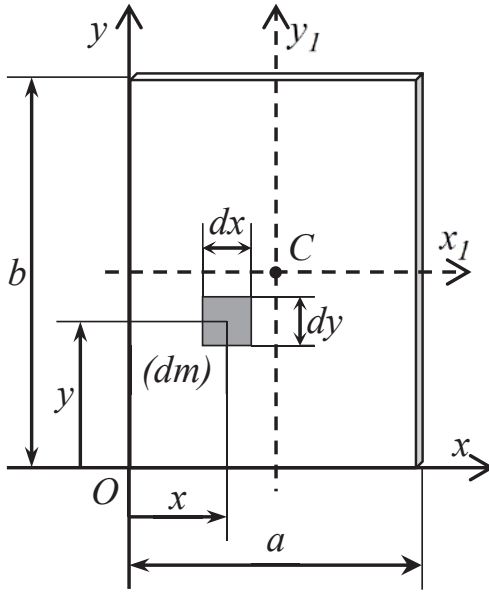


Fig.16.12

$$dm = \rho_A dA = \frac{m}{ab} dx dy \quad (16.104)$$

Cu observația că masa elementară are coordonata $z = 0$, momentul de inerție față de Ox se calculează în modul următor:

$$\begin{aligned} J_x &= \int_{(m)} y^2 dm = \frac{m}{ab} \iint_{(m)} y^2 dx dy = \\ &= \frac{m}{ab} \int_0^a dx \int_0^b y^2 dy = \frac{mb^2}{3} \end{aligned} \quad (16.105)$$

În mod analog se determină:

$$J_y = \frac{ma^2}{3} \quad (16.106)$$

$$J_z = J_O = J_x + J_y = \frac{m}{3}(a^2 + b^2) \quad (16.107)$$

Momentul centrifugal J_{xy} se calculează în modul următor:

$$J_{xy} = \int_{(m)} xy dm = \frac{m}{ab} \iint_{(m)} xy dx dy = \frac{m}{ab} \int_0^a x dx \int_0^b y dy = \frac{mab}{4} \quad (16.108)$$

Se observă că $J_{yz} = J_{zx} = 0$. Matricea de inerție în sistemul $Oxyz$ este:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} mb^2/3 & -mab/4 & 0 \\ -mab/4 & ma^2/3 & 0 \\ 0 & 0 & m(a^2 + b^2)/3 \end{bmatrix} \quad (16.109)$$

Pentru sistemul de referință $Cx_1y_1z_1$ se utilizează relațiile de variație a momentelor față de direcții paralele în care $\delta_x = b/2$ și $\delta_y = a/2$ sunt distanțele între axe. Pentru direcția Cx_1 se calculează:

$$J_{x_1} = J_x - m\delta_x^2 = \frac{mb^2}{3} - m\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{mb^2}{12} \quad (16.110)$$

În mod analog se fac calculele și pentru celelalte axe. Momentul centrifugal este:

$$J_{x_1y_1} = J_{xy} - m\delta_x\delta_y = \frac{mab}{4} - m\frac{b}{2}\frac{a}{2} = 0 \quad (16.111)$$

Acest rezultat confirmă faptul că față de axele de simetrie momentele centrifugale sunt nule. Matricea de inerție față de $Cx_1y_1z_1$ este:

$$\mathbf{J}^* = \begin{bmatrix} mb^2/12 & 0 & 0 \\ 0 & ma^2/12 & 0 \\ 0 & 0 & m(a^2 + b^2)/12 \end{bmatrix} \quad (16.112)$$

b) Placa triunghiulară (fig.16.13)

La o placă având forma unui triunghi dreptunghic se cunosc masa m și lungimile b și h ale catetelor; masa elementară se poate exprima prin relația:

$$dm = \rho_A dA = \frac{2m}{bh} dx dy \quad (16.113)$$

Limitele de variație ale coordonatelor x și y sunt legate prin ecuația dreptei AB care poate fi pusă sub forma:

$$x^* = -\frac{b}{h}y + b \quad (16.114)$$

în care s-a notat x^* abscisa punctului A^* de pe AB pentru evitarea confuziei cu coordonata x a masei elementare dm .

Momentul de inerție axial față de Ox se va determina în modul următor:

$$\begin{aligned} J_x &= \int_{(m)} y^2 dm = \frac{2m}{bh} \iint_{(m)} y^2 dx dy = \frac{2m}{bh} \int_0^h y^2 \left(\int_0^{x^*} dx \right) dy = \frac{2m}{bh} \int_0^h y^2 x^* dy = \\ &= \frac{2m}{bh} \int_0^h y^2 \left(-\frac{b}{h}y + b \right) dy = \frac{2m}{bh} \left(-\frac{b}{h} \frac{h^4}{4} + b \frac{h^3}{3} \right) = \frac{mh^2}{6} \end{aligned} \quad (16.115)$$

În mod analog se determină:

$$J_y = \frac{mb^2}{6} \quad (16.116) \quad J_z = J_O = J_x + J_y = \frac{m}{6}(h^2 + b^2) \quad (16.117)$$

Momentul centrifugal J_{xy} se calculează în mod asemănător:

$$\begin{aligned} J_{xy} &= \int_{(m)} xy dm = \frac{2m}{bh} \iint_{(m)} xy dx dy = \frac{2m}{bh} \int_0^h y \left(\int_0^{x^*} x dx \right) dy = \frac{2m}{bh} \int_0^h y \frac{(x^*)^2}{2} dy = \\ &= \frac{m}{bh} \int_0^h y \left(-\frac{b}{h}y + b \right)^2 dy = \frac{m}{bh} \left(\frac{b^2}{h^2} \frac{h^4}{4} - \frac{2b^2}{h} \frac{h^3}{3} + b^2 \frac{h^2}{2} \right) = \frac{mbh}{12} \end{aligned} \quad (16.118)$$

Deoarece $z = 0$, celelalte momente de inerție centrifugale sunt nule.

Matricea de inerție în sistemul $Oxyz$ va fi:

$$\mathbf{J} = \frac{m}{6} \begin{bmatrix} h^2 & -bh/2 & 0 \\ -bh/2 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & h^2 + b^2 \end{bmatrix} \quad (16.119)$$

În sistemul $Cx_1y_1z_1$ (fig.16.14) momentele de inerție se calculează cu relațiile de variație a momentelor față de direcții paralele în care:

$$\delta_x = y_C = h/3 \quad \delta_y = x_C = b/3 \quad (16.120)$$

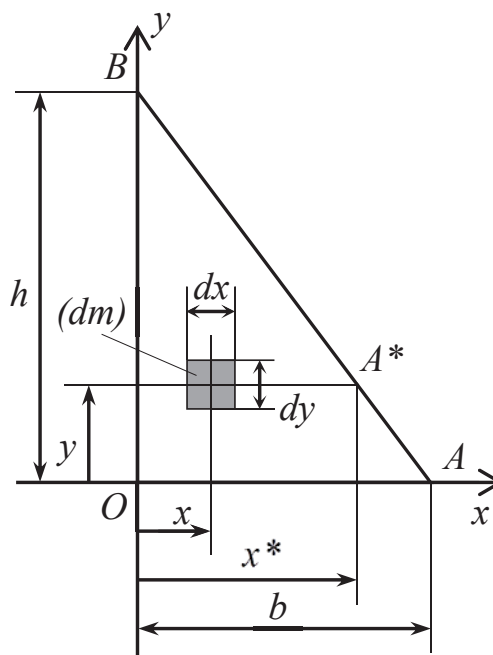


Fig.16.13

În acest sistem momentele axiale se vor calcula în modul următor:

$$J_{x_1} = J_x - m\delta_x^2 = \frac{mh^2}{6} - m\left(\frac{h}{3}\right)^2 = \frac{mh^2}{18} \quad (16.121)$$

$$J_{y_1} = \frac{mb^2}{18} \quad (16.122)$$

$$J_{z_1} = \frac{m}{18}(h^2 + b^2) \quad (16.123)$$

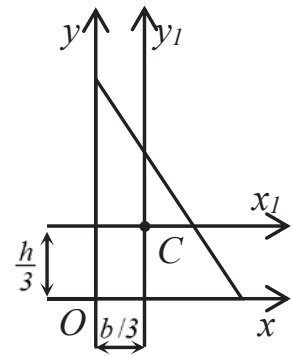


Fig.16.14

Momentul de inerție centrifugal se calculează cu relația:

$$J_{x_1y_1} = J_{xy} - m\delta_x\delta_y = \frac{mbh}{12} - m\frac{b}{3}\frac{h}{3} = -\frac{mbh}{36} \quad (16.124)$$

Celelalte momente centrifugale sunt nule. Matricea de inerție are forma:

$$\mathbf{J}^* = \frac{m}{18} \begin{bmatrix} h^2 & bh/2 & 0 \\ bh/2 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & h^2 + b^2 \end{bmatrix} \quad (16.125)$$

Se observă că în acest caz numai axa Cz_1 este direcție principală de inerție.

Problema 16.2: Să se calculeze matricea de inerție a unei plăci triunghiulare de o formă oarecare, având masa m și dimensiunile din fig.16.15. Să se considere și cazul particular al triunghiului echilateral.

Rezolvare: Triunghiul oarecare poate fi considerat ca fiind format prin alipirea a două triunghiuri dreptunghice (1) și (2). Dacă m este masa totală a plăcii, masele celor două componente vor fi proporționale cu ariile acestora.

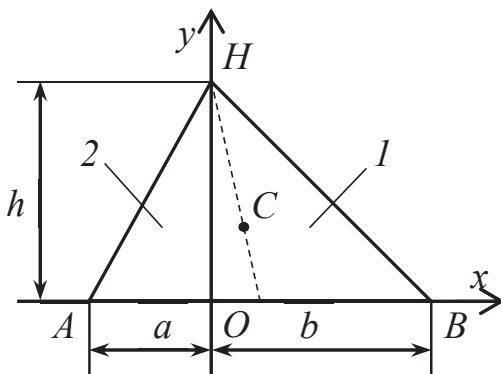


Fig.16.15

Din ecuațiile:

$$\begin{cases} m_1 + m_2 = m \\ \frac{m_1}{m_2} = \frac{A_1}{A_2} = \frac{\frac{1}{2}bh}{\frac{1}{2}ah} = \frac{b}{a} \end{cases} \quad (16.126)$$

se deduc masele :

$$m_1 = \frac{b}{a+b}m \quad m_2 = \frac{a}{a+b}m \quad (16.127)$$

Momentele de inerție ale plăcii se obțin prin însumarea momentelor celor două plăci:

$$J_x = J_x^{(1)} + J_x^{(2)} = \frac{m_1 h^2}{6} + \frac{m_2 h^2}{6} = \frac{mh^2}{6} \quad (16.128)$$

$$J_y = J_y^{(1)} + J_y^{(2)} = \frac{m_1 b^2}{6} + \frac{m_2 a^2}{6} = \frac{m}{6} \frac{a^3 + b^3}{a+b} = \frac{m}{6} (a^2 - ab + b^2) \quad (16.129)$$

$$J_z \equiv J_O = J_x + J_y = \frac{m}{6} (h^2 + a^2 - ab + b^2) \quad (16.130)$$

Pentru triunghiul (1) momentul de inerție centrifugal se va calcula cu relația (16.118) în care se înlocuiește m prin m_1 . La triunghiul (2), în sistemul de referință considerat, variabila x^* corespunzătoare laturii AH este dată de relația:

$$x^* = \frac{a}{h} y - a \quad (16.131)$$

astfel că momentul centrifugal se va calcula cu relația, provenită din (16.118):

$$J_{xy}^{(2)} = \frac{2m_2}{ah} \iint_{(A)} xy \, dx \, dy = \frac{2m_2}{ah} \int_0^h y \left(\int_{x^*}^0 x \, dx \right) dy = -\frac{m_2 ah}{12} \quad (16.132)$$

$$J_{xy} = J_{xy}^{(1)} + J_{xy}^{(2)} = \frac{m_1 bh}{12} - \frac{m_2 ah}{12} = \frac{mh}{12} (b-a) \quad (16.133)$$

Celelalte momente de inerție centrifugale sunt nule. Matricea de inerție este:

$$\mathbf{J} = \frac{m}{6} \begin{bmatrix} h^2 & -h(b-a)/2 & 0 \\ -h(b-a)/2 & (a^2 - ab + b^2) & 0 \\ 0 & 0 & (h^2 + a^2 - ab + b^2) \end{bmatrix} \quad (16.134)$$

Pentru sistemul de referință paralel $Cx_1y_1z_1$ calculele se fac introducând în relațiile generale distanțele $\delta_x = y_C = h/3$ și $\delta_y = x_C = (b-a)/3$:

$$\mathbf{J}^* = \frac{m}{18} \begin{bmatrix} h^2 & h(b-a)/2 & 0 \\ h(b-a)/2 & a^2 + ab + b^2 & 0 \\ 0 & 0 & h^2 + a^2 + ab + b^2 \end{bmatrix} \quad (16.135)$$

Numai Cz_1 este direcție principală de inerție.

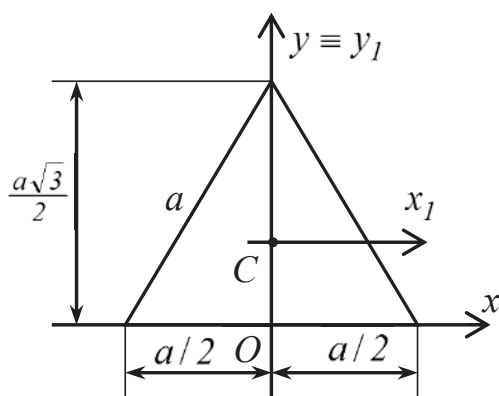


Fig.16.16

În cazul particular al unui triunghi echilateral de masa m și latura a , în matricea de inerție din relația (16.134) se înlocuiesc lungimile h , b și a cu corespundențele specifice indicate în fig.16.16. Matricea de inerție față de sistemul $Oxzy$ va fi:

$$\mathbf{J} = \frac{ma^2}{24} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad (16.136)$$

În sistemul $Cx_1y_1z_1$ se introduc distanțele $\delta_x = y_C = a\sqrt{3}/6$ și $\delta_y = 0$. Se obține:

$$\mathbf{J}^* = \frac{ma^2}{24} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (16.137)$$

Axele Cy_1 și Cz_1 , fiind axe de simetrie, sunt și direcții principale de inerție. Știind că cele trei direcții principale de inerție sunt reciproc perpendiculare, rezultă că și axa Cx_1 aparține acestora.

c) Sectorul circular (fig.16.17)

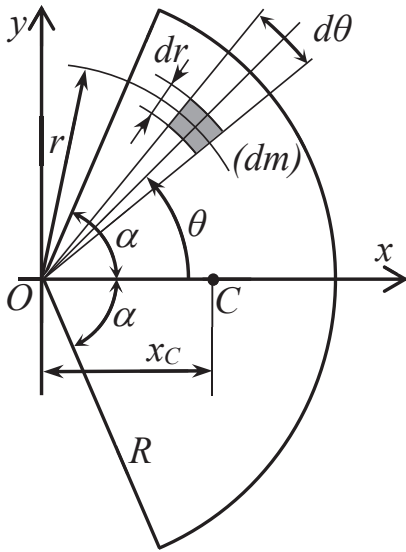


Fig.16.17

Aria sectorului circular, dispus cu axa de simetrie suprapusă axei Ox , se calculează în modul următor:

$$A = \int_{(A)} dA = \iint_{(A)} r d\theta \cdot dr = \int_0^R r dr \cdot \int_{-\alpha}^{\alpha} d\theta = \frac{R^2}{2} \cdot 2\alpha = R^2 \alpha \quad (16.138)$$

În consecință, masa elementară se va exprima prin relația:

$$dm = \rho_A \cdot dA = \frac{m}{A} dA = \frac{m}{R^2 \alpha} \cdot r d\theta \cdot dr \quad (16.139)$$

Momentul de inerție polar față de punctul O se calculează după cum urmează:

$$J_O \equiv J_z = \int_{(m)} r^2 dm = \iint_{(A)} r^2 \cdot \frac{m}{R^2 \alpha} \cdot r d\theta \cdot dr = \frac{m}{R^2 \alpha} \cdot \int_0^R r^3 dr \cdot \int_{-\alpha}^{\alpha} d\theta = \frac{mR^2}{2} \quad (16.140)$$

Coordonatele masei elementare sunt $x = r \cos \theta$ și $y = r \sin \theta$; în consecință:

$$J_x = \int_{(m)} y^2 dm = \frac{m}{R^2 \alpha} \iint_{(A)} (r \sin \theta)^2 r dr d\theta = \frac{m}{R^2 \alpha} \cdot \int_0^R r^3 dr \cdot \int_{-\alpha}^{\alpha} \sin^2 \theta d\theta = \frac{m}{R^2 \alpha} \cdot \frac{R^4}{4} \cdot \left[\frac{1}{2} \theta - \frac{1}{4} \sin 2\theta \right]_{-\alpha}^{\alpha} = \frac{mR^2}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{\sin 2\alpha}{4\alpha} \right) \quad (16.141)$$

În mod analog se determină:

$$J_y = \frac{mR^2}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{\sin 2\alpha}{4\alpha} \right) \quad (16.142)$$

Ox este axă de simetrie și în consecință $J_{xy} = 0$; deoarece $z = 0$, $J_{yz} = J_{zx} = 0$.

Matricea de inerție față de sistemul $Oxyz$ are componența:

$$\mathbf{J} = \frac{mR^2}{2} \begin{vmatrix} 1/2 - \sin 2\alpha / 4\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 + \sin 2\alpha / 4\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (16.143)$$

Față de sistemul de referință paralel $Cx_1y_1z_1$ momentele de inerție se calculează cu relațiile:

$$J_{x1} = J_x \quad J_{y1} = J_y - mx_C^2 \quad J_{z1} = J_C = J_z - mx_C^2 \quad (16.144)$$

în care $x_C = OC = \frac{2}{3} \frac{R \sin \alpha}{\alpha}$. Momentele de inerție centrifugale sunt toate nule iar axele acestui sistem sunt direcții principale de inerție.

Se poate observa că momentul de inerție $J_O \equiv J_z$ dat de relația (16.140) nu depinde de unghiul la centru al sectorului circular.

Problema 16.3: Să se determine matricea de inerție pentru plăcile plane din fig.16.18 la care se cunosc masa m și raza R . Să se indice direcțiile principale de inerție și momentele de inerție față de acestea.

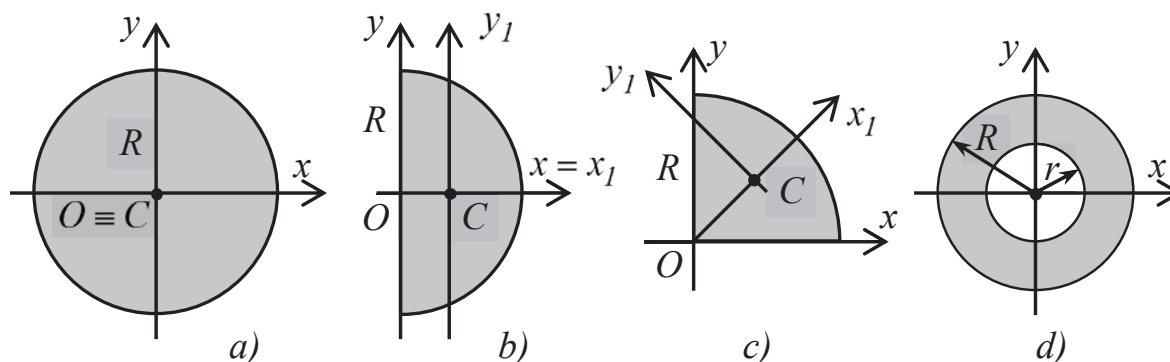


Fig.16.18

La discul complet (fig.16.18, a) matricea de inerție are componența:

$$\mathbf{J} = \frac{mR^2}{2} \begin{vmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (16.145)$$

Este evident că axele sistemului $Oxyz$ sunt direcții principale de inerție.

Aceeași componență o are și matricea de inerție pentru un semidisc (fig.16.19, b). Față de sistemul de referință $Cx_1y_1z_1$ matricea de inerție se calculează cu relațiile (16.144) în care se introduce $x_C = 4R/3\pi$:

$$\mathbf{J}^* = \frac{mR^2}{2} \begin{vmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 - 32/9\pi^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - 32/9\pi^2 \end{vmatrix} \quad (16.146)$$

Axele acestui sistem sunt direcții principale de inerție pentru semidisc.

Pentru sfertul de disc (fig.16.18, c) momentele axiale au expresiile:

$$J_z \equiv J_O = \frac{mR^2}{2} \quad J_x = J_y = \frac{1}{2} J_O = \frac{mR^2}{4} \quad (16.147)$$

Momentul de inerție centrifugal J_{xy} se determină observând că în acest caz densitatea superficială este $\rho_A = 4m/\pi R^2$. Efectuând calculele se obține:

$$\begin{aligned} J_{xy} &= \int_{(m)} xy \, dm = \iint_{(A)} r^2 \sin\theta \cos\theta \cdot \frac{4m}{\pi R^2} \cdot r \, d\theta \cdot dr = \\ &= \frac{4m}{\pi R^2} \cdot \int_0^R r^3 \, dr \cdot \int_0^{\pi/2} \sin\theta \cos\theta \, d\theta = \frac{4m}{\pi R^2} \cdot \frac{R^4}{4} \cdot \left. \frac{1}{2} \sin^2\theta \right|_0^{\pi/2} = \frac{mR^2}{2\pi} \end{aligned} \quad (16.148)$$

Matricea de inerție are forma:

$$\mathbf{J} = \frac{mR^2}{2} \begin{vmatrix} 1/2 & -1/\pi & 0 \\ -1/\pi & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (16.149)$$

Bisectoarea sfertului de disc este axă de simetrie, pe ea aflându-se și centrul de masă al barei; în consecință axele sistemului $Cx_Iy_Iz_I$ sunt direcțiile principale de inerție. Momentele principale de inerție se determină cu relațiile (16.141) și (16.142) în care se introduce $\alpha = \pi/4$. Se obține matricea de inerție:

$$\mathbf{J}^* = \frac{mR^2}{2} \begin{bmatrix} 1 - 1/\pi & 0 & 0 \\ 0 & 1 + 1/\pi - 8/\pi^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 - 8/\pi^2 \end{bmatrix} \quad (16.150)$$

Discul inelar (fig.16.18, *d*) este format prin decuparea cercului de rază r din cercul de rază R ; matricea de inerție are forma:

$$\mathbf{J} = \frac{m(R^2 - r^2)}{2} \begin{vmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (16.151)$$

Axele sistemului $Oxyz$ sunt și direcții principale de inerție.

d) Elipsa

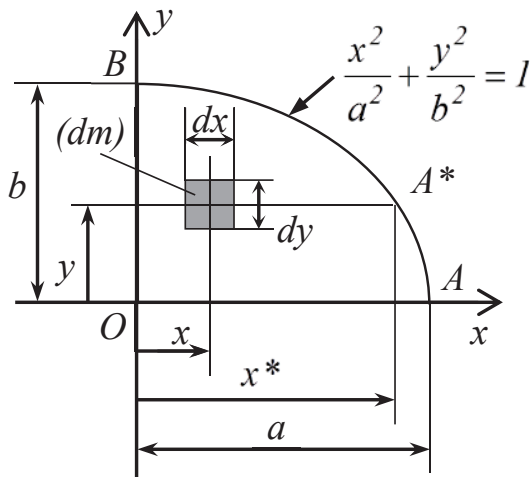


Fig.16.19

Calculul se efectuează într-o primă etapă pentru o placă având forma unui sfert de elipsă de masă m (fig.16.19).

Din ecuația analitică a unei elipse având semiaxele a și b se explicită relația dintre coordonatele punctului A^* aflat pe conturul exterior al plăcii:

$$x^* = \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - y^2} \quad (16.152)$$

Aria sfertului de elipsă este $A = \pi ab / 4$, astfel că masa elementară dm va fi:

$$dm = \rho_A dA = \frac{m}{A} dA = \frac{4m}{\pi ab} dx dy \quad (16.153)$$

Momentul de inerție al plăcii față de axa Ox se calculează în modul următor:

$$\begin{aligned} J_x &= \int_{(m)} y^2 dm = \frac{4m}{\pi ab} \iint_{(m)} y^2 dx dy = \frac{4m}{\pi ab} \int_0^b y^2 \left(\int_0^{x^*} dx \right) dy = \frac{4m}{\pi ab} \int_0^b y^2 x^* dy = \\ &= \frac{4m}{\pi ab} \cdot \frac{a}{b} \int_0^b y^2 \sqrt{b^2 - y^2} dy = \\ &= \frac{4m}{\pi b^2} \left[\frac{y}{4} \sqrt{(b^2 - y^2)^3} + \frac{b^2}{8} \left(y \sqrt{b^2 - y^2} + b^2 \arcsin \frac{y}{b} \right) \right]_0^b = \frac{mb^2}{4} \end{aligned} \quad (16.154)$$

În mod analog se calculează:

$$J_y = \frac{ma^2}{4} \quad (16.155)$$

$$J_z \equiv J_O = J_x + J_y = \frac{m}{4} (a^2 + b^2) \quad (16.156)$$

Pentru momentul de inerție centrifugal J_{xy} se procedează în modul următor:

$$\begin{aligned}
 J_{xy} &= \int_{(m)} xy \, dm = \frac{4m}{\pi ab} \iint_{(A)} xy \, dx \, dy = \frac{4m}{\pi ab} \int_0^b y \left(\int_0^{x^*} x \, dx \right) dy = \\
 &= \frac{4m}{\pi ab} \int_0^b y \frac{(x^*)^2}{2} dy = \frac{2m}{\pi ab} \cdot \frac{a^2}{b^2} \int_0^b y(b^2 - y^2) dy = \frac{mab}{2\pi}
 \end{aligned}
 \tag{16.157}$$

Celelalte momente de inerție centrifugale sunt nule ($z = 0$).

În sistemul de referință $Oxyz$ matricea de inerție are configurația:

$$\mathbf{J} = \frac{m}{4} \begin{vmatrix} b^2 & -2ab/\pi & 0 \\ -2ab/\pi & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 + b^2 \end{vmatrix}
 \tag{16.158}$$

Se poate observa că pentru $a = b = R$ se obțin valorile din (16.149) calculate pentru sfertul de disc.

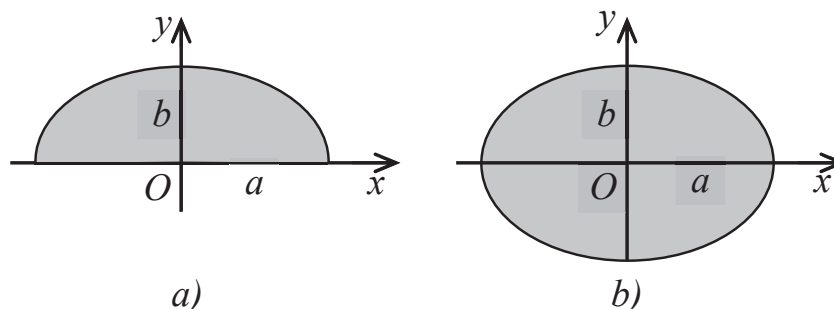


Fig.16.20

Pentru jumătatea de elipsă (fig.16.20, a), având masa m și aria $A = \pi ab / 2$, calculul se face în același mod, limitele integralelor fiind $(0, b)$ pentru variabila y și $(-x^*, x^*)$ pentru x . Pentru elipsa întreagă (fig.16.20, b) de masă m și arie $A = \pi ab$, limitele sunt $(-b, b)$ pentru y și $(-x^*, x^*)$ pentru x . În ambele cazuri, datorită simetriei, momentele centrifugale sunt nule. Matricea de inerție va fi:

$$\mathbf{J} = \frac{m}{4} \begin{vmatrix} b^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 + b^2 \end{vmatrix}
 \tag{16.159}$$

La același rezultat se poate ajunge considerând semielipsa și elipsa completă ca figuri compuse din 2 și respectiv 4 sferturi de elipsă.

Și în acest caz, pentru $a = b = R$ se obțin rezultatele calculate la semidisc și la discul complet, prezentate în relația (16.145).

La semielipsă axa Oy este direcție principală de inerție. La elipsa completă toate cele trei axe – Ox , Oy și Oz , sunt direcții principale de inerție; momentele de inerție axiale calculate față de aceste direcții sunt și momente principale de inerție deoarece punctul O este și centrul de masă al elipsei.

16.5.4 Momentele de inerție la volumele omogene

a) Paralelipipedul (fig.16.21)

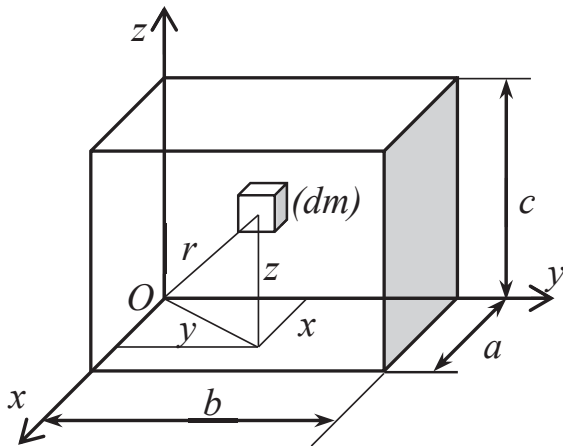


Fig.16.21

Se cunoaște masa m a paralelipipedului și lungimile a , b și c ale muchiilor acestuia. Masa elementară dm este dată de relația:

$$dm = \rho_V dV \quad (16.160)$$

în care densitatea volumică va fi:

$$\rho_V = \frac{m}{V} = \frac{m}{abc} \quad (16.161)$$

Volumul elementar este:

$$dV = dx dy dz \quad (16.162)$$

Momentul de inerție polar față de O este:

$$J_O = \int_{(m)} r^2 dm = \frac{m}{abc} \iiint_{(V)} (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz = \frac{m}{abc} (I_1 + I_2 + I_3) \quad (16.163)$$

Cele trei integrale din partea dreaptă se calculează în modul următor:

$$I_1 = \iiint_{(V)} x^2 dx dy dz = \int_0^a x^2 dx \cdot \int_0^b dy \cdot \int_0^c dz = \frac{1}{3} a^3 bc \quad (16.164)$$

$$I_2 = \iiint_{(V)} y^2 dx dy dz = \int_0^a dx \cdot \int_0^b y^2 dy \cdot \int_0^c dz = \frac{1}{3} ab^3 c \quad (16.165)$$

$$I_3 = \iiint_{(V)} z^2 dx dy dz = \int_0^a dx \cdot \int_0^b dy \cdot \int_0^c z^2 dz = \frac{1}{3} abc^3 \quad (16.166)$$

Rezultă momentul de inerție polar:

$$J_O = \frac{1}{3} m(a^2 + b^2 + c^2) \quad (16.167)$$

Se calculează în continuare momentele de inerție axiale:

$$J_x = \int_{(m)} (y^2 + z^2) dm = \frac{m}{abc} \iiint_{(V)} (y^2 + z^2) dx dy dz = \frac{m}{abc} (I_2 + I_3) = \frac{1}{3} (b^2 + c^2) \quad (16.168)$$

$$J_y = \frac{1}{3} (c^2 + a^2) \quad (16.169)$$

$$J_z = \frac{1}{3} (a^2 + b^2) \quad (16.170)$$

Se verifică relația dintre momentele de inerție axiale ale unui corp tridimensional:

$$J_O = \frac{1}{2} (J_x + J_y + J_z) \quad (16.171)$$

Momentele de inerție centrifugale se calculează în modul următor:

$$J_{xy} = \int_{(m)} xy dm = \frac{m}{abc} \iiint_{(V)} xy dx dy dz = \frac{m}{abc} \cdot \int_0^a x dx \cdot \int_0^b y dy \cdot \int_0^c dz = \frac{1}{4} mab \quad (16.172)$$

$$J_{yz} = \frac{1}{4} mbc \quad (16.173) \quad J_{zx} = \frac{1}{4} mca \quad (16.174)$$

Matricea de inerție a corpului în sistemul de referință $Oxzy$ are componența:

$$\mathbf{J} = \begin{vmatrix} m(b^2 + c^2)/3 & -mab/4 & -mac/4 \\ -mab/4 & m(c^2 + a^2)/3 & -mbc/4 \\ -mac/4 & -mbc/4 & m(a^2 + b^2)/3 \end{vmatrix} \quad (16.175)$$

La calculul momentelor de inerție față de un sistem de referință $Cx_1y_1z_1$, paralel cu acesta și având originea în centrul de masă al corpului, se aplică relațiile de variație după cum urmează:

$$J_{x1} = J_x - m\delta_x^2 = \frac{1}{3}(b^2 + c^2) - \frac{1}{4}m(b^2 + c^2) = \frac{1}{12}m(b^2 + c^2) \quad (16.176)$$

În mod analog:

$$J_{y1} = \frac{1}{12}m(c^2 + a^2) \quad (16.177) \quad J_{z1} = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2) \quad (16.178)$$

Axele menționate sunt și axe de simetrie astfel că momentele centrifugale sunt nule. În final, matricea de inerție corespunzătoare este:

$$\mathbf{J}^* = \frac{m}{12} \begin{vmatrix} b^2 + c^2 & 0 & 0 \\ 0 & c^2 + a^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 + b^2 \end{vmatrix} \quad (16.179)$$

Axele de simetrie sunt și direcții principale de inerție.

b) Cilindrul (fig.16.22)

Un cilindru de masă m are raza R și înălțimea h . Volumul său este:

$$V = \pi R^2 h \quad (16.180)$$

Densitatea volumică este:

$$\rho_V = \frac{m}{V} = \frac{m}{\pi R^2 h} \quad (16.181)$$

Drept masă elementară se alege o porțiune din cilindru de grosime dx :

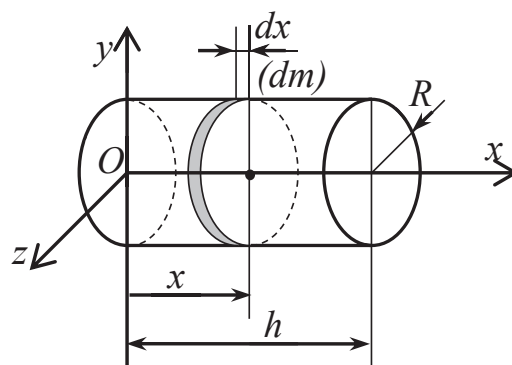


Fig.16.22

$$dm = \rho_V dV = \frac{m}{\pi R^2 h} \cdot \pi R^2 dx = \frac{m}{h} dx \quad (16.182)$$

Față de axa Ox această masă elementară are momentul de inerție:

$$dJ_x = \frac{1}{2} R^2 dm \quad (16.183)$$

analogă celei stabilite în relația (16.140) la discul plan. Pentru întregul cilindru:

$$J_x = \int dJ_x = \frac{1}{2} R^2 \int_{(m)} dm = \frac{1}{2} m R^2 \quad (16.184)$$

$$J_y = J_z = \int_{(m)} x^2 dm = \frac{m}{h} \int_0^h x^2 dx = \frac{1}{3} mh^2 \quad (16.185)$$

Ox este axă de simetrie iar centrul masei elementare are coordonatele $y = z = 0$. În consecință toate momentele centrifugale sunt nule. Matricea de inerție va fi:

$$\mathbf{J} = \begin{vmatrix} mR^2/2 & 0 & 0 \\ 0 & mh^2/3 & 0 \\ 0 & 0 & mh^2/3 \end{vmatrix} \quad (16.186)$$

Mutând sistemul de referință în centrul de masă al corpului, la distanța $h/2$, se obțin următoarele momente de inerție:

$$J_{x1} = J_x = \frac{1}{2} mR^2 \quad (16.187)$$

$$J_{y1} = J_{z1} = \frac{1}{3} mh^2 - m \left(\frac{h}{2} \right)^2 = \frac{1}{12} mh^2 \quad (16.188)$$

Matricea de inerție are în acest sistem componența:

$$\mathbf{J}^* = \begin{vmatrix} mR^2/2 & 0 & 0 \\ 0 & mh^2/12 & 0 \\ 0 & 0 & mh^2/12 \end{vmatrix} \quad (16.189)$$

Axele acestui sistem sunt direcții principale de inerție.

c) *Conul circular drept* (fig.16.23)

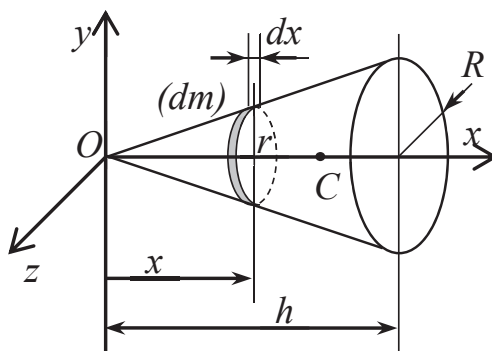


Fig.16.23

Volumul conului este dat de relația:

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 h \quad (16.190)$$

Volumul elementar dV este asimilat unui mic cilindru de înălțime dx , a cărui rază r este dată de relația:

$$r = \frac{R}{h} x \quad (16.191)$$

Masa elementară va fi determinată de expresia:

$$dm = \rho_V dV = \frac{3m}{\pi R^2 h} \cdot \pi r^2 dx = \frac{3m}{R^2 h} r^2 dx = \frac{3m}{h^3} x^2 dx \quad (16.192)$$

Acestei mase elementare îi corespunde un moment de inerție elementar de forma:

$$dJ_x = \frac{1}{2} r^2 dm = \frac{3}{2} \frac{mR^2}{h^5} \cdot x^4 dx \quad (16.193)$$

Rezultă momentul de inerție axial față de axa Ox :

$$J_x = \int dJ_x = \frac{3}{2} \frac{mR^2}{h^5} \int_0^h x^4 dx = \frac{3}{2} \frac{mR^2}{h^5} \cdot \frac{h^5}{5} = \frac{3}{10} mR^2 \quad (16.194)$$

Centrul masei elementare are coordonatele $y = z = 0$ astfel că celelalte momente axiale se vor calcula cu relația:

$$J_y = J_z = \int_{(m)} x^2 dm = \frac{3m}{h^3} \int_0^h x^4 dx = \frac{3m}{h^3} \cdot \frac{h^5}{5} = \frac{3}{5} mh^2 \quad (16.195)$$

Din același motiv, toate momentele centrifugale sunt nule. Matricea de inerție față de sistemul de referință considerat va avea componența:

$$\mathbf{J} = \begin{vmatrix} 3mR^2/10 & 0 & 0 \\ 0 & 3mh^2/5 & 0 \\ 0 & 0 & 3mh^2/5 \end{vmatrix} \quad (16.196)$$

Pentru sistemul de referință $Cx_1y_1z_1$, paralel cu sistemul dat, se cunoaște distanța $\delta_y = \delta_z = x_C = 3h/4$, astfel că:

$$J_{x1} = J_x \quad J_{y1} = J_{z1} = \frac{3}{5} mh^2 - m \left(\frac{3h}{4} \right)^2 = \frac{3}{80} mh^2 \quad (16.197)$$

Momentele centrifugale sunt nule. Rezultă matricea de inerție:

$$\mathbf{J}^* = \begin{vmatrix} 3mR^2/10 & 0 & 0 \\ 0 & 3mh^2/80 & 0 \\ 0 & 0 & 3mh^2/80 \end{vmatrix} \quad (16.198)$$

Axele acestui sistem sunt direcții principale de inerție.

d) Sfera

Coordonatele carteziene ale masei elementare dm (fig.16.24) pot fi exprimate în funcție de coordonatele sferice r, θ, φ prin relațiile:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \cos \theta \\ y = r \cos \varphi \sin \theta \\ z = r \sin \varphi \end{cases} \quad (16.199)$$

Volumul elementar al acesteia este:

$$dV = r d\varphi \cdot r \cos \varphi d\theta \cdot dr \quad (16.200)$$

Cunoscând că volumul total al sferei (fig.16.25) se calculează cu relația:

$$V = \int_{(V)} dV = \int_0^R r^2 dr \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \varphi d\varphi \cdot \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{4}{3} \pi R^3 \quad (16.201)$$

rezultă densitatea volumică:

$$\rho_V = \frac{m}{V} = \frac{3m}{4\pi R^3} \quad (16.202)$$

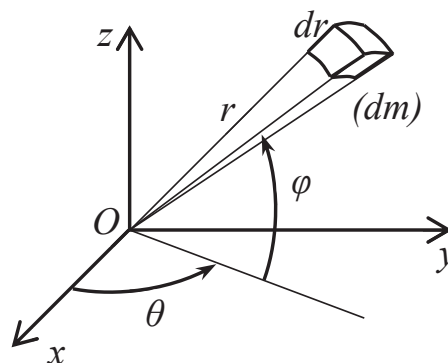


Fig.16.24

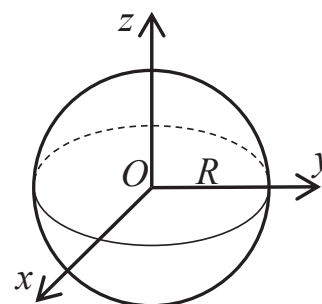


Fig.16.25

Pentru masa elementară se obține relația:

$$dm = \rho_V dV = \frac{3m}{4\pi R^2} r^2 \cos\varphi dr d\varphi d\theta \quad (16.203)$$

Momentul de inerție polar se calculează în modul următor:

$$\begin{aligned} J_O &= \int_{(m)} r^2 dm = \frac{3m}{4\pi R^3} \iiint_{(V)} r^4 \cos\varphi dr d\varphi d\theta = \\ &= \frac{3m}{4\pi R^3} \int_0^R r^4 dr \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\varphi d\varphi \cdot \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{3m}{4\pi R^3} \cdot \frac{R^5}{5} \cdot 2 \cdot 2\pi = \frac{3}{5} mR^2 \end{aligned} \quad (16.204)$$

Plecând de la relația de legătură între momentele de inerție ale corpurilor tridimensionale, respectiv:

$$J_O = \frac{1}{2} (J_x + J_y + J_z) \quad (16.205)$$

se deduc momentele axiale, egale între ele din motive de simetrie:

$$J_x = J_y = J_z = \frac{2}{3} J_O = \frac{2}{5} mR^2 \quad (16.206)$$

Momentele centrifugale față de axele de simetrie sunt nule, astfel că matricea de inerție va avea forma:

$$\mathbf{J} = \frac{2}{5} mR^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (16.207)$$

Axele sistemului $Oxyz$ sunt direcții principale de inerție.

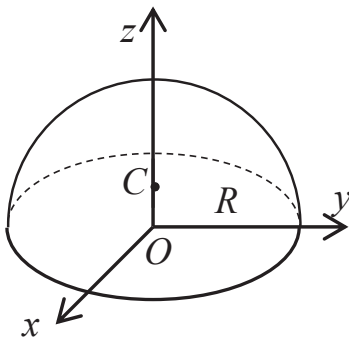


Fig.16.26

Pentru figurile geometrice provenite din sferă, momentele de inerție se calculează în mod asemănător, modificând volumul V și limitele integralelor.

La semisfera din fig.16.26 volumul este:

$$V = \frac{2}{3} \pi R^3 \quad (16.208)$$

Masa elementară va avea în acest caz forma:

$$dm = \frac{3m}{2\pi R^2} r^2 \cos\varphi dr d\varphi d\theta \quad (16.209)$$

Momentul de inerție polar se va calcula în modul următor:

$$\begin{aligned} J_O &= \int_{(m)} r^2 dm = \frac{3m}{2\pi R^2} \iiint_{(V)} r^4 \cos\varphi dr d\varphi d\theta = \\ &= \frac{3m}{2\pi R^2} \int_0^R r^4 dr \cdot \int_0^{\pi/2} \cos\varphi d\varphi \cdot \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{3m}{2\pi R^2} \cdot \frac{R^5}{5} \cdot 1 \cdot 2\pi = \frac{3}{5} mR^2 \end{aligned} \quad (16.210)$$

Momentul axial față de Oz se calculează distinct plecând de la relația:

$$J_z = \int_{(m)} (x^2 + y^2) dm \quad (16.211)$$

Utilizând relațiile (16.199) se obține în continuare:

$$\begin{aligned}
 J_z &= \frac{3m}{2\pi R^3} \iiint_{(V)} (r^2 \cos^2 \varphi \cos^2 \theta + r^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \theta) \cdot r^2 \cos \varphi dr d\varphi d\theta = \\
 &= \frac{3m}{2\pi R^3} \cdot \int_0^R r^4 dr \cdot \int_0^{\pi/2} \cos^3 \varphi d\varphi \cdot \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{3m}{2\pi R^3} \cdot \frac{R^5}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2\pi = \frac{2}{5} mR^2
 \end{aligned} \tag{16.212}$$

Pe baza relației (16.205) se poate deduce:

$$J_x = J_y = \frac{1}{2}(2J_O - J_z) = \frac{2}{5} mR^2 \tag{16.213}$$

Momentul de inerție centrifugal J_{xy} se calculează în modul următor:

$$\begin{aligned}
 J_{xy} &= \int_{(m)} xy dm = \frac{3m}{2\pi R^3} \iiint_{(V)} (r \cos \varphi \cos \theta) \cdot (r \cos \varphi \sin \theta) \cdot r^2 \cos \varphi dr d\varphi d\theta = \\
 &= \frac{3m}{2\pi R^3} \cdot \int_0^R r^4 dr \cdot \int_0^{\pi/2} \cos^3 \varphi d\varphi \cdot \int_0^{2\pi} \sin \theta \cos \theta d\theta = \frac{3m}{2\pi R^3} \cdot \frac{R^5}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot 0 = 0
 \end{aligned} \tag{16.214}$$

Deoarece Oz este axă de simetrie, $J_{xz} = J_{yz} = 0$.

Matricea de inerție pentru semisferă are aceeași formă ca și cea pentru sfera completă, respectiv (16.207), diferența făcând-o masa corpului.

Mutând sistemul de referință cu originea din O în centrul de masă C , cu precizarea că $\delta_x = \delta_y = z_C = 3R/8$, modificările care apar sunt:

$$J_{x1} = J_{y1} = J_x - m\delta_x^2 = \frac{2}{5} mR^2 - m\left(\frac{3}{8}R\right)^2 = \frac{83}{320} mR^2 \tag{16.215}$$

$$J_{x1y1} = J_{xy} - m\delta_x\delta_y = 0 - m\left(\frac{3}{8}R\right)^2 = -\frac{9}{64} mR^2 \tag{16.216}$$

e) Elipsoidul (fig.16.27)

Deducerea relațiilor specifice unui elipsoid de masă m și semiaxe a , b și c este în acest caz laborioasă. O cale mai simplă este să se “dedubleze” relațiile similare stabilite în cazul sferei, respectiv (16.201) ÷ (16.207). Se obțin următoarele relații:

$$V = \frac{4}{3} \pi abc \tag{16.217}$$

$$J_O = \frac{1}{5} m(a^2 + b^2 + c^2) \tag{16.218}$$

$$J_x = \frac{m}{5}(b^2 + c^2) \quad J_y = \frac{m}{5}(c^2 + a^2) \quad J_z = \frac{m}{5}(a^2 + b^2) \tag{16.219}$$

$$\mathbf{J} = \frac{m}{5} \begin{vmatrix} b^2 + c^2 & 0 & 0 \\ 0 & c^2 + a^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 + b^2 \end{vmatrix} \tag{16.220}$$

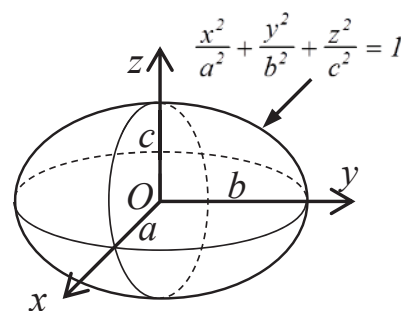


Fig.16.27

16.5.5 Metode speciale de calcul

În cap.4.7 din partea I – Statica, a fost expusă *metoda elementului finit* pentru determinarea poziției centrului de masă în cazul corpurilor la care integralele din relațiile de calcul nu au soluții analitice (integralele eliptice). Metoda este utilizabilă și pentru corpurile de formă neregulată, respectiv acele corpuri care nu pot fi descompuse în figuri geometrice simple. Procedeeul de calcul prezentat în capitolul menționat mai sus poate fi extins și pentru calculul momentelor de inerție mecanice.

Se reamintește principiul metodei. Corpul se divizează în n segmente foarte mici - *elemente finite*, având în general aceeași formă, și se consideră ca fiind compus din aceste elemente; momentul de inerție al corpului va fi suma momentelor de inerție ale elementelor finite față de reperul geometric considerat. Cu cât aceste elemente vor fi mai mici, numărul lor va fi mai mare, crescând precizia determinării. În aceste condiții, relația pentru calculul momentului de inerție polar, de exemplu, va lua următoarea formă:

$$J_O = \int_{(m)} r^2 dm \rightarrow J_O = \sum_{i=1}^n r_i^2 \Delta m = \Delta m \cdot \sum_{i=1}^n r_i^2 = \frac{m}{n} \sum_{i=1}^n r_i^2 = m j_O \quad (16.221)$$

în care prin:

$$j_O = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n r_i^2 \quad (16.222)$$

s-a notat un *moment de inerție unitar*, corespunzător unei mase a corpului egală cu unitatea ($m = 1 \text{ kg}$). În mod analog se poate proceda și pentru celelalte momente de inerție axiale și centrifugale; se observă că aceste momente de inerție unitare depind numai de numărul elementelor finite și de poziția acestora în sistemul de referință considerat. Momentele de inerție unitare se pot determina prin explorarea domeniului ocupat de corpul analizat, de regulă utilizând un program de calculator adecvat; prin înmulțirea ulterioară cu masa m se determină valorile efective ale momentelor de inerție respective.

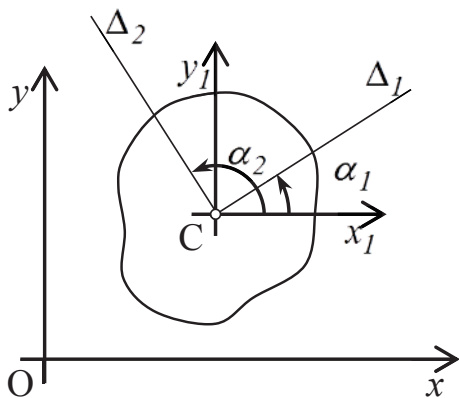


Fig.16.28

$$J_x = \int_{(m)} y^2 dm \quad J_y = \int_{(m)} x^2 dm \quad J_{xy} = \int_{(m)} xy dm \quad (16.223)$$

Se exemplifică în continuare acest procedeu de calcul, extins și pentru determinarea direcțiilor și momentelor principale de inerție, pentru cazul unei plăci plane de formă neregulată (fig.16.28). Succesiunea operațiilor este următoarea:

– se consideră un sistem de referință Oxy în planul plăcii și se calculează coordonatele x_C, y_C ale centrului de masă al acesteia;

– se calculează momentele de inerție J_x, J_y și

J_{xy} definite de relațiile generale:

– se calculează aceleași momente față de axele $Cx_I \parallel Ox$ și $Cy_I \parallel Oy$ folosind relațiile de variație:

$$J_{xI} = J_x - my_C^2 \quad J_{yI} = J_y - mx_C^2 \quad J_{xIyI} = J_{xy} - mx_C y_C \quad (16.224)$$

– se calculează $J_3 \equiv J_C = J_{xI} + J_{yI}$; acesta este unul dintre momentele principale de inerție, direcția Δ_3 este perpendiculară pe planul plăcii în C ;

– se consideră o dreaptă Δ trecând prin C care face unghiul α cu Cx_I ; pentru valori ale unghiului α în intervalul $(0, \pi)$, se calculează J_Δ cu relația:

$$J_\Delta = J_{xI} \cos^2 \alpha + J_{yI} \sin^2 \alpha - 2J_{xIyI} \cos \alpha \sin \alpha \quad (16.225)$$

provenită din particularizarea relației generale (16.36);

– se reține valoarea $J_I = J_{\Delta \min}$; este un alt moment de inerție principal; direcția Δ_I face cu Cx_I unghiul α_I pentru care s-a obținut minimumul respectiv;

– se calculează $J_2 = J_\Delta(\alpha_2)$, în care $\alpha_2 = \alpha_I + \pi/2$; direcția Δ_2 face acest unghi cu axa Cx_I ;

– verificarea calculelor se poate face cu ajutorul relației matriceale

$$\begin{bmatrix} J_I & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_1 & \sin \alpha_1 & 0 \\ \cos \alpha_2 & \sin \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} J_{xI} & -J_{xIyI} & 0 \\ -J_{xIyI} & J_{yI} & 0 \\ 0 & 0 & J_C \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \alpha_1 & \cos \alpha_2 & 0 \\ \sin \alpha_1 & \sin \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (16.226)$$

provenită din relațiile generale (16.67) și (16.69).

La realizarea unui program de calculator pe baza elementelor de mai sus, se consideră că placa este reprezentată printr-o figură la scară pe ecranul monitorului (ținând seama și de rezoluția acestuia. Se fac următoarele precizări:

– sistemul de referință se alege suprapus marginilor ecranului; în general sistemul de coordonate al ecranului are direcțiile indicate în fig.16.29;

– culoarea de fond a ecranului trebuie să fie diferită de culorile cu care se reprezintă figura plană;

– figura se explorează între niște limite de încadrare, comparând culoarea pixelilor acesteia cu cea a fondului;

– atât poziția centrului de masă cât și momentele de inerție se calculează considerând pixelii componenți ai figurii drept elemente finite identice, de arie ΔA și masă Δm ;

– prin explorarea figurii se determină numărul total n de pixeli ai acesteia; x_i, y_i sunt coordonatele curente ale unui pixel;

– coordonatele centrului de masă (în pixeli) se calculează în modul indicat în cap.4.7, utilizând relațiile:

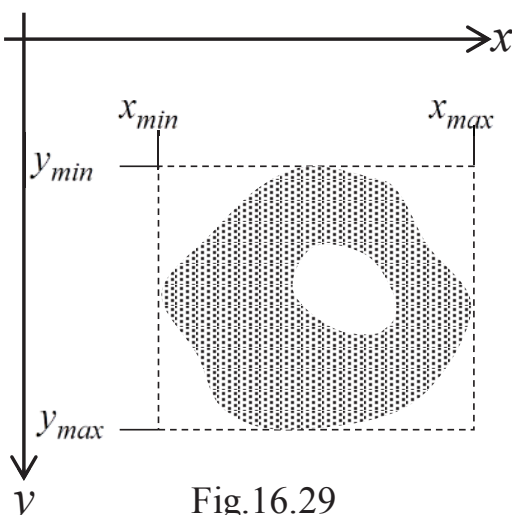


Fig.16.29

$$x_C = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad y_C = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \quad (16.227)$$

– momentele de inerție unitare față de marginile ecranului se calculează cu relațiile analoge expresiei (16.222):

$$j_x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^2 \quad j_y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 \quad j_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad (16.228)$$

– după determinarea direcțiilor principale de inerție conform celor arătate mai înainte, se marchează pe figură poziția centrului de masă și se trasează dreptele Δ_1 și Δ_2 cu o culoare distinctă; se afișează valorile momentelor de inerție principale (J_1, J_2, J_3) obținute prin înmulțirea momentelor unitare cu masa plăcii.

Se prezintă în continuare o secvență de program Turbo-Pascal care include atât determinarea poziției centrului de masă cât și a momentelor de inerție unitare principale.

```

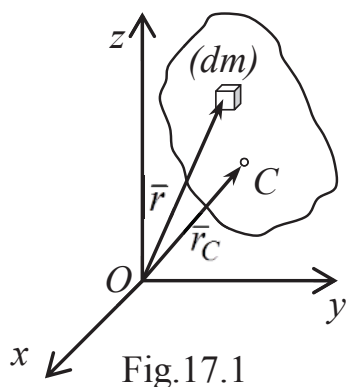
.           j1:=jx;
.           alfa1:=0;
fond:=getbkcolor;   ar1:=0;
n:=0;               for alfa:=1 to 180 do
sx:=0;               begin
sy:=0;               ar:=pi*alfa/180;
sxx:=0;              cs:=cos(ar);
syy:=0;              sn:=sin(ar);
sxy:=0;              jd:=jx*cs^2+jy*sn^2-
for y:=ymin to ymax do          2*jxy*cs*sn;
for x:=xmin to xmax do          if j1<jd then
begin                          begin
culoare:=getpixel(x,y);        j1:=jd;
if culoare <> fond then        alfa1:=alfa;
begin                          ar1:=ar;
n:=n+1;                        end; {if}
sx:=sx+x;                      end; {for alfa}
sy:=sy+y;                      alfa2:=alfa1+90;
sxx:=sxx+x*x;                  ar2:=ar1+pi/2;
syy:=syy+y*y;                  cs:=cos(ar2);
sxy:=sxy+x*y;                  sn:=sin(ar2);
end; {if}                      j2:= jx*cs^2+jy*sn^2-
                                2*jxy*cs*sn;
end; {for x}
end; {for y}
xc:=sx div n;
yc:=sy div n;
jx:=sxx div n-yc^2;
jy:=syy div n-xc^2;
jxy:=sxy div n-xc*yc;
j3:=jx+jy;
setcolor(red);
circle (xc,yc,2);

```

17. DINAMICA SOLIDULUI RIGID

17.1 Calculul parametrilor dinamici

17.1.1 Generalități



Parametrii dinamici generali, respectiv impulsul, momentul cinetic și energia cinetică se pot defini în cazul solidului rigid pornind de la relațiile lor corespunzătoare punctului material, prezentate în cap.13.1.2.

Se reamintește că în cazul punctului material parametrii dinamici menționați au expresiile:

$$\bar{H} = m\bar{v} \quad (17.1) \quad \bar{K}_O = \bar{r} \times \bar{H} = \bar{r} \times m\bar{v} \quad (17.2)$$

$$E = \frac{1}{2}mv^2 \quad (17.3)$$

Unei mase elementare dm din configurația corpului (fig.17.1), asimilată unui punct material, îi vor corespunde parametrii dinamici elementari:

$$d\bar{H} = \bar{v} dm \quad (17.4) \quad d\bar{K}_O = \bar{r} \times d\bar{H} = \bar{r} \times \bar{v} dm \quad (17.5) \quad dE = \frac{1}{2}v^2 dm \quad (17.6)$$

Pentru întregul corp parametrii dinamici menționați se calculează făcând integrarea pentru toată masa corpului. În funcție și de mișcarea pe care o are corpul acești parametri pot lua forme specifice; se vor trata mișcările uzuale cele mai generale, respectiv translația, rotația în jurul unui punct fix, rotația în jurul unei axe fixe, mișcarea plan-paralelă.

Pentru nevoile demonstrațiilor următoare se reamintește relația cunoscută din Statică referitoare la poziția centrului de masă:

$$\int_{(m)} \bar{r} dm = m\bar{r}_C \quad (17.7)$$

Impulsul total al corpului se determină, pornind de la relația (17.4), în modul următor:

$$\bar{H} = \int d\bar{H} = \int_{(m)} \bar{v} dm = \int_{(m)} \frac{d\bar{r}}{dt} dm = \frac{d}{dt} \left(\int_{(m)} \bar{r} dm \right) = \frac{d}{dt} (m\bar{r}_C) = m \frac{d\bar{r}_C}{dt} = m\bar{v}_C \quad (17.8)$$

În această relație derivarea în raport cu timpul este independentă față de integrarea pe masa corpului, astfel că cele două operațiuni pot fi inversate în expresie. Relația de mai sus pune în evidență că impulsul unui corp nu depinde de forma și dimensiunile acestuia ci numai de poziția și viteza centrului său de masă.

Vectorul impulsului, coliniar cu viteza centrului de masă, are în sistemul Oxyz dezvoltarea analitică și modulul:

$$\bar{H} = H_x \bar{i} + H_y \bar{j} + H_z \bar{k} \quad (17.9) \quad |\bar{H}| = \sqrt{H_x^2 + H_y^2 + H_z^2} \quad (17.10)$$

Relațiile pentru calculul impulsului în funcție de tipul mișcării depind de cele stabilite în Cinematică pentru viteze.

Momentul cinetic se definește, pornind de la relația (17.5), prin:

$$\bar{K}_O = \int d\bar{K}_O = \int_{(m)} (\bar{r} \times \bar{v}) dm \quad (17.11)$$

Expresia analitică a vectorului moment cinetic și modulul acestuia sunt:

$$\bar{K}_O = K_x \bar{i} + K_y \bar{j} + K_z \bar{k} \quad (17.12) \quad |\bar{K}_O| = \sqrt{K_x^2 + K_y^2 + K_z^2} \quad (17.13)$$

Energia cinetică a corpului are definiția stabilită pe baza relației (17.6):

$$E = \int dE = \frac{1}{2} \int_{(m)} v^2 dm \quad (17.14)$$

17.1.2 Cazul mișcării de translație

Caracteristic mișcării de translație a unui corp (fig.17.2) este faptul că toate punctele lui au aceeași viteză, respectiv $\bar{v} = \bar{v}_C$.

a) Impulsul. Relația generală (17.8) se poate pune sub forma matriceală:

$$\begin{bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} v_{Cx} \\ v_{Cy} \\ v_{Cz} \end{bmatrix} \quad (17.15)$$

În cazul unei translații rectilinii, la nivel scalar:

$$H = m v_C \quad (17.16)$$

b) Momentul cinetic. Relația generală (17.11) se prelucrează în cazul translației în modul următor:

$$\bar{K}_O = \int_{(m)} (\bar{r} \times \bar{v}_C) dm = \int_{(m)} (\bar{r} dm \times \bar{v}_C) = \left(\int_{(m)} \bar{r} dm \right) \times \bar{v}_C = m \bar{r}_C \times \bar{v}_C = \bar{r}_C \times m \bar{v}_C \quad (17.17)$$

Similitudinea cu (17.2) arată că în translație momentul cinetic este identic cu cel al unui punct material având masa corpului, poziția și viteza centrului său de masă.

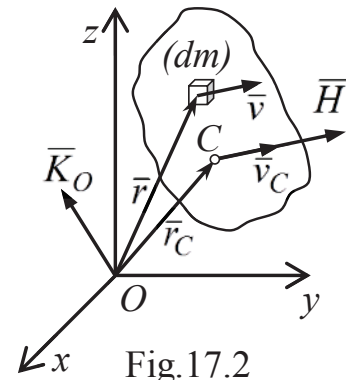
Relația de mai sus se mai poate pune și sub forma determinantului prin care se exprimă un produs vectorial, din care, în continuare, se pot calcula proiecțiile:

$$\bar{K}_O = m \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_C & y_C & z_C \\ v_{Cx} & v_{Cy} & v_{Cz} \end{vmatrix} \quad (17.18) \quad \begin{cases} K_x = m(y_C v_{Cz} - z_C v_{Cy}) \\ K_y = m(z_C v_{Cx} - x_C v_{Cz}) \\ K_z = m(x_C v_{Cy} - y_C v_{Cx}) \end{cases} \quad (17.19)$$

Relația matriceală echivalentă pentru calculul proiecțiilor este:

$$\begin{bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_z \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} 0 & -v_{Cz} & v_{Cy} \\ v_{Cz} & 0 & -v_{Cx} \\ -v_{Cy} & v_{Cx} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_C \\ y_C \\ z_C \end{bmatrix} \quad (17.20)$$

în care intervine matricea antisimetrică asociată vitezei centrului de masă \bar{v}_C . În cazul unei translații rectilinii, dacă vectorii \bar{r}_C și \bar{v}_C sunt coliniari, momentul cinetic al corpului față de reperul O este nul.



c) Energia cinetică. Ținând cont de faptul că toate punctele corpului au aceeași viteză, relația generală (17.14) ia forma:

$$E = \frac{1}{2} \int_{(m)} v_C^2 dm = \frac{1}{2} v_C^2 \int_{(m)} dm = \frac{1}{2} m v_C^2 \quad (17.21)$$

În translație energia cinetică a corpului este identică cu cea a unui punct material având masa corpului și care se deplasează cu viteza centrului de masă al acestuia.

17.1.3 Cazul mișcării de rotație în jurul unui punct fix

Punctul fix al corpului este constituit de o articulație sferică iar originea sistemului de referință se alege, pentru o tratare comodă, chiar în acesta (fig.17.3).

a) Impulsul. Viteza centrului de masă este:

$$\bar{v}_C = \bar{\omega} \times \bar{r}_C \quad (17.22)$$

astfel că impulsul se poate scrie:

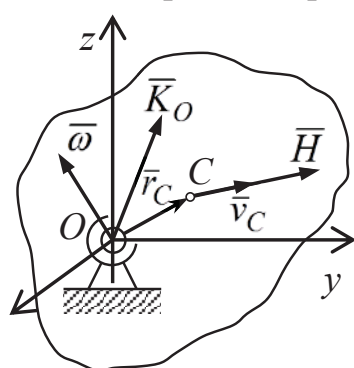


Fig.17.3

$$\bar{H} = m(\bar{\omega} \times \bar{r}_C) = m \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x_C & y_C & z_C \end{vmatrix} \quad (17.23)$$

Rezultă proiecțiile pe axe:

$$\begin{cases} H_x = m(z_C \omega_y - y_C \omega_z) \\ H_y = m(x_C \omega_z - z_C \omega_x) \\ H_z = m(y_C \omega_x - x_C \omega_y) \end{cases} \quad (17.24)$$

Relația matriceală corespunzătoare este:

$$\begin{bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_C \\ y_C \\ z_C \end{bmatrix} \quad (17.25)$$

în care intervine matricea antisimetrică atașată vitezei unghiulare $\bar{\omega}$. Impulsul este nul dacă centrul de masă C coincide cu punctul fix O ($\bar{r}_C = 0$).

b) Momentul cinetic. Viteza masei elementare dm este $\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r}$ astfel că relația generală (17.11) devine:

$$\bar{K}_O = \int_{(m)} [\bar{r} \times (\bar{\omega} \times \bar{r})] dm = \int_{(m)} [\bar{\omega} (\bar{r} \cdot \bar{r}) - \bar{r} (\bar{\omega} \cdot \bar{r})] dm \quad (17.26)$$

în care s-a introdus și expresia alternativă a produsului dublu vectorial. Ținând cont de expresiile analitice ale vectorilor $\bar{\omega}$ și \bar{r} , produsele scalare vor fi:

$$\bar{r} \cdot \bar{r} = x^2 + y^2 + z^2 \quad (17.27) \quad \bar{\omega} \cdot \bar{r} = x \omega_x + y \omega_y + z \omega_z \quad (17.28)$$

Relația (17.26) devine:

$$\bar{K}_O = \int_{(m)} [(\omega_x \bar{i} + \omega_y \bar{j} + \omega_z \bar{k}) \cdot (x^2 + y^2 + z^2) - (x \bar{i} + y \bar{j} + z \bar{k}) \cdot (x \omega_x + y \omega_y + z \omega_z)] dm \quad (17.29)$$

Cu observația că vectorul $\bar{\omega}$ este independent de distribuția masei corpului, se grupează în continuare termenii acestei relații după versorii axelor de coordonate.

$$\begin{aligned} K_x &= \int_{(m)} [\omega_x(x^2 + y^2 + z^2) - x(x\omega_x + y\omega_y + z\omega_z)] dm = \\ &= \omega_x \int_{(m)} (y^2 + z^2) dm - \omega_y \int_{(m)} xy dm - \omega_z \int_{(m)} xz dm \end{aligned} \quad (17.30)$$

Se recunosc în integralele din partea a doua a relației momentele de inerție axiale și centrifugale referitoare la axa Ox a sistemului de referință. Procedând în mod analog și pentru celelalte axe, se obține:

$$\begin{cases} K_x = J_x \omega_x - J_{xy} \omega_y - J_{xz} \omega_z \\ K_y = -J_{yx} \omega_x + J_y \omega_y - J_{yz} \omega_z \\ K_z = -J_{zx} \omega_x - J_{zy} \omega_y + J_z \omega_z \end{cases} \quad (17.31)$$

Rezultatele obținute pot fi grupate în relația matriceală:

$$\begin{bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \quad (17.32)$$

în care se recunoaște matricea de inerție \mathbf{J} a corpului față de axele sistemului $Oxyz$. Sub formă simbolică această relație se poate scrie:

$$\mathbf{K} = \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega} \quad (17.33)$$

În cazul în care axele sistemului sunt direcții principale de inerție, atunci $J_x = J_1$, $J_y = J_2$ și $J_z = J_3$ sunt momente principale de inerție ale corpului iar toate momentele centrifugale sunt nule. Relația (17.32) devine:

$$\begin{bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \quad (17.34)$$

iar expresia analitică a momentului cinetic \bar{K}_O ia forma redusă:

$$\bar{K}_O = J_1 \omega_x \bar{i} + J_2 \omega_y \bar{j} + J_3 \omega_z \bar{k} \quad (17.35)$$

c) Energia cinetică. Viteza masei elementare dm se pune sub forma:

$$\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} \rightarrow \begin{cases} v_x = z\omega_y - y\omega_z \\ v_y = x\omega_z - z\omega_x \\ v_z = y\omega_x - x\omega_y \end{cases} \quad (17.36)$$

Făcând înlocuirile în relația:

$$v^2 = |\bar{v}|^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \quad (17.37)$$

se obține:

$$v^2 = \omega_x^2 (y^2 + z^2) + \omega_y^2 (z^2 + x^2) + \omega_z^2 (x^2 + y^2) - 2\omega_x \omega_y xy - 2\omega_y \omega_z yz - 2\omega_z \omega_x zx \quad (17.38)$$

Se introduce această expresie în relația generală a energiei cinetice (17.14):

$$E = \frac{I}{2} \left[\omega_x^2 \int_{(m)} (y^2 + z^2) dm + \omega_y^2 \int_{(m)} (z^2 + x^2) dm + \omega_z^2 \int_{(m)} (x^2 + y^2) dm - \right. \\ \left. - 2\omega_x \omega_y \int_{(m)} xy dm - 2\omega_y \omega_z \int_{(m)} yz dm - 2\omega_z \omega_x \int_{(m)} zx dm \right] \quad (17.39)$$

Se obține în final:

$$E = \frac{I}{2} (J_x \omega_x^2 + J_y \omega_y^2 + J_z \omega_z^2 - 2J_{xy} \omega_x \omega_y - 2J_{yz} \omega_y \omega_z - 2J_{zx} \omega_z \omega_x) \quad (17.40)$$

Această relație poate fi pusă și sub forma matriceală:

$$E = \frac{I}{2} \cdot \begin{bmatrix} \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \quad (17.41)$$

Forma concentrată a acestei relații este:

$$E = \frac{I}{2} \boldsymbol{\omega}_t \cdot \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega} \quad (17.42)$$

Dacă axele Ox , Oy și Oz sunt direcții principale de inerție, relația (17.41) devine:

$$E = \frac{I}{2} \cdot \begin{bmatrix} \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \quad (17.43)$$

sau:

$$E = \frac{I}{2} (J_1 \omega_x^2 + J_2 \omega_y^2 + J_3 \omega_z^2) \quad (17.44)$$

17.1.4 Cazul mișcării de rotație în jurul unei axe fixe

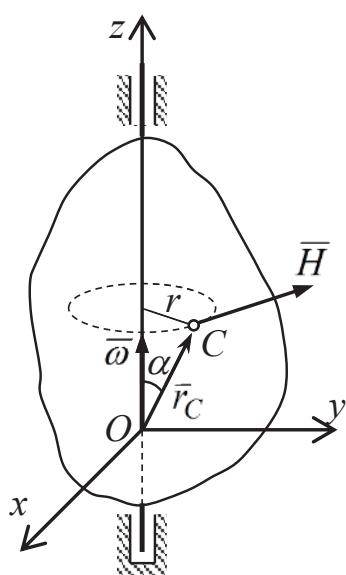


Fig. 17.4

Viteza unghiulară $\bar{\omega}$ este coliniară cu axa de rotație; toate punctele corpului descriu traiectorii circulare în jurul acesteia.

c) Impulsul. Vectorul impulsului este tangențial la cercul descris de centrul de masă al corpului în sensul vitezei acestuia (fig.17.4). Vectorul impulsului și modulul acestuia se determină cu relațiile:

$$\bar{H} = m\bar{v}_C = m(\bar{\omega} \times \bar{r}_C) \quad (17.45)$$

$$|\bar{H}| = m|\bar{\omega}||\bar{r}_C|\sin \alpha = m\omega r \quad (17.46)$$

Dacă centrul de masă se află pe axa de rotație $r = 0$ și în consecință $\bar{H} = 0$. Aceeași situație se întâlnește și în cazul unei roți având o articulație cilindrică fixă în centrul ei geometric (fig.17.5).

b) Momentul cinetic. Demonstrația efectuată pentru cazul mișcării de rotație în jurul unui punct fix își păstrează valabilitatea și în acest caz. Deosebirea provine din faptul că vectorul vitezei unghiulare este coliniar cu axa Oz , suprapusă în cazul de față axei de rotație.

$$\bar{\omega} = \omega \bar{k} \quad (17.47)$$

Relația matriceală (17.32) ia forma:

$$\begin{bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix} \quad (17.48)$$

Expresia vectorului moment cinetic este:

$$\bar{K}_O = -J_{xz}\omega \bar{i} - J_{yz}\omega \bar{j} + J_z\omega \bar{k} \quad (17.49)$$

Relația matriceală (17.33) își păstrează valabilitatea, cu precizarea că vectorul ω va conține doar elementul $\omega_z \neq 0$.

Dacă axa de rotație este și axă de simetrie, atunci ea este o direcție principală de inerție a corpului și în consecință $J_{xz} = J_{yz} = 0$. Relația de mai sus devine:

$$\bar{K}_O = J_z\omega \bar{k} = J_z\bar{\omega} \quad (17.50)$$

În această situație se deduce că vectorul momentului cinetic este coliniar cu axa de rotație (fig.17.6). Generalizând, față de o axă de rotație oarecare Δ care trece prin O și este și axă de simetrie a corpului, momentul cinetic este:

$$\bar{K}_O = J_\Delta \bar{\omega} \quad (17.51)$$

În cazul particular al unei disc articulat în centrul său de masă (fig.17.5, 17.7), $O \equiv C$, vectorul \bar{K}_O este perpendicular pe planul discului iar modulul său este:

$$|\bar{K}_O| = J_C \omega \quad (17.52)$$

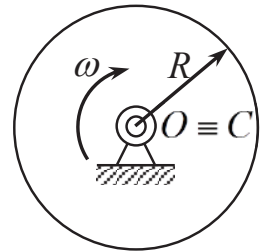


Fig.17.5

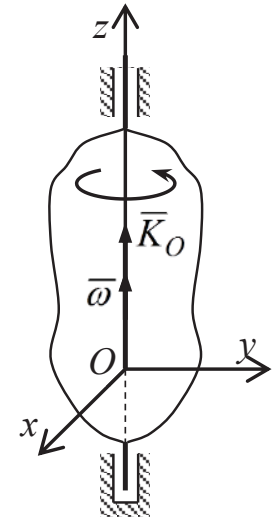


Fig.17.6

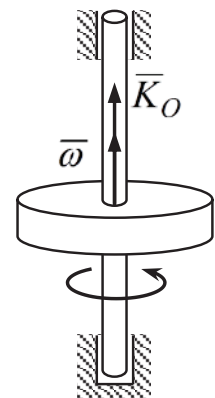


Fig.17.7

c) Energia cinetică. Se particularizează relația (17.40) pentru situația $\omega_x = \omega_y = 0$ și $\omega_z = \omega$; rezultă:

$$E = \frac{1}{2} J_z \omega^2 \quad (17.53)$$

Generalizând pentru rotația în jurul unei axe fixe oarecare Δ se obține:

$$E = \frac{1}{2} J_\Delta \omega^2 \quad (17.54)$$

Se constată că energia cinetică depinde numai de momentul de inerție axial față de axa fixă și de viteza unghiulară cu care are loc rotația în jurul acesteia.

Relația matriceală (17.42) este deasemenea valabilă cu observația că vectorul ω conține numai elementul $\omega_z \neq 0$.

17.1.5 Cazul mișcării plan-paralele

S-a arătat în Cinematică că mișcarea corpului poate fi redusă în acest caz la cea a secțiunii acestuia conținută în planul mișcării. Parametrii cinematici (vectorul de poziție, viteza și accelerația) sunt vectori conținuți în acest plan iar parametrii unghiulari $\bar{\omega}$ și $\bar{\varepsilon}$ sunt perpendiculari pe acesta. Mișcarea poate fi considerată atât ca o rotație în jurul centrului instantaneu de rotație cât și ca o compunere între o translație cu parametrii cinematici ai unui punct al corpului din planul mișcării (de regulă centrul de masă al acestuia) simultană cu o rotație în jurul acestui punct.

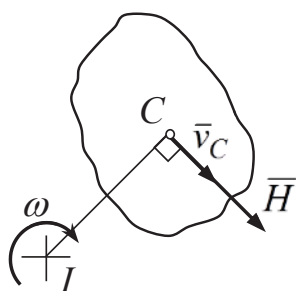


Fig.17.8

a) Impulsul. Viteza \bar{v}_C a centrului de masă, calculată prin procedeele cunoscute din Cinematică, este conținută în planul mișcării; în consecință, vectorul $\bar{H} = m\bar{v}_C$ va fi și el conținut în acest plan.

Dacă mișcarea se raportează la centrul instantaneu de rotație (fig.17.8) viteza \bar{v}_C este perpendiculară pe segmentul IC și are sensul vitezei unghiulare ω ; modulul impulsului se va calcula cu relația:

$$|\bar{H}| = m|\bar{v}_C| = m\omega IC \quad (17.55)$$

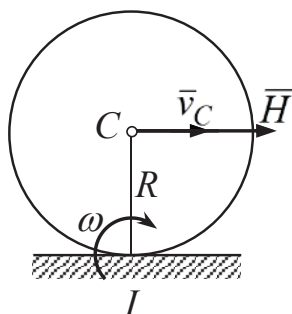


Fig.17.9

În cazul particular al unei roți aflate în rostogolire fără alunecare (fig.17.9) centrul instantaneu de rotație se află în punctul de contact cu suprafața de sprijin. Impulsul se va calcula cu relația:

$$|\bar{H}| = m\omega R \quad (17.56)$$

b) Momentul cinetic. Față de reperul O , ținând cont de compunerea mișcărilor, se poate utiliza relația:

$$\bar{K}_O = \bar{r}_C \times m\bar{v}_C + \bar{K}_C \quad (17.57)$$

în care \bar{K}_C este momentul cinetic corespunzător rotației corpului în jurul centrului său de masă; se poate observa că atât \bar{K}_O cât și \bar{K}_C sunt vectori perpendiculari pe planul mișcării. Pentru roata care se rostogolește fără alunecare (fig.17.9), relația utilă în aplicații este:

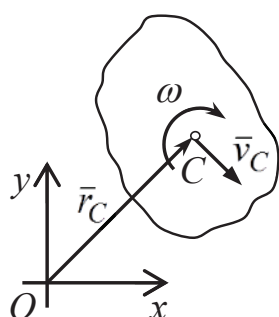


Fig.17.10

$$|\bar{K}_C| = J_C\omega = \frac{mR^2}{2}\omega \quad (17.58)$$

c) Energia cinetică. Considerând mișcarea plan-paralelă drept o rotație în jurul unei axe instantanee care trece prin punctul I , se poate utiliza relația:

$$E = \frac{1}{2}J_I\omega^2 \quad (17.59)$$

Pe baza relației de variație a momentelor de inerție față de axe paralele:

$$J_I = J_C + m \cdot IC^2 \quad (17.60)$$

Energia cinetică devine:

$$E = \frac{1}{2}(J_C + m \cdot IC^2)\omega^2 = \frac{1}{2}J_C\omega^2 + \frac{1}{2}m(\omega \cdot IC)^2 \quad (17.61)$$

Observând că $\omega IC = v_C$, se obține relația finală:

$$E = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}J_C\omega^2 = E_{tr} + E_{rot} \quad (17.62)$$

Energia cinetică a corpului aflat în mișcare plan-paralelă se poate calcula însumând energia cinetică corespunzătoare translației acestuia cu viteza centrului său de masă cu energia cinetică corespunzătoare rotației în jurul acestui punct.

17.2 Teoremele generale în dinamica solidului rigid

Teoremele generale au ca scop determinarea variației parametrilor dinamici ai unui solid rigid (impulsul, momentul cinetic, energia cinetică) în funcție de forțele aplicate acestuia la un moment dat, variații care se exprimă prin derivatele acestor parametri în raport cu timpul.

La punctul material forțele aplicate sunt concurente și se reduc la o singură forță \bar{F} ; teoremele generale au fost demonstrate în cap 13.1.4 și au forma:

$$\frac{d\bar{H}}{dt} = \bar{F} \quad (17.63) \quad \frac{d\bar{K}_O}{dt} = \bar{M}_O(\bar{F}) = \bar{r} \times \bar{F} \quad (17.64) \quad dE = dL \quad (17.65)$$

La solidul rigid, așa cum s-a arătat în Statică, forțele exterioare se pot reduce în cazul general la un torsesor compus din rezultanta forțelor și din momentul resultant al acestora în raport cu un punct de reducere O , respectiv:

$$\tau_O \begin{cases} \bar{R} = \sum \bar{F}_i \\ \bar{M}_O = \sum \bar{M}_O(\bar{F}_i) = \sum (\bar{r}_i \times \bar{F}_i) \end{cases} \quad (17.63)$$

în care i este în acest caz un indice de însumare. Forțele menționate sunt forțe concentrate aplicate în puncte distincte ale corpului; forțele distribuite și forțele masice sunt și ele reductibile la forțe concentrate. Din acest motiv, pentru o demonstrație riguroasă a teoremelor generale, la tranziția de la punctul material la solidul rigid trebuie intercalat sistemul de puncte materiale.

Se consideră un sistem de puncte materiale (fig.17.11) acționat de forțele exterioare \bar{F}_i precum și de forțele de interacțiune interioare \bar{F}_{ij} dintre aceste puncte. Este evident că în baza principiului acțiunii și reacțiunii, forțele interioare sunt egale, respectiv:

$$\bar{F}_{ij} = -\bar{F}_{ji} \quad (17.64)$$

a) *Teorema impulsului.* Pentru un punct material de rang i din sistem teorema impulsului are forma, provenită din (17.63):

$$\dot{\bar{H}}_i = \bar{F}_i + \sum \bar{F}_{ij} \quad (17.65)$$

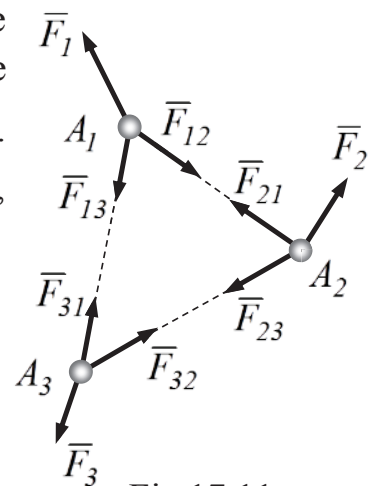


Fig.17.11

Impulsul total al sistemului de puncte materiale este suma impulsurilor acestora; însumarea se aplică și derivatelor acestor impulsuri, astfel că:

$$\dot{\bar{H}} = \sum \dot{\bar{H}}_i = \sum \bar{F}_i + \sum \sum \bar{F}_{ij} \quad (17.66)$$

În baza relației (17.64), suma totală a forțelor interioare este:

$$\sum \bar{F}_{int} = \sum \sum \bar{F}_{ij} = 0 \quad (17.67)$$

și, în consecință:

$$\dot{\bar{H}} = \sum \bar{F}_i = \sum \bar{F}_{ext} \quad (17.68)$$

Se deduce că variația impulsului total al unui sistem de puncte materiale este determinată numai de forțele exterioare.

Solidul rigid este compus dintr-o infinitate de mase elementare, analoge punctelor materiale. Forțele dintre aceste mase elementare reprezintă tensiunile interioare ale corpului care, dată fiind rigiditatea acestuia, nu-i influențează mișcarea. Relația (17.68) devine în acest caz,

$$\dot{\bar{H}} = \frac{d}{dt} (\int dH) = \sum \bar{F}_i = \sum \bar{F}_{ext} \quad (17.69)$$

sau, ținând cont și de relația de definiție (17.8):

$$\frac{d\bar{H}}{dt} = m\dot{\bar{v}}_C = m\bar{a}_C = \sum \bar{F}_{ext} = \bar{R} \quad (17.70)$$

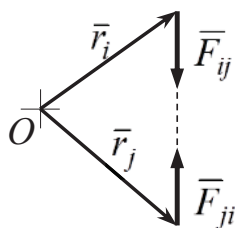
Teorema impulsului, exprimată de această relație, precizează că *variația impulsului unui solid rigid este dată de rezultanta forțelor exterioare aplicate corpului.*

b) Teorema momentului cinetic. Pentru punctul material de rang i , poziționat prin vectorul \bar{r}_i față de un reper geometric fix O , teorema momentului cinetic se poate pune sub o formă analogă relației (17.64), respectiv:

$$\dot{\bar{K}}_O^{(i)} = \bar{r}_i \times (\bar{F}_i + \sum \bar{F}_{ij}) = \bar{r}_i \times \bar{F}_i + \bar{r}_i \times \sum \bar{F}_{ij} \quad (17.71)$$

Momentul cinetic total al sistemului față de reperul O se obține însumând momentele cinetice ale punctelor materiale ale acestuia; însumarea se aplică și la nivel de derivate, astfel că:

$$\dot{\bar{K}}_O = \sum \dot{\bar{K}}_O^{(i)} = \sum (\bar{r}_i \times \bar{F}_i) + \sum (\bar{r}_i \times \sum \bar{F}_{ij}) \quad (17.72)$$



Se observă că termenul final al acestei relații este nul deoarece pentru fiecare pereche de forțe interioare (fig.17.12) există o relație de forma:

$$\bar{r}_i \times \bar{F}_{ij} = -(\bar{r}_j \times \bar{F}_{ji}) \quad (17.73)$$

Se reține în final relația:

$$\dot{\bar{K}}_O = \sum (\bar{r}_i \times \bar{F}_i) = \sum \bar{M}_O(\bar{F}_i) = \sum \bar{M}_O(\bar{F}_{ext}) \quad (17.74)$$

Pe baza observațiilor de mai sus privind tensiunile interioare, relația obținută este valabilă și pentru solidul rigid. Teorema momentului cinetic, exprimată de această relație, pune în evidență faptul că *variația momentului cinetic al unui solid rigid este produsă de momentul resultant al forțelor exterioare.*

c) *Teorema energiei cinetice.* Pentru punctul material de rang i din sistem, variația energiei cinetice se exprimă prin relația diferențială:

$$dE_i = dL_i = (\bar{F}_i + \sum \bar{F}_{ij}) \cdot d\bar{r}_i \quad (17.75)$$

în care $d\bar{r}_i$ este deplasarea elementară sub acțiunea forțelor aplicate punctului iar dL_i este lucrul mecanic elementar produs de acestea. Pentru întregul sistem de puncte materiale se obține variația:

$$dE = \sum dE_i = \sum (\bar{F}_i \cdot d\bar{r}_i) + \sum \sum (\bar{F}_{ij} \cdot d\bar{r}_i) = dL_{ext} + dL_{int} \quad (17.78)$$

Lucrul mecanic al forțelor interioare nu este nul deoarece deplasările relative pe direcția acestor forțe există. Se deduce că variația energiei cinetice a sistemului este egală cu suma lucrurilor mecanice atât ale forțelor exterioare cât și a celor interioare.

La solidul rigid, deplasările relative între oricare puncte ale corpului sunt nule astfel că lucrul mecanic al tensiunilor interioare este nul, respectiv $dL_{int} = 0$. Se obține forma diferențială a teoremei energiei cinetice:

$$dE = dL_{ext} \quad (17.79)$$

la care se adaugă și forma finită, corespunzătoare trecerii corpului dintr-o poziție A într-o poziție B :

$$E_B - E_A = L_{AB} \quad (17.80)$$

Enunțul acestei teoreme precizează că *variația energiei cinetice a unui corp este egală cu lucrul mecanic produs de forțele exterioare care îi sunt aplicate.*

17.3 Teoremele generale în mișcarea relativă a solidului rigid față de centrul său de masă

Teoremele generale au fost demonstrate în capitolul precedent luând în considerare mișcarea solidului rigid față de un sistem de referință fix, respectiv mișcarea absolută a acestuia. În multe aplicații interesează însă utilizarea acestor teoreme considerând mișcarea relativă a corpului față de centrul său de masă.

Se alege un sistem de referință mobil $Cxyz$ cu originea în centrul de masă al corpului, ale cărui axe sunt paralele cu cele ale sistemului de referință fix $Ox_1y_1z_1$ (fig.17.13). Mișcarea absolută a corpului față de sistemul fix va fi compusă dintr-o mișcare de transport (translație) a sistemului mobil față de cel fix, efectuată simultan cu mișcarea relativă (rotație) a corpului față de centrul său de masă.

În conformitate cu cele arătate în Cinematică (cap.11) referitor la mișcările compuse, parametrii cinematici ai unei mase elementare dm în raport cu cele două sisteme de referință sunt legați între ei prin relațiile:

$$\bar{r}_i = \bar{r}_C + \bar{r} \quad (17.81)$$

$$\bar{v}_i = \bar{v}_C + \bar{v} \quad (17.82)$$

$$\bar{a}_i = \bar{a}_C + \bar{a} \quad (17.83)$$

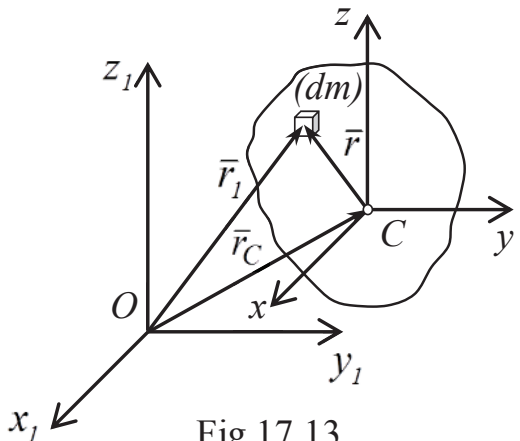


Fig.17.13

În aceste relații $\bar{r}_I, \bar{v}_I, \bar{a}_I$ sunt parametrii cinematici ai mișcării absolute, $\bar{r}_C, \bar{v}_C, \bar{a}_C$ sunt parametrii cinematici mișcării de transport ; parametrii $\bar{r}, \bar{v}, \bar{a}$ se referă la mișcarea relativă a masei elementare față de centrul de masă al corpului. Deoarece mișcarea de transport este o translație, accelerația Coriolis este nulă.

Mărimile dinamice ale corpului, respectiv impulsul, momentul cinetic și energia cinetică, la care se adaugă și lucrul mecanic al forțelor exterioare se vor recalcula în continuare pornind de la relațiile generale de definiție și ținând cont de compunerea mișcărilor menționate mai sus, cu adaptările de rigoare în ceea ce privește indicieria. Se precizează în prealabil că, prin alegerea originii sistemului de referință mobil în centrul de masă, există următoarele relații auxiliare:

$$\int_{(m)} dm = m \quad (17.84) \qquad \int_{(m)} \bar{r} dm = 0 \quad (17.85)$$

$$\int_{(m)} \bar{v} dm = \int_{(m)} \frac{d\bar{r}}{dt} dm = \frac{d}{dt} \left(\int_{(m)} \bar{r} dm \right) = 0 \quad (17.86)$$

Totodată, datorită faptului că mișcarea de transport este o translație, parametrii cinematici $\bar{r}_C, \bar{v}_C, \bar{a}_C$ nu depind de distribuția masei corpului, putând fi extrași de sub semnul de integrare împreună cu operatorii algebrici respectivi.

a) Impulsul.

$$\bar{H} = \int_{(m)} \bar{v}_I dm = \int_{(m)} (\bar{v}_C + \bar{v}) dm = \bar{v}_C \int_{(m)} dm + \int_{(m)} \bar{v} dm = m \bar{v}_C \quad (17.87)$$

Expresia impulsului nu depinde de mișcarea relativă a corpului.

b) Momentul cinetic.

$$\bar{K}_O = \int_{(m)} (\bar{r}_I \times \bar{v}_I) dm = \int_{(m)} [(\bar{r}_C + \bar{r}) \times (\bar{v}_C + \bar{v})] dm \quad (17.88)$$

Cele patru integrale care rezultă prin dezvoltarea acestei expresii se evaluează separat, după cum urmează:

$$\int_{(m)} (\bar{r}_C \times \bar{v}_C) dm = (\bar{r}_C \times \bar{v}_C) \int_{(m)} dm = \bar{r}_C \times m \bar{v}_C \quad (17.89)$$

$$\int_{(m)} (\bar{r}_C \times \bar{v}) dm = \bar{r}_C \times \left(\int_{(m)} \bar{v} dm \right) = 0 \quad (17.90)$$

$$\int_{(m)} (\bar{r} \times \bar{v}_C) dm = \left(\int_{(m)} \bar{r} dm \right) \times \bar{v}_C = 0 \quad (17.91)$$

$$\int_{(m)} (\bar{r} \times \bar{v}) dm = \bar{K}_C \quad (17.92)$$

Se obține în final:

$$\bar{K}_O = \bar{r}_C \times m \bar{v}_C + \bar{K}_C \quad (17.93)$$

Expresia obținută este cunoscută în Mecanică drept *relația lui Koenig pentru momentul cinetic*. Această relație precizează că momentul cinetic al unui solid rigid față de un punct fix O este egal cu suma dintre momentul cinetic corespunzător translației corpului cu parametrii cinematici ai centrului său de masă (rel.17.17) și momentul cinetic corespunzător rotației corpului în jurul acestui punct.

c) Energia cinetică. Pentru patratul vitezei absolute se poate face prelucrarea următoare:

$$v_I^2 = |\bar{v}_I|^2 = \bar{v}_I \cdot \bar{v}_I = \bar{v}_C \cdot \bar{v}_C + 2\bar{v}_C \cdot \bar{v} + \bar{v} \cdot \bar{v} = v_C^2 + 2\bar{v}_C \cdot \bar{v} + v^2 \quad (17.94)$$

Energia cinetică totală, corespunzătoare mișcării absolute a corpului, se poate scrie:

$$E_I = \frac{1}{2} \int_{(m)} v_I^2 dm = \frac{1}{2} v_C^2 \int_{(m)} dm + \bar{v}_C \cdot \int_{(m)} \bar{v} dm + \frac{1}{2} \int_{(m)} v^2 dm \quad (17.95)$$

Se notează:

$$E = \frac{1}{2} \int_{(m)} v^2 dm \quad (17.96)$$

energia cinetică corespunzătoare mișcării relative a corpului față de centrul său de masă. Energia cinetică totală va lua forma:

$$E_I = \frac{1}{2} m v_C^2 + E \quad (17.97)$$

Această expresie este cunoscută sub denumirea de *relația lui Koenig pentru energia cinetică*. Ea precizează că energia cinetică totală este egală cu suma dintre energia cinetică corespunzătoare translației corpului cu viteza centrului său de masă și energia cinetică corespunzătoare mișcării lui relative față de acest punct.

d) Lucrul mecanic elementar al forțelor exterioare aplicate corpului, calculat cu deplasările absolute ale punctelor lor de aplicație, se poate pune sub forma:

$$\begin{aligned} dL_I &= \sum (\bar{F} \cdot d\bar{r}_I) = \sum [\bar{F} \cdot (d\bar{r}_C + d\bar{r})] = \\ &= (\sum \bar{F}) \cdot d\bar{r}_C + \sum (\bar{F} \cdot d\bar{r}) = \bar{R} \cdot d\bar{r}_C + dL \end{aligned} \quad (17.98)$$

în care s-a notat:

$$dL = \sum (\bar{F} \cdot d\bar{r}) \quad (17.99)$$

lucrul mecanic efectuat de forțele exterioare cu deplasările locale ale punctelor lor de aplicație față de sistemul de referință mobil.

Se reanalizează în continuare teoremele generale ținând cont de mișcarea compusă a corpului.

a) Teorema impulsului. Se derivează în raport cu timpul relația (17.87):

$$\dot{\bar{H}} = m\dot{\bar{v}}_C = m\dot{\bar{a}}_C = \sum \bar{F} = \bar{R} \quad (17.100)$$

Relația obținută este identică cu (17.70); mișcarea corpului față de centrul său de masă nu afectează această teoremă.

b) Teorema momentului cinetic. Forma generală a acestei teoreme, dată de relația (17.74), este:

$$\dot{\bar{K}}_O = \sum \bar{M}_O(\bar{F}) \quad (17.101)$$

Ținând cont de (17.73), primul termen al acestei relații devine:

$$\dot{\bar{K}} = \dot{\bar{r}}_C \times m\bar{v}_C + \bar{r}_C \times m\dot{\bar{v}}_C + \dot{\bar{K}}_C = \bar{r}_C \times m\dot{\bar{a}}_C + \dot{\bar{K}}_C = \bar{r}_C \times \bar{R} + \dot{\bar{K}}_C \quad (17.102)$$

Se observă că $\dot{\bar{r}}_C = \bar{v}_C$ și, în consecință, primul termen al derivatei este nul.

Momentul rezultat al forțelor exterioare se poate prelucra după cum urmează:

$$\begin{aligned}\Sigma \bar{M}_O(\bar{F}) &= \Sigma(\bar{r}_I \times \bar{F}) = \Sigma[(\bar{r}_C + \bar{r}) \times \bar{F}] = \\ &= \bar{r}_C \times (\Sigma \bar{F}) + \Sigma(\bar{r} \times \bar{F}) = \bar{r}_C \times \bar{R} + \Sigma \bar{M}_C(\bar{F})\end{aligned}\quad (17.103)$$

În această relație vectorii de poziție \bar{r}_I și \bar{r} aparțin punctelor de aplicație ale forțelor exterioare. Făcând înlocuirile în (17.101), după reducerea termenului comun $\bar{r}_C \times \bar{R}$, se obține:

$$\dot{\bar{K}}_C = \Sigma \bar{M}_C(\bar{F}) \quad (17.104)$$

Această relație, identică ca formă cu (17.101), precizează că variația în raport cu timpul a momentului cinetic, corespunzător mișcării relative față de centrul său de masă, este dată de momentul rezultat al forțelor exterioare față de acest punct.

c) Teorema energiei cinetice. Forma generală a acestei teoreme, pornind de la relația (17.79) și adaptând corespunzător indicii, este:

$$dE_I = dL_I \quad (17.105)$$

Se diferențiază mai întâi expresia (17.97) a energiei cinetice corespunzătoare mișcării absolute a corpului:

$$dE_I = \frac{1}{2} m d(v_C^2) + dE \quad (17.106)$$

Ținând cont că $v_C^2 = |v_C^2| = \bar{v}_C \cdot \bar{v}_C$, primul termen al acestei relații devine:

$$\frac{1}{2} m d(\bar{v}_C \cdot \bar{v}_C) = m(d\bar{v}_C \cdot \bar{v}_C) = m \left(\frac{d\bar{v}_C}{dt} \right) \cdot (\bar{v}_C dt) = m \bar{a}_C \cdot d\bar{r}_C = \bar{R} \cdot d\bar{r}_C \quad (17.107)$$

Relația (17.106) devine:

$$dE_I = \bar{R} \cdot d\bar{r}_C + dE \quad (17.108)$$

Această relație, împreună cu (17.98), se înlocuiesc în (17.105). După reducerea termenului comun $\bar{R} \cdot d\bar{r}_C$ se obține relația:

$$dE = dL \quad (17.109)$$

Aceste relație, identică ca formă cu (17.105), arată că variația energiei cinetice corespunzătoare mișcării relative a corpului față de centrul său de masă este egală cu lucrul mecanic elementar al forțelor exterioare calculat cu deplasările locale ale punctelor lor de aplicație în cadrul acestei mișcări relative.

17.4 Discuție asupra teoremelor generale

Pe baza analizei din capitolele precedente se poate enunța o formulare generală a teoremelor de variație ale parametrilor dinamici, valabilă atât pentru mișcarea absolută a corpului față de sistemul de referință fix cât și pentru mișcarea relativă a acestuia față de centrul său de masă. Astfel, se poate defini un *torsor cinetic* al solidului rigid, compus din impulsul și momentul cinetic:

$$\tau_{cin}(\bar{H}, \bar{K}_O) \quad (17.110)$$

Primele două teoreme pot fi rezumate în modul următor: *derivata în raport cu timpul a torsorului cinetic al unui solid rigid este egală cu torsorul de reducere al forțelor aplicate acestuia.* Această enunțare poate fi pusă sub forma:

$$\dot{\tau}_{cin}(\dot{\bar{H}}, \dot{\bar{K}}_O) = \tau_O(\bar{R}, \bar{M}_O) \rightarrow \begin{cases} \dot{\bar{H}} = \bar{R} = \sum \bar{F}_{ext} \\ \dot{\bar{K}}_O = \bar{M}_O = \sum \bar{M}_O(\bar{F}_{ext}) \end{cases} \quad (17.111)$$

Aceste două teoreme sunt în general suficiente pentru stabilirea ecuațiilor diferențiale ale mișcării solidului rigid destinate determinării atât a legilor de mișcare ale corpului cât și forțelor necunoscute (de regulă reacțiunile din legături). Metoda bazată pe aceste două teoreme se va numi în continuare, ca și în cazul punctului material, *metoda impulsului*.

Teorema energiei cinetice, care stă la baza *metodei energiei*, permite determinarea numai a legilor de mișcare; pentru determinarea reacțiunilor se recurge ulterior la ecuațiile metodei impulsului.

Proiectând relațiile (17.111) pe axele unui sistem de referință cartezian se obține un sistem de ecuații diferențiale scalare prin integrarea căruia se determină legile de mișcare ale corpului precum și reacțiunile din legături.

Reamintind că $\dot{\bar{H}} = m\bar{a}_C = m\ddot{\bar{r}}_C$, din teorema impulsului și teorema momentului cinetic rezultă un sistem general de 6 ecuații:

$$\begin{cases} \dot{H}_x = m\ddot{x}_C = \sum F_x \\ \dot{H}_y = m\ddot{y}_C = \sum F_y \\ \dot{H}_z = m\ddot{z}_C = \sum F_z \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{K}_x = \sum M_x \\ \dot{K}_y = \sum M_y \\ \dot{K}_z = \sum M_z \end{cases} \quad (17.112)$$

Relațiile efective ale momentului cinetic depind, așa cum s-a arătat mai înainte, de tipul mișcării corpului. Numărul de ecuații se reduce dacă sistemul de forțe are o configurație particulară. Astfel, dacă forțele sunt coplanare în Oxy (cazul mișcării plan paralele), sunt suficiente 3 ecuații scalare, respectiv:

$$\begin{cases} \dot{H}_x = m\ddot{x}_C = \sum F_x \\ \dot{H}_y = m\ddot{y}_C = \sum F_y \\ \dot{K}_z = \sum M_z \end{cases} \quad (17.113)$$

Dacă forțele sunt coplanare și paralele, alegând una din axe pe direcția forțelor, acest sistem se reduce la două ecuații - una de proiecție și una de momente. Dacă forțele sunt coliniare (cazul translației rectilinii) este suficientă o singură ecuație de proiecție pe direcția respectivă.

Dacă rezultanta sistemului de forțe este nulă, atunci:

$$\dot{\bar{H}} = \bar{R} = 0 \rightarrow \bar{H} = m\bar{v}_C = const. \rightarrow \bar{v}_C = const. \quad (17.114)$$

Se spune că impulsul corpului se conservă iar acesta, în funcție de starea inițială, rămâne în repaus sau continuă o mișcare rectilinie și uniformă. Conservarea impulsului poate avea loc și numai după o direcție; de exemplu:

$$\dot{H}_x = \sum F_x = 0 \rightarrow H_x = mv_{Cx} = const. \rightarrow v_{Cx} = const. \quad (17.115)$$

Dacă momentul resultant al sistemului de forțe este nul, atunci:

$$\dot{\bar{K}}_O = \bar{M}_O = 0 \rightarrow \bar{K}_O = const. \quad (17.116)$$

În acest caz are loc o conservare a momentului cinetic al corpului.

Momentul cinetic se poate conserva și după o direcție; astfel:

$$\dot{K}_z = \sum M_z = 0 \rightarrow K_z = \text{const.} \quad (17.117)$$

Considerând, de exemplu, un disc în rotație față de o axă fixă (rel.17.50):

$$K_z = J_z \omega = \text{const.} \rightarrow \omega = \text{const.} \quad (17.118)$$

În funcție de starea inițială discul va rămâne în repaus sau va continua o mișcare de rotație uniformă.

Dacă corpul este acționat numai de forțe conservative (forțe de greutate, elastice sau de atracție universală), conform celor arătate în cap.13.1.3 și utilizând forma finită a teoremei energiei cinetice, se poate scrie:

$$L_{AB} = E_B - E_A = U_B - U_A = V_A - V_B \quad (17.119)$$

$$E_B + V_B = E_A + V_A \rightarrow E_m = E + V = \text{const.} \quad (17.120)$$

în care U este funcția de forțe, V este energia potențială iar E_m este energia mecanică. În acest caz are loc o conservare a energiei mecanice a corpului.

În Statică, la studiul reducerii sistemelor de forțe (cap.3.3.5) au fost prezentate cazurile de reducere și echivalența sistemului în funcție de valorile componentelor tursorului, respectiv \bar{R} și \bar{M}_O . Acest studiu poate fi complectat indicându-se și mișcările particulare ale unui corp în fiecare din aceste cazuri.

Cazul I : $\bar{R} = 0$, $\bar{M}_O = 0$ – Sistemul de forțe se află în echilibru. Corpul rămâne în repaus sau continuă o mișcare de translație rectilinie și uniformă.

Cazul II : $\bar{R} = 0$, $\bar{M}_O \neq 0$ – Sistem de forțe echivalent cu un cuplu. Corpul execută o mișcare de rotație în jurul unui punct fix O ; în particular, dacă direcția momentului este constantă, rotația are loc în jurul unei axe fixe care trece prin O , coliniară cu \bar{M}_O .

Cazul III : $\bar{R} \neq 0$, $\bar{M}_O = 0$ – Sistemul de forțe este echivalent cu o forță unică, egală cu rezultanta, acționând în punctul de reducere. Corpul execută o translație după direcția de acțiune a rezultantei.

Cazul IV : $\bar{R} \neq 0$, $\bar{M}_O \neq 0$. Se deosebesc următoarele situații:

a) $\bar{R} \cdot \bar{M}_O = 0$ – Sistemul este echivalent cu o forță unică, egală cu rezultanta, acționând pe axa centrală. Corpul execută o mișcare plan-paralelă.

b) $\bar{R} \cdot \bar{M}_O \neq 0$ – Sistem echivalent cu un tursor minimal. Mișcarea corpului este oarecare. În particular, dacă $\bar{R} \parallel \bar{M}_O$ corpul execută o mișcare elicoidală.

18. DINAMICA MIȘCĂRILOR PARTICULARE ALE SOLIDULUI RIGID

18.1 Mișcarea de translație

Corpul este acționat de un sistem de forțe care se reduce la o rezultantă unică; aceasta va imprima corpului o accelerație după direcția și în sensul ei de acțiune. În acest caz se aplică numai teorema impulsului:

$$\dot{\vec{H}} = \vec{R} \rightarrow m\vec{a}_C = \sum \vec{F} \quad (18.1)$$

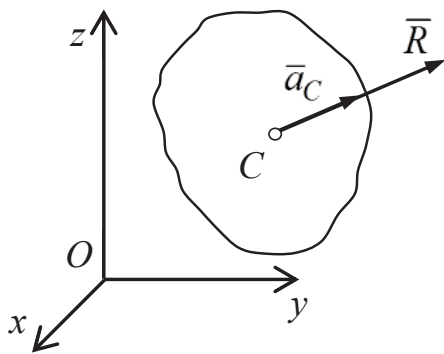


Fig.18.1

Proiectând această relație vectorială pe axele unui sistem de referință cartezian (fig.18.1) se obține un sistem de trei ecuații diferențiale de ordinul II, corespunzător celor trei grade de libertate ale solidului rigid liber, respectiv:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = \sum F_x \\ m\ddot{y} = \sum F_y \\ m\ddot{z} = \sum F_z \end{cases} \quad (18.2)$$

Numărul ecuațiilor diferențiale se reduce la două în cazul unei translații în plan și la o singură ecuație dacă translația este rectilinie. Dacă solidul rigid este supus la legături, rezultanta forțelor include și reacțiunile.

18.2 Mișcarea de rotație față de o axă fixă

18.2.1 Sistemul de ecuații

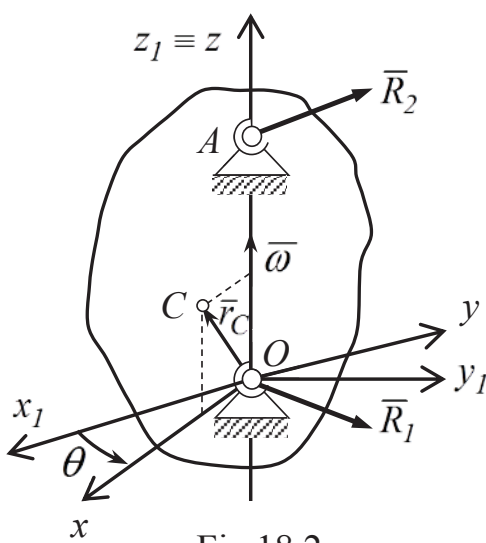


Fig.18.2

În Cinematică s-a precizat că un corp are o mișcare de rotație față de o axă fixă dacă două puncte ale sale sunt fixe pe această axă. Se reamintește din Statică că legătura care fixează un punct al unui corp este articulația sferică; în cele două puncte menționate mai sus, notate O și A , se introduc astfel de legături (fig.18.2).

Pentru simplificarea tratării, sistemele de referință fix $Ox_1y_1z_1$ și cel mobil $Oxyz$ se aleg cu aceeași origine și cu axele $z_1 \equiv z$ suprapuse axei de rotație. Sistemul de referință mobil se alege în așa fel încât centrul de masă C să se afle în planul Oxz .

Corpul în mișcare de rotație față de o axă fixă are un singur grad de libertate, parametrul pozițional corespunzător fiind unghiul θ . Vectorii $\vec{\omega}$ și $\vec{\varepsilon}$ sunt coliniari cu axa de rotație.

În afara forțelor exterioare, în articulațiile sferice O și A , aflate la distanța $OA = h$, se introduc în mod explicit reacțiunile \bar{R}_1 și \bar{R}_2 :

$$\bar{R}_1 = R_{1x}\bar{i} + R_{1y}\bar{j} + R_{1z}\bar{k} \quad \bar{R}_2 = R_{2x}\bar{i} + R_{2y}\bar{j} + R_{2z}\bar{k} \quad (18.3)$$

Drept necunoscute ale calculului dinamic sunt cele 6 proiecții ale acestor reacțiuni și unghiul de rotație θ (prin derivatele lui $\omega = \dot{\theta}$ și $\varepsilon = \dot{\theta}$).

Pentru utilizarea teoremelor generale se reamintește din Cinematică (cap.11.1) că, în cazul unui vector oarecare \bar{V} având o expresia analitică în sistemului de referință mobil de forma:

$$\bar{V} = V_x\bar{i} + V_y\bar{j} + V_z\bar{k}, \quad (18.4)$$

derivata absolută se calculează cu relația:

$$\frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{\partial\bar{V}}{\partial t} + \bar{\omega} \times \bar{V} \quad (18.5)$$

în care termenul $\partial\bar{V}/\partial t$ reprezintă derivata locală a vectorului, în care se ignoră variația în raport cu timpul a versorilor sistemului de referință mobil.

Pentru stabilirea ecuațiilor diferențiale ale mișcării se utilizează teorema impulsului și teorema momentului cinetic ale căror expresii vectoriale au în cazul de față formele:

$$\frac{d\bar{H}}{dt} = \sum \bar{F} + \bar{R}_1 + \bar{R}_2 \quad (18.6) \quad \frac{d\bar{K}_O}{dt} = \sum \bar{M}_O + \overline{OA} \times \bar{R}_2 \quad (18.7)$$

Expresiile impulsului și momentului cinetic, stabilite în cap.17.1.4, sunt:

$$\bar{H} = m(\bar{\omega} \times \bar{r}_C) \quad (18.8) \quad \bar{K}_O = -J_{xz}\omega\bar{i} - J_{yz}\omega\bar{j} + J_z\omega\bar{k} \quad (18.9)$$

Ținând cont de poziția particulară a centrului de masă, impulsul devine:

$$\bar{H} = m \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x_C & 0 & z_C \end{vmatrix} = m\omega x_C \bar{j} \quad (18.10)$$

În conformitate cu relația (18.5), derivata impulsului va fi:

$$\frac{d\bar{H}}{dt} = \frac{\partial\bar{H}}{\partial t} + \bar{\omega} \times \bar{H} = m\dot{\omega}x_C\bar{j} + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ 0 & m\omega x_C & 0 \end{vmatrix} = -m\omega^2 x_C \bar{i} + m\varepsilon x_C \bar{j} \quad (18.11)$$

În mod asemănător se determină și derivata momentului cinetic:

$$\frac{d\bar{K}_O}{dt} = \frac{\partial\bar{K}_O}{\partial t} + \bar{\omega} \times \bar{K}_O = -J_{xz}\dot{\omega}\bar{i} - J_{yz}\dot{\omega}\bar{j} + J_z\dot{\omega}\bar{k} + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ -J_{xz}\omega & -J_{yz}\omega & J_z\omega \end{vmatrix} \quad (18.12)$$

Grupând termenii se obține:

$$\frac{d\bar{K}_O}{dt} = (-J_{xz}\varepsilon + J_{yz}\omega^2)\bar{i} + (-J_{yz}\varepsilon - J_{xz}\omega^2)\bar{j} + J_z\varepsilon\bar{k} \quad (18.13)$$

Momentul reacțiunii \bar{R}_2 față de punctul O se calculează în modul următor:

$$\overline{OA} \times \overline{R}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & h \\ R_{2x} & R_{2y} & R_{2z} \end{vmatrix} = -h R_{2y} \bar{i} + h R_{2x} \bar{j} \quad (18.14)$$

Din ecuațiile vectoriale (8.6) și (8.7) se obține sistemul de ecuații scalare:

$$\left\{ \begin{array}{l} -m\omega^2 x_C = \sum F_x + R_{1x} + R_{2x} \\ m\varepsilon x_C = \sum F_y + R_{1y} + R_{2y} \\ 0 = \sum F_z + R_{1z} + R_{2z} \\ -J_{xz}\varepsilon + J_{yz}\omega^2 = \sum M_x - h R_{2y} \\ -J_{yz}\varepsilon - J_{xz}\omega^2 = \sum M_y + h R_{2x} \\ J_z\varepsilon = \sum M_z \end{array} \right. \quad (18.15)$$

Sistemul obținut conține 6 ecuații scalare; comparând cu numărul de 7 necunoscute se evidențiază existența unei nedeterminări. Se încearcă eliminarea acesteia, respectiv găsirea a încă unei ecuații, prin utilizarea teoremei energiei cinetice:

$$dE = dL \quad \rightarrow \quad \frac{dE}{dt} = \frac{dL}{dt} \quad (18.16)$$

Energia cinetică, definită prin relația (17.53), are derivata:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} J_z \omega^2 \right) = J_z \omega \dot{\omega} = J_z \omega \varepsilon \quad (18.17)$$

Reacțiunile \overline{R}_1 și \overline{R}_2 sunt aplicate în puncte fixe; lucrul mecanic va fi dat numai de forțele exterioare. Ținând cont că singura mișcare este rotația de unghi θ în jurul axei Oz , pentru lucrul mecanic elementar al acestor forțe se poate scrie:

$$dL = (\sum M_z) d\theta \quad \rightarrow \quad \frac{dL}{dt} = (\sum M_z) \frac{d\theta}{dt} = (\sum M_z) \omega \quad (18.18)$$

Făcând înlocuirile în relația (18.16) se obține:

$$J_z \varepsilon = \sum M_z \quad (18.19)$$

Relația obținută este identică cu ultima din sistemul (18.15), astfel că din punct de vedere al numărului de ecuații nedeterminarea se menține.

Reamintind că $\varepsilon = \ddot{\theta}$, se determină mai întâi legea de mișcare prin integrarea ecuației diferențiale de ordinul II:

$$J_z \ddot{\theta} = \sum M_z \quad \rightarrow \quad \omega = \dot{\theta}(t) \quad \rightarrow \quad \theta = \theta(t) \quad (18.20)$$

Din celelalte ecuații ale sistemului se calculează în continuare reacțiunile, respectând următoarea succesiune:

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{2x} = -(\sum M_y + J_{yz}\varepsilon + J_{xz}\omega^2) / h \\ R_{2y} = (\sum M_x + J_{xz}\varepsilon - J_{yz}\omega^2) / h \\ R_{1x} = -(\sum F_x + R_{2x} + m\omega^2 x_C) \\ R_{1y} = -(\sum F_y + R_{2y} - m\varepsilon x_C) \end{array} \right. \quad (18.21)$$

Nedeterminarea menționată mai înainte se regăsește în relația de proiecție a forțelor pe direcția axei de rotație:

$$R_{1z} + R_{2z} = -\sum F_z \quad (18.25)$$

Această nedeterminare poate fi eliminată numai dacă se renunță la ipoteza rigidității corpului și se aplică metodele specifice din domeniul Rezistenței Materialelor.

Nedeterminarea mai poate fi înlăturată și pe cale constructivă, fără a afecta aspectul funcțional, prin înlocuirea uneia dintre articulațiile sferice printr-o articulație cilindrică, de exemplu cea din punctul A (fig.18.3); în acest caz:

$$R_{2z} = 0 \quad R_{1z} = -\sum F_z \quad (18.26)$$

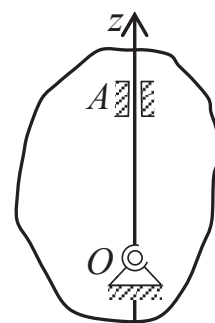


Fig.18.3

18.2.2 Echilibrarea rotorilor

Scopul urmărit în cazul operațiunilor de echilibrare constă în eliminarea variației reacțiunilor din lagăre, variație care se manifestă prin șocuri, vibrații dăunătoare sau zgomote.

Torsorul de reducere al forțelor exterioare aplicate unui corp în mișcare de rotație față de o axă fixă se poate pune sub forma următoare:

$$\tau_O \begin{cases} \bar{R} = \sum \bar{F} \\ \bar{M}_O = \sum \bar{M}_O(\bar{F}) = \underbrace{(\sum M_x)\bar{i} + (\sum M_y)\bar{j}}_{\bar{M}_{Os}} + \underbrace{(\sum M_z)\bar{k}}_{\bar{M}_{Od}} \end{cases} \quad (18.27)$$

La momentul rezultat se deosebește o componentă statică care acționează numai în stare de repaus (atunci când $\bar{\omega} = \bar{\varepsilon} = 0$) și o componentă dinamică motoare care determină rotația în jurul axei Oz .

Reacțiunile din lagărele O și A se pot descompune în câte două componente:

$$\bar{R}_1 = \bar{R}_{1s} + \bar{R}_{1d} \quad (18.28) \quad \bar{R}_2 = \bar{R}_{2s} + \bar{R}_{2d} \quad (18.29)$$

Componentele \bar{R}_{1s} și \bar{R}_{2s} reprezintă reacțiunile statice care apar atunci când corpul se află în echilibru static. Ecuațiile de echilibru corespunzătoare sunt:

$$\sum \bar{F} + \bar{R}_{1s} + \bar{R}_{2s} = 0 \quad (18.30) \quad \sum \bar{M}_{Os} + \overline{OA} \times \bar{R}_{2s} = 0 \quad (18.31)$$

Componentele \bar{R}_{1d} și \bar{R}_{2d} reprezintă reacțiunile dinamice care apar numai în timpul mișcării corpului.

Ecuațiile teoremelor generale (18.6) și (18.7) pot fi puse sub forma:

$$\frac{d\bar{H}}{dt} = \underbrace{\sum \bar{F} + \bar{R}_{1s} + \bar{R}_{2s}}_0 + \bar{R}_{1d} + \bar{R}_{2d} \quad (18.32)$$

$$\frac{d\bar{K}_O}{dt} = \underbrace{\sum \bar{M}_{Os} + \overline{OA} \times \bar{R}_{2s}}_0 + \bar{M}_{Od} + \overline{OA} \times \bar{R}_{2d} \quad (18.33)$$

Se consideră că pentru o funcționare ideală reacțiunile dinamice trebuie să fie nule, respectiv $\bar{R}_{1d} = \bar{R}_{2d} = 0$. În aceste condiții relațiile de mai sus devin:

$$\frac{d\bar{H}}{dt} = 0 \quad (18.34) \quad \frac{d\bar{K}_O}{dt} = \bar{M}_{Od} = (\sum M_z)\bar{k} \quad (18.35)$$

În aceste condiții, expresiile (18.11) și (18.13) care definesc derivatele în raport cu timpul ale impulsului și momentului cinetic devin:

$$\frac{d\bar{H}}{dt} = -m\omega^2 x_C \bar{i} + m\varepsilon x_C \bar{j} = 0 \quad (18.36)$$

$$\frac{d\bar{K}_O}{dt} = (-J_{xz}\varepsilon + J_{yz}\omega^2)\bar{i} + (-J_{yz}\varepsilon - J_{xz}\omega^2)\bar{j} + J_z\varepsilon\bar{k} = (\sum M_z)\bar{k} \quad (18.37)$$

Din ecuația (18.36) se obține o primă condiție pentru echilibrarea corpului în mișcarea de rotație. Întrucât $\omega \neq 0$ și $\varepsilon \neq 0$, rezultă că derivata impulsului se anulează pentru:

$$x_C = 0 \quad (18.38)$$

Se deduce că *centrul de masă al corpului trebuie să se găsească pe axa de rotație*. Corpul la care este îndeplinită această condiție este *echilibrat static*.

Echivalând în relația (18.37) termenii de același versor, se obține sistemul:

$$\begin{cases} -J_{xz}\varepsilon + J_{yz}\omega^2 = 0 \\ -J_{yz}\varepsilon - J_{xz}\omega^2 = 0 \end{cases} \quad (18.39)$$

Pentru ca acest sistem liniar și omogen în ε și ω^2 , să nu aibă soluțiile banale $\varepsilon = \omega = 0$, este necesar ca determinantul coeficienților lui să fie nul:

$$\begin{vmatrix} -J_{xz} & J_{yz} \\ -J_{yz} & -J_{xz} \end{vmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad J_{xz}^2 + J_{yz}^2 = 0 \quad (18.40)$$

Relația obținută este posibilă numai dacă:

$$J_{xz} = J_{yz} = 0 \quad (18.41)$$

S-a arătat în cap.16.4 că momentele de inerție centrifugale sunt nule față de direcțiile principale de inerție; observând că cele două momente centrifugale se referă la axa de rotație Oz , se deduce o a doua condiție pentru echilibrarea corpului și anume că *axa de rotație trebuie să fie direcție principală de inerție*. În acest context se reamintește că o axa de simetrie este și direcție principală de inerție; în concluzie rotorul este echilibrat dacă axa lui de rotație este axă de simetrie. Corpul care îndeplinește această condiție este *echilibrat dinamic*.

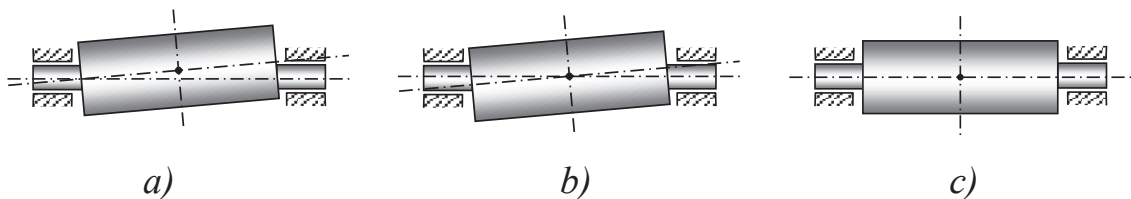


Fig.18.4

În fig.18.4 este reprezentat un rotor: *a)* – dezechilibrat, *b)* – echilibrat static, *c)* – echilibrat dinamic. În mod practic acțiunea de echilibrare, atât cea statică cât și cea dinamică, se realizează prin corectarea distribuției masei, respectiv prin extragerea sau adăugarea unor mase adiționale.

18.2.3 Pendulul fizic

Pendulul fizic este un corp care poate executa o mișcare oscilatorie în jurul unei axe orizontale sub acțiunea greutății proprii. Pentru comoditatea tratării se consideră o bară suspendată la o extremitate printr-o articulație cilindrică fixă O (fig.18.5). Centrul de masă se află la distanța $OC = a$ iar greutatea corpului este $G = mg$. Ecuația diferențială generală:

$$J_z \varepsilon = \sum M_z \quad (18.42)$$

va lua în acest caz forma:

$$J_z \ddot{\theta} = -mga \sin \theta \quad (18.43) \quad \ddot{\theta} + \frac{mga}{J_z} \sin \theta = 0 \quad (18.44)$$

Această relație poate fi prelucrată prin introducerea unei notații suplimentare:

$$l = \frac{J_z}{ma} \quad (18.45) \quad \ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0 \quad (18.46)$$

Ecuația diferențială a mișcării obținută pentru pendulul fizic este identică cu ecuația (13.246) a unui pendul matematic cu masa m și lungimea l a firului (fig.18.6). Se deduce de aici că pendulul fizic oscilează la fel cu pendulul matematic studiat în cap.13.3.4. Punctul O_1 , aflat la distanța $OO_1 = l$ de punctul de suspendare, poartă numele de *centru de oscilație*.

Referitor la centrul de oscilație se poate pune în evidență o proprietate interesantă – dacă se suspendă pendulul în punctul O_1 , atunci noul centru de oscilație va fi punctul O . Pentru a demonstra această proprietate se fac aceleași operații ca la pendulul fizic inițial:

$$J_{z_1} \ddot{\theta} = -mgb \sin \theta \quad (18.47) \quad \ddot{\theta} + \frac{mgb}{J_{z_1}} \sin \theta = 0 \quad (18.48)$$

$$l_1 = \frac{J_{z_1}}{mb} \quad (18.49) \quad \ddot{\theta} + \frac{g}{l_1} \sin \theta = 0 \quad (18.50)$$

Folosind relațiile de variație ale momentelor de inerție față de axe paralele se deduce:

$$\begin{cases} J_z = J_C + ma^2 \\ J_{z_1} = J_C + mb^2 \end{cases} \rightarrow J_{z_1} = J_z + m(b^2 - a^2) \quad (18.51)$$

Observând că $a + b = l$ și ținând cont de relația (18.45) se calculează:

$$l_1 = \frac{J_z + m(b^2 - a^2)}{mb} = \frac{mal + m(b+a)(b-a)}{mb} = l \quad (18.52)$$

ceea ce era de demonstrat.

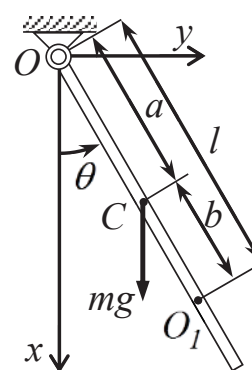


Fig.18.5

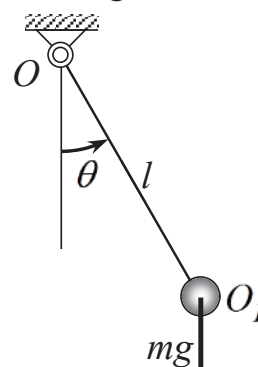


Fig.18.6

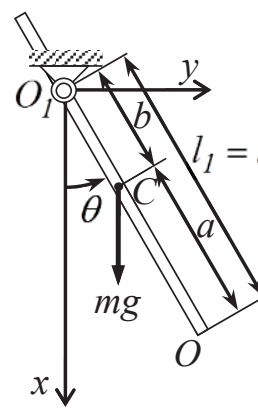


Fig.18.7

Având în vedere similitudinea dintre pendulul fizic și pendulul matematic echivalent, micile oscilații ale acestuia pot fi tratate în modul descris în cap.13.3.5. Pentru pulsația acestor oscilații se poate scrie relația:

$$p = \sqrt{\frac{g}{l}} = \sqrt{\frac{mga}{J_z}} = \frac{2\pi}{T} \quad (18.53)$$

Din aceasta se poate extrage relația:

$$J_z = \frac{mgaT^2}{4\pi^2} \quad (18.54)$$

care este utilă la determinarea pe cale experimentală a momentului de inerție al unui corp de formă oarecare.

Problema 18.1. O placă dreptunghiulară se rotește în jurul unei axe verticale fixă, suprapusă uneia dintre laturi (fig.18.8), fiind lansată din poziția inițială cu o viteză dată. Mișcării de rotație i se opune o rezistență datorată frecării de pivotare din articulația inferioară. Să se determine legea de mișcare și să se calculeze reacțiunile.

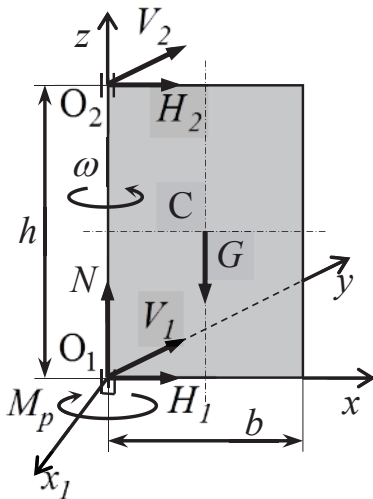


Fig. 18.8

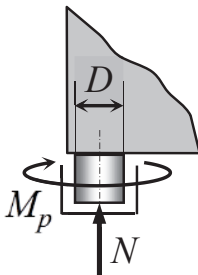


Fig. 18.9

Date: $G, h, b, \mu, D, \omega_0, \theta_0 = 0$

Cerute: $\omega(t), \theta(t), \theta_{\max}, N, H_1, V_1, H_2, V_2$

Rezolvare: Termenii din sistemul de ecuații (18.15) au în această aplicație următoarele expresii:

a) *elementele masice:*

$$m = \frac{G}{g} \quad x_C = \frac{b}{2} \quad (18.55)$$

b) *momentele de inerție:*

$$J_z = \frac{Gb^2}{3g} \quad J_{xz} = \frac{Gbh}{4g} \quad J_{yz} = 0 \quad (18.56)$$

c) *forțele exterioare:*

$$\sum F_x = \sum F_y = 0 \quad \sum F_z = -G \quad (18.57)$$

$$\sum M_x = 0 \quad \sum M_y = \frac{Gb}{2} \quad \sum M_z = -M_p \quad (18.58)$$

d) *reacțiunile:*

$$R_{1x} = H_1 \quad R_{1y} = V_1 \quad R_{1z} = N \quad (18.59)$$

$$R_{2x} = H_2 \quad R_{2y} = V_2 \quad R_{2z} = 0 \quad (18.60)$$

Momentul de frecare de pivotare se calculează conform celor arătate în Statică, cu relația:

$$M_p = \frac{2}{3} \mu RN = \frac{1}{3} \mu DN \quad (18.61)$$

în care R și D sunt raza și respectiv diametrul axului din lagărul inferior (fig.18.9).

Cu aceste precizări, cele 6 ecuații scalare ale sistemului general (18.15) vor lua forma următoare:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{Gb}{2g}\omega^2 = H_1 + H_2 \quad (1) \\ \frac{Gb}{2g}\varepsilon = V_1 + V_2 \quad (2) \\ 0 = -G + N \quad (3) \\ -\frac{Gbh}{4g}\varepsilon = -hV_2 \quad (4) \\ -\frac{Gbh}{4g}\omega^2 = \frac{Gb}{2} + hH_2 \quad (5) \\ \frac{Gb^2}{3g}\varepsilon = -\frac{1}{3}\mu DN \quad (6) \end{array} \right. \quad (18.62)$$

Ținând cont că $\varepsilon = \ddot{\theta}$, din ecuațiile (3) și (6) se stabilește ecuația diferențială:

$$\ddot{\theta} = -\varepsilon_0 = -\frac{\mu Dg}{b^2} = \text{const.} \quad (18.63)$$

În care s-a notat prin ε_0 valoarea constantă a accelerației unghiulare. Se integrează această ecuație de două ori în raport cu timpul:

$$\omega = \dot{\theta} = -\varepsilon_0 t + C_1 \quad (18.64) \quad \theta = -\frac{1}{2}\varepsilon_0 t^2 + C_1 t + C_2 \quad (18.65)$$

Constantele de integrare C_1 și C_2 se determină din condițiile inițiale:

$$t = 0 \rightarrow \begin{cases} (\dot{\theta})_0 = \omega_0 \\ \theta_0 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C_2 = \omega_0 \\ C_1 = 0 \end{cases} \quad (18.66)$$

Legea de mișcare va consta în final din ecuațiile:

$$\omega = \omega_0 - \varepsilon_0 t \quad (18.67) \quad \theta = \omega_0 t - \frac{1}{2}\varepsilon_0 t^2 \quad (18.68)$$

Punând condiția de oprire $\omega = 0$ se determină unghiul maxim de rotație:

$$\theta_{\max} = \frac{\omega_0^2}{2\varepsilon_0} = \frac{\omega_0^2 b^2}{2\mu Dg} \quad (18.69)$$

$$V_1 = V_2 = \frac{Gb}{4g}\varepsilon \quad H_1 = -\frac{Gb}{4g}\omega^2 + \frac{Gb}{2h} \quad H_2 = -\frac{Gb}{4g}\omega^2 - \frac{Gb}{2h} \quad (18.70)$$

În aceste relații se recunosc componentele statice și dinamice ale reacțiunilor din legături; cele dinamice au în componența lor parametrii unghiulari ω și ε .

18.3 Mișcarea de rotație față de un punct fix

18.3.1 Sistemul de ecuații

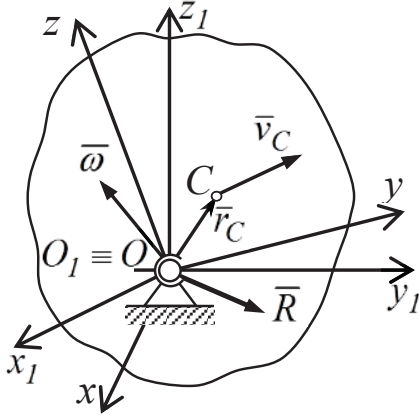


Fig.18.10

Punctul fix al corpului este o articulație sferică; cele două sisteme de referință, fix și mobil, se aleg cu originea în același punct (fig.18.10). Tot în acest punct este aplicată și unica reacțiune \bar{R} , necunoscută atât ca mărime cât și ca direcție.

Teorema impulsului și teorema momentului cinetic au în acest caz expresiile vectoriale:

$$\frac{d\bar{H}}{dt} = \sum \bar{F} + \bar{R} \quad (18.71)$$

$$\frac{d\bar{K}_O}{dt} = \sum \bar{M}_O \quad (18.72)$$

Reacțiunea \bar{R} apare numai în teorema impulsului și, în consecință, poate fi determinată numai din relația respectivă. Studiul mișcării se va efectua utilizând teorema momentului cinetic.

În cazul cel mai general momentul cinetic față de punctul fix O se calculează în modul arătat în cap.17.1.3, relația matriceală fiind:

$$\begin{bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \quad (18.73)$$

Calculul se simplifică dacă axele sistemului de referință mobil $Oxyz$, solidar cu corpul, sunt direcțiile principale de inerție ale acestuia. În acest caz momentele de inerție axiale sunt momentele principale de inerție iar momentele de inerție centrifugale sunt nule. Relația de mai sus devine:

$$\begin{bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \quad (18.74)$$

Reamintind că în raport cu sistemul de referință mobil toate momentele de inerție sunt constante, expresia momentului cinetic în acest sistem devine:

$$\bar{K}_O = J_1 \omega_x \bar{i} + J_2 \omega_y \bar{j} + J_3 \omega_z \bar{k} \quad (18.75)$$

Pentru derivata absolută a momentului cinetic se utilizează relația:

$$\frac{d\bar{K}_O}{dt} = \frac{\partial \bar{K}_O}{\partial t} + \bar{\omega} \times \bar{K}_O \quad (18.76)$$

$$\frac{d\bar{K}_O}{dt} = J_1 \dot{\omega}_x \bar{i} + J_2 \dot{\omega}_y \bar{j} + J_3 \dot{\omega}_z \bar{k} + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ J_1 \omega_x & J_2 \omega_y & J_3 \omega_z \end{vmatrix} \quad (18.77)$$

Din relația (18.72) se obține sistemul de ecuații diferențiale scalare:

$$\begin{cases} J_1 \dot{\omega}_x + \omega_y \omega_z (J_3 - J_2) = \sum M_x \\ J_2 \dot{\omega}_y + \omega_z \omega_x (J_1 - J_3) = \sum M_y \\ J_3 \dot{\omega}_z + \omega_x \omega_y (J_2 - J_1) = \sum M_z \end{cases} \quad (18.78)$$

cunoscute în Mecanică drept *ecuațiile lui Euler pentru solidul rigid cu punct fix*. Prin integrarea acestui sistem se obține într-o primă etapă viteza unghiulară $\bar{\omega}$ prin proiecțiile ei pe axe, respectiv $\omega_x, \omega_y, \omega_z$.

În Cinematică (cap.10.5) s-a arătat că sistemul de referință mobil poate fi poziționat față de sistemul de referință fix prin *unghiurile lui Euler* (fig.18.11).

Aceste unghiuri sunt: ψ – *unghiul de precesie*, θ – *unghiul de nutație*, φ – *unghiul rotației proprii*. Dreapta ON este intersecția dintre planurile Ox_1y_1 și Oxy . Legătura între derivatele acestor unghiuri și proiecțiile vitezei unghiulare este dată de relațiile:

$$\begin{cases} \omega_x = \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi \\ \omega_y = \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi \\ \omega_z = \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi} \end{cases} \quad (18.79)$$

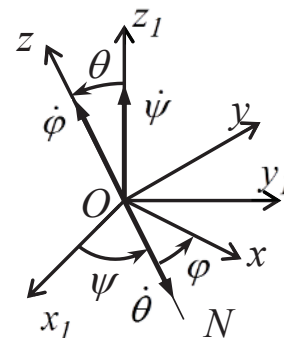


Fig.18.11

S-a format un al doilea sistem de ecuații diferențiale ale cărui necunoscute sunt unghiurile de poziție menționate. În general, efectuarea acestei duble integrări pe cale analitică este dificilă, fiind posibilă doar în câteva cazuri particulare. Integrarea poate fi efectuată folosind procedurile analizei numerice.

Reacțiunea \bar{R} se determină din relația (18.71) în care impulsul este:

$$\bar{H} = m \bar{v}_C = m(\bar{\omega} \times \bar{r}_C) \quad (18.80)$$

Pentru derivata impulsului se utilizează relația:

$$\frac{d\bar{H}}{dt} = \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} + \bar{\omega} \times \bar{H} = \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}_C) \quad (18.81)$$

Derivata locală a impulsului se calculează cu relația:

$$\frac{\partial \bar{H}}{\partial t} = m(\dot{\bar{\omega}} \times \bar{r}_C + \bar{\omega} \times \dot{\bar{r}}_C) = m(\bar{\varepsilon} \times \bar{r}_C) \quad (18.82)$$

deoarece în sistemul mobil $\bar{r}_C = const$. Din relația (18.71) se izolează reacțiunea:

$$\bar{R} = m[(\bar{\varepsilon} \times \bar{r}_C) + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}_C)] - \sum \bar{F} = m\bar{a}_C - \sum \bar{F} \quad (18.83)$$

Proiecțiile pe axe ale reacțiunii se obțin detaliind această relație:

$$\begin{cases} R_x = m[z_C \varepsilon_y - y_C \varepsilon_x + \omega_y (y_C \omega_x - x_C \omega_y) - \omega_x (x_C \omega_z - z_C \omega_x)] - \sum F_x \\ R_y = m[x_C \varepsilon_z - z_C \varepsilon_y + \omega_z (z_C \omega_y - y_C \omega_z) - \omega_y (y_C \omega_x - x_C \omega_y)] - \sum F_y \\ R_z = m[y_C \varepsilon_x - x_C \varepsilon_z + \omega_x (x_C \omega_z - z_C \omega_x) - \omega_z (z_C \omega_y - y_C \omega_z)] - \sum F_z \end{cases} \quad (18.84)$$

18.3.2 Giroscopul

Una dintre cele mai importante aplicații ale mișcării solidului rigid cu un punct fix o constituie giroscopul, un dispozitiv care intră în compunerea aparatelor de control al poziției și de reglare a mișcării. Constructiv, giroscopul poate fi asimilat unui disc care are o rotație rapidă în jurul unei axe mobile.

Din punct de vedere funcțional se deosebește:

– *giroscopul centrat*, la care centrul de masă al discului coincide cu punctul fix ($C \equiv O$);

– *giroscopul necentrat*, la care centrul de masă se află pe axa de rotație proprie a discului, axă care trece prin punctul fix ($C \neq O$).

a) giroscopul centrat (fig.18.12)

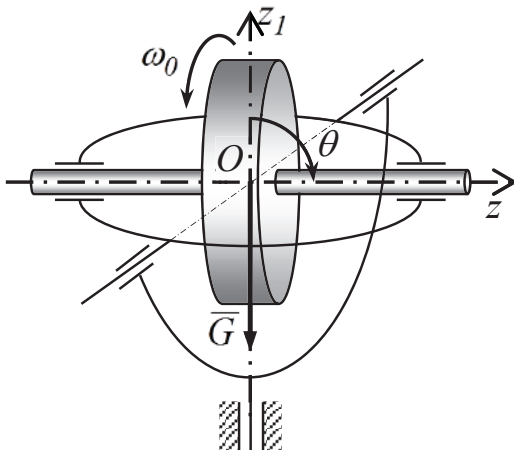


Fig.18.12

Axa de rotație Oz este și axă de simetrie; axele Ox și Oz se află în planul discului și sunt direcții principale de inerție, astfel că:

$$J_1 = J_2 = J \quad J_3 \equiv J_z \gg J \quad (18.85)$$

Prin construcție axele de rotație sunt concurente într-un punct fix care coincide cu centrul de masă al discului, disc aflat în mișcare de rotație proprie față de axa Oz . Singura forță exterioară este greutatea proprie a discului; este evident că $\bar{M}_O(\bar{G}) = 0$, astfel că:

$$\sum M_x = \sum M_y = \sum M_z = 0 \quad (18.86)$$

Ecuatiile generale (18.78) iau în acest caz forma:

$$\begin{cases} J\dot{\omega}_x + \omega_y\omega_z(J_3 - J) = 0 \\ J\dot{\omega}_y + \omega_z\omega_x(J - J_3) = 0 \\ J_3\dot{\omega}_z + \omega_x\omega_x(J - J) = 0 \end{cases} \quad (18.87)$$

Din ultima ecuație, ținând cont că $J_3 \neq 0$, rezultă $\varepsilon_z = \dot{\omega}_z = 0$ și, în consecință:

$$\omega_z = \text{const.} = \omega_0 \quad (18.88)$$

Se deduce că dacă se impune discului o viteză inițială ω_0 , în absența oricărei rezistențe, rotația acestuia continuă la infinit. Introducând notația:

$$p = \frac{J_3 - J}{J} \omega_0 \quad (18.89)$$

celelalte două ecuații pot fi prelucrate în modul următor:

$$\begin{cases} \dot{\omega}_x + p\omega_y = 0 \\ \dot{\omega}_y - p\omega_x = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \ddot{\omega}_x + p\dot{\omega}_y = 0 \\ \dot{\omega}_y = p\omega_x \end{cases} \rightarrow \ddot{\omega}_x + p^2\omega_x = 0 \quad (18.90)$$

S-a obținut o ecuație diferențială de ordinul II, omogenă și cu coeficienți constanți, care se integrează în modul arătat în cap.14.2; soluția acesteia este de forma:

$$\omega_x = C_1 \cos pt + C_2 \sin pt \quad (18.91)$$

în care C_1 și C_2 sunt constante de integrare dependente de condițiile inițiale. Pentru ω_y soluția se obține din prima ecuație:

$$\omega_y = -\frac{1}{p} \dot{\omega}_x = -\frac{1}{p} (-C_1 p \sin pt + C_2 p \cos pt) = C_1 \sin pt - C_2 \cos pt \quad (18.92)$$

Amândouă soluțiile reprezintă niște variații armonice de pulsație p ale vitezelor unghiulare față de axele Cx și Cy aflate în planul discului și mobile odată cu acesta.

Proprietățile giroscopului pot fi puse în evidență studiind în acest context variațiile unghiurilor lui Euler ψ , θ , φ . În fig. 18.12 s-a reprezentat numai unghiul θ făcut de axa de rotație a giroscopului cu direcția fixă Cz_1 .

Constantele de integrare C_1 și C_2 din relațiile de mai sus se pun sub forma:

$$C_1 = \omega_l \sin \theta_0 \sin \varphi_0 \quad C_2 = -\omega_l \sin \theta_0 \cos \varphi_0 \quad (18.93)$$

în care ω_l , θ_0 , φ_0 sunt niște constante a căror semnificație va fi pusă în evidență în continuare. Cu aceste înlocuiri relațiile (18.91) și (18.92) devin:

$$\omega_x = \omega_l \sin \theta_0 (\sin \varphi_0 \cos pt + \cos \varphi_0 \sin pt) = \omega_l \sin \theta_0 \sin(\varphi_0 - pt) \quad (18.94)$$

$$\omega_y = \omega_l \sin \theta_0 (\sin \varphi_0 \sin pt - \cos \varphi_0 \cos pt) = \omega_l \sin \theta_0 \cos(\varphi_0 - pt) \quad (18.95)$$

Sistemul de ecuații (18.79) ia forma:

$$\begin{cases} \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi = \omega_l \sin \theta_0 \sin(\varphi_0 - pt) \\ \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi = \omega_l \sin \theta_0 \cos(\varphi_0 - pt) \\ \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi} = \omega_0 \end{cases} \quad (18.96)$$

Se constată cu ușurință că acest sistem de ecuații diferențiale are soluțiile:

$$\begin{cases} \psi = \psi_0 + \omega_l t \\ \varphi = \varphi_0 - pt \\ \theta = \theta_0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{\psi} = \omega_l \\ \dot{\varphi} = -p \\ \dot{\theta} = 0 \end{cases} \quad (18.97)$$

Făcând înlocuirile în primele două ecuații se obține câte o identitate. Constantele ψ_0 , φ_0 , θ_0 sunt valorile inițiale ale unghiurilor lui Euler.

Din ultima ecuație (18.96) se obține:

$$\omega_l \cos \theta_0 - p = \omega_0 \rightarrow \omega_l = \frac{p + \omega_0}{\cos \theta_0} \quad (18.98)$$

Se observă că ω_l și p sunt pulsațiile mișcărilor oscilatorii ale giroscopului corespunzătoare unghiurilor de poziție ψ și respectiv φ . Ținând cont și de relația (18.89), perioadele acestor oscilații vor fi:

$$T = \frac{2\pi}{p} = \frac{2\pi J}{(J_3 - J)\omega_0} \quad (18.99) \quad T_l = \frac{2\pi}{\omega_l} = \frac{2\pi J \cos \theta_0}{J_3 \omega_0} \quad (18.100)$$

Relația $\theta = \theta_0 = \text{const.}$ pune în evidență *stabilitatea axei de rotație* a giroscopului; așezând axa de rotație sub un unghi inițial față de o direcție fixă din spațiu, ea va rămâne în această poziție oricare ar fi perturbațiile suportului exterior.

Deoarece viteza unghiulară ω_0 și momentul de inerție J_3 al giroscopului sunt mari, timpul de revenire în poziția inițială (ilustrat prin valoarea mică a perioadelor T și T_1) este foarte scurt, deplasarea axei de rotație fiind anihilată aproape simultan cu mișcarea perturbatoare. Pe această proprietate deosebit de importantă se bazează construcția aparatelor de control și reglare pozițională precum și de orientare terestră utilizate în navigație.

b) Giroscopul necentrat (fig.18.13)

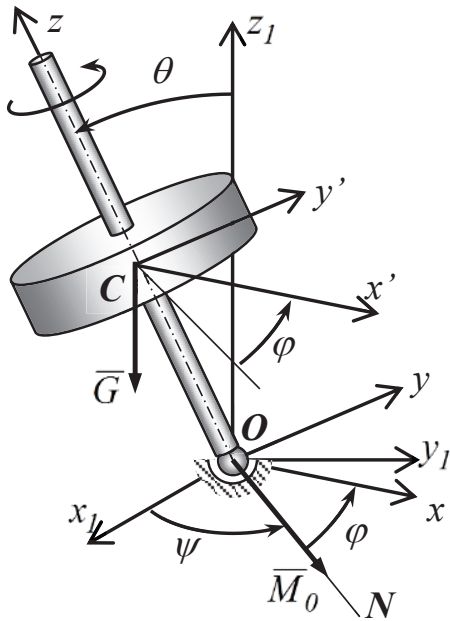


Fig.18.13

Axa de rotație Oz este și axă de simetrie, astfel că:

$$J_z = J_3 \quad J_{xz} = J_{yz} = 0 \quad (18.101)$$

Spre deosebire de giroscopul centrat, axele Ox și Oy nu sunt direcții principale de inerție; pentru momentele de inerție axiale și centrifugale față de acestea se pornește de la cele calculate în raport cu axele Cx' și Cy' aflate în planul discului și paralele cu Ox și Oy . Notând $OC = h$ se utilizează relațiile de variație ale momentelor față de axe paralele:

$$J_x = J_y = J + mh^2 \quad J_{xy} = mh^2 \quad (18.102)$$

Momentul de inerție principal J este calculat, ca și la giroscopul centrat, față de o axă oarecare din planul discului; rămâne valabilă observația că $J_3 \gg J$.

Forțele care acționează asupra giroscopului sunt greutatea proprie \bar{G} și reacțiunea \bar{R} din articulația sferică. Așa cum s-a arătat în cap.18.3.1, reacțiunea poate fi calculată utilizând relațiile provenite din aplicarea teoremei impulsului, după determinarea parametrilor pozitionali și cinematici, respectiv a unghiurilor lui Euler ψ, θ, φ și a derivatelor acestora în raport cu timpul. Se reamintește că legătura între acești parametri și viteza unghiulară $\bar{\omega}$ a giroscopului la nivel de proiecții este dată de relațiile:

$$\begin{cases} \omega_x = \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi \\ \omega_y = \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi \\ \omega_z = \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi} \end{cases} \quad (18.103)$$

În cele ce urmează, pentru sistematizarea calculului, se vor utiliza pe cât posibil formele matriceale ale relațiilor vectoriale; în acest context, sistemul de mai sus poate fi pus sub forma:

$$\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ \sin \theta \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \cos \theta & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} \quad (18.104)$$

Proiecțiile pe axe ale vitezei unghiulare au în acest studiu un rol intermediar.

Pentru stabilirea ecuațiilor diferențiale ale mișcării giroscopului necentrat se pornește de la relația generală a teoremei momentului cinetic, respectiv:

$$\frac{d\bar{K}_O}{dt} = \bar{M}_O \quad (18.105)$$

Ținând cont de valorile momentelor de inerție, momentul cinetic se calculează în modul următor:

$$\begin{bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_x & -J_{xy} & 0 \\ -J_{yx} & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \quad (18.106)$$

$$\bar{K}_O = (J_x \omega_x - J_{xy} \omega_y) \bar{i} + (-J_{yx} \omega_x + J_y \omega_y) \bar{j} + J_z \omega_z \bar{k} \quad (18.107)$$

Pentru derivata absolută a momentului cinetic se utilizează relația generală:

$$\frac{d\bar{K}_O}{dt} = \frac{\partial \bar{K}_O}{\partial t} + \bar{\omega} \times \bar{K}_O \quad (18.108)$$

Proiecțiile pe axe ale derivatei locale $\partial \bar{K}_O / \partial t$ se obțin pe baza relației (18.106):

$$\begin{bmatrix} J_x & -J_{xy} & 0 \\ -J_{yx} & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{bmatrix} \quad (18.109)$$

Proiecțiile pe axe ale produsului vectorial:

$$\bar{\omega} \times \bar{K}_O = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ K_x & K_y & K_z \end{vmatrix} \quad (18.110)$$

se pot calcula introducând forma matriceală asociată vitezei unghiulare:

$$\begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_z \end{bmatrix} \quad (18.111)$$

Momentul greutatei \bar{G} față de punctul O este dat de produsul vectorial:

$$\bar{M}_O = \overline{OC} \times \bar{G} \quad (18.112)$$

Se observă că vectorul acestui moment este perpendicular pe planul format de axele Oz_I și Oz , având în consecință direcția liniei nodurilor ON (fig.18.13).

Modulul acestui moment este:

$$|\bar{M}_O| = G \sin \theta \cdot OC = Gh \sin \theta \quad (18.113)$$

Proiecțiile acestui moment pe axele sistemului $Oxyz$, dispuse matriceal, sunt:

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Gh \sin \theta \cos \varphi \\ -Gh \sin \theta \sin \varphi \\ 0 \end{bmatrix} \quad (18.114)$$

Se fac în continuare înlocuirile în relația (18.105):

$$\begin{bmatrix} J_x & -J_{xy} & 0 \\ -J_{yx} & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ 0 \end{bmatrix} \quad (18.115)$$

Din această ecuație matriceală se poate explicita vectorul care conține derivatele în raport cu timpul ale proiecțiilor vitezei unghiulare, prin înmulțirea la stânga a întregii ecuații cu inversa matricii de inerție.

$$\begin{bmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_x & -J_{xy} & 0 \\ -J_{yx} & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{bmatrix}^{-1} \cdot \left(\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_z \end{bmatrix} \right) \quad (18.116)$$

Sistemul de ecuații diferențiale se obține derivând în raport cu timpul ecuațiile (18.103):

$$\begin{cases} \ddot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\psi} \dot{\theta} \cos \theta \sin \varphi + \dot{\psi} \dot{\varphi} \sin \theta \cos \varphi + \ddot{\theta} \cos \varphi - \dot{\theta} \dot{\varphi} \sin \varphi = \dot{\omega}_x \\ \ddot{\psi} \sin \theta \cos \varphi + \dot{\psi} \dot{\theta} \cos \theta \cos \varphi - \dot{\psi} \dot{\varphi} \sin \theta \sin \varphi - \ddot{\theta} \sin \varphi - \dot{\theta} \dot{\varphi} \cos \varphi = \dot{\omega}_y \\ \ddot{\psi} \cos \theta - \dot{\psi} \dot{\theta} \sin \theta + \ddot{\varphi} = \dot{\omega}_z \end{cases} \quad (18.117)$$

Prin prelucrarea acestuia se pot explicita derivatele de ordinul II ale unghiurilor lui Euler:

$$\begin{cases} \ddot{\psi} = \frac{I}{\sin \theta} (\dot{\omega}_x \sin \varphi + \dot{\omega}_y \cos \varphi - \dot{\psi} \dot{\theta} \cos \theta) \\ \ddot{\theta} = \dot{\omega}_x \cos \varphi - \dot{\omega}_y \sin \varphi - \dot{\psi} \dot{\varphi} \sin \theta \\ \ddot{\varphi} = (\dot{\omega}_x \sin \varphi + \dot{\omega}_y \cos \varphi) \cos \theta - \dot{\omega}_z \sin \theta - \dot{\psi} \dot{\theta} \end{cases} \quad (18.118)$$

Integrarea acestui sistem de ecuații diferențiale pentru determinarea legii de mișcare a giroscopului se poate face numai pe cale numerică. Relațiile de mai sus sunt necesare în algoritmul care conține funcțiile derivatelor.

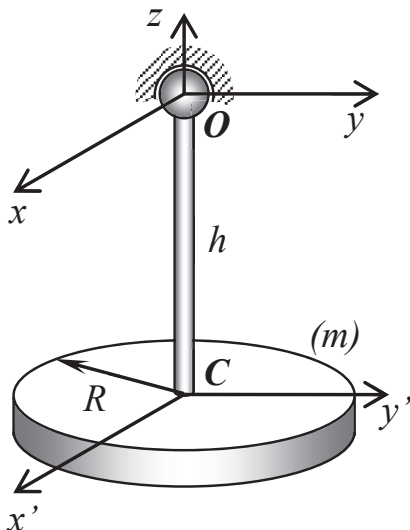


Fig.18.14

Problema 18.2 În condițiile analizei teoretice de mai sus, să se alcătuiască un program MATLAB pentru studiul unui giroscop necentrat suspendat (fig.18.14).

Date: $m, R, h, \psi_0, \theta_0, \varphi_0, \dot{\psi}_0, \dot{\theta}_0, \dot{\varphi}_0$

Cerute: $\psi(t), \theta(t), \varphi(t)$

Rezolvare: Momentele de inerție sunt:

$$\begin{aligned} J_x = J_y &= J_{x'} + mOC^2 = \frac{mR^2}{4} + mh^2 \\ J_z &= \frac{mR^2}{2} \\ J_{xy} &= J_{x'y'} + mOC^2 = mh^2 \end{aligned} \quad (18.119)$$

În fig.18.15 sunt reprezentate unghiurile lui Euler într-o poziție oarecare. Față de expunerea precedentă modificarea apare la momentul greutății în raport cu O :

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -mgh \sin \theta \cos \varphi \\ mgh \sin \theta \sin \varphi \\ 0 \end{bmatrix} \quad (18.120)$$

Pentru alcătuirea programului se definește un vector coloană al necunoscutelor:

$$\mathbf{z} = [\psi; \theta; \varphi; \dot{\psi}; \dot{\theta}; \dot{\varphi}] \quad (18.121)$$

cu valorile inițiale:

$$\mathbf{z}_0 = [\psi_0; \theta_0; \varphi_0; \dot{\psi}_0; \dot{\theta}_0; \dot{\varphi}_0] \quad (18.122)$$

Se formează deasemenea vectorul coloană al derivatelor:

$$\mathbf{dery} = [\dot{\psi}; \dot{\theta}; \dot{\varphi}; \ddot{\psi}; \ddot{\theta}; \ddot{\varphi}] \quad (18.123)$$

Programul MATLAB va avea următoarea configurație:

program.m

```
% GIROSCOPUL NECENTRAT SUSPENDAT
clear; close all;
% DATE GENERALE
global J Jinv Mgh
m=0.6; R=0.15; h=0.5; g=9.81;
Mgh=m*g*h;
% MATRICEA DE INERTIE
Jx=m*R^2/4+m*h^2;
Jy=Jx; Jz=m*R^2/2;
Jxy=m*h^2; Jyx=Jxy;
Jxz=0; Jzx=0; Jyz=0; Jzy=0;
J=[Jx -Jxy -Jxz; -Jxy Jy -Jyz; -Jxz -Jyz Jz];
Jinv=inv(J);
tmin=0; tmax=2;
interval=[tmin, tmax];
% POZITIA INITIALA
psi0=0; teta0=pi/4; fi0=0;
psip0=1.8; tetap0=0.3; fip0=15;
z0=[psi0; teta0; fi0; psip0; tetap0; fip0];
% INTEGRAREA NUMERICA
[t,z]=ode45('giroscop',interval,z0);
psi=z(:,1); teta=z(:,2); fi=z(:,3);
% EXTRAGEREA SI VIZUALIZAREA
% REZULTATELOR
psip=z(:,4); tetap=z(:,5); fip=z(:,6);
r=h*sin(teta);
polar(psi+pi/2,r);
```

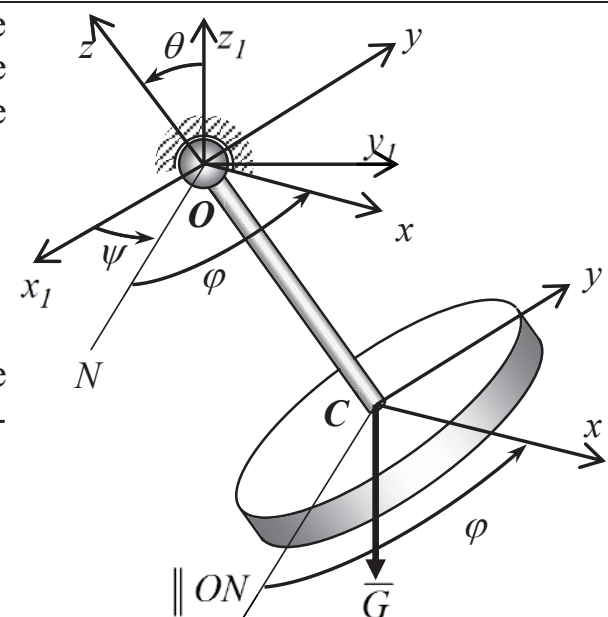


Fig.18.15

giroscop.m

```
function dery=giroscop(t,z)
global J Jinv Mgh
psi=z(1); teta=z(2); fi=z(3);
psip=z(4); tetap=z(5); fip=z(6);
steta=sin(teta); cteta=cos(teta);
sfi=sin(fi); cfi=cos(fi);
rot=[steta*sfi, cfi, 0; steta*cfi, -sfi, 0; cfi, 0, 1];
eulerp=[psip; tetap; fip];
om=rot*eulerp;
KO=J*om;
omx=om(1); omy=om(2); omz=om(3);
omas=[0 -omz omy; omz 0 -omx; -omy omx 0];
MO=[-Mgh*steta*cfi; Mgh*steta*sfi; 0];
omp=Jinv*(MO-omas*KO);
omxp=omp(1); omy=omp(2); omzp=omp(3);
if steta<0.0001 steta=0.0001; end;
psipp=(omxp*sfi+omy*cfi-psip*tetap*cteta)/steta;
tetapp=omxp*cfi-omy*sfi-psip*fip*steta;
fipp=(omxp*sfi+omy*cfi)*cteta-omzp*steta-psip*tetap;
dery=[psip; tetap; fip; psipp; tetapp; fipp];
```

După efectuarea integrării se reprezintă grafic, în coordonate polare, traiectoria punctului C – centrul de masă al giroscopului, proiectată pe planul Ox_1y_1 . Raza polară și unghiul de poziție ale acestei proiecții față de axa Ox_1 sunt respectiv $r = h \sin \theta$ și $\psi + \pi/2$. Diagrama respectivă este prezentată în fig.18.16. Se poate observa tendința de stabilizare a giroscopului în poziția verticală.

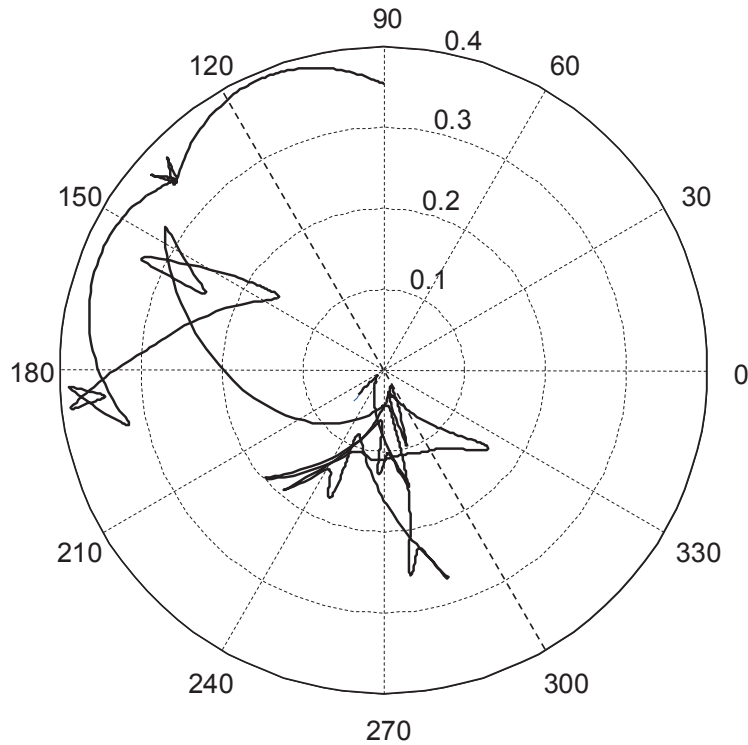


Fig.18.16

18.3.3 Efectul giroscopic

Fenomenul analizat în continuare poate fi mai ușor înțeles dacă se face referință la giroscopul centrat. El se manifestă nu numai la giroscopul propriu-zis ci și la orice alt ansamblu în care există corpuri în mișcare de rotație care funcționează la turații mari, cum sunt, de exemplu, rotoarele turbinelor sau ale electromotoarelor, roțile boghiurilor de cale ferată sau ale unor vehicule.

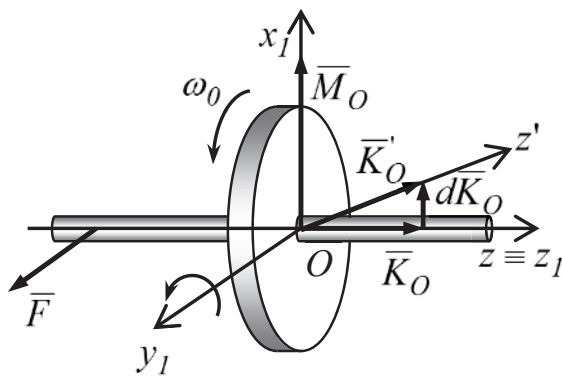


Fig.18.17

Discul din fig.18.17 se rotește cu viteza unghiulară ω_0 în jurul axei Oz . În conformitate cu cele arătate în capitolul precedent referitor la giroscopul centrat, în absența vreunei perturbații această axă este stabilă. Se presupune că inițial axa de rotație coincide cu direcția fixă Oz_1 . Vectorul momentului cinetic:

$$\bar{K}_O = J_z \bar{\omega}_0 \quad (18.124)$$

este coliniar cu axa de rotație.

Dacă asupra axei de rotație se aplică o forță perturbatoare \bar{F} , paralelă cu axa fixă Oy_1 , momentul \bar{M}_O al acestei forțe va fi coliniar cu axa Ox_1 . Aparent, sub acțiunea forței \bar{F} axa de rotație Oz ar trebui să se rotească în jurul axei Ox_1 . Conform teoremei momentului cinetic se poate scrie:

$$\frac{d\bar{K}_O}{dt} = \bar{M}_O \rightarrow d\bar{K}_O = \bar{M}_O dt \quad (18.125)$$

Se observă că variația $d\bar{K}_O$ a momentului cinetic are aceeași direcție cu momentul \bar{M}_O . Noul moment cinetic al discului se obține făcând însumarea vectorială:

$$\bar{K}'_O = \bar{K}_O + d\bar{K}_O \quad (18.126)$$

Direcția acestui vector este conținută în planul Ox_1z_1 ; deoarece vectorul moment cinetic este coliniar cu axa în jurul căreia se efectuează rotația discului, se deduce că această axă a suferit o deplasare în planul menționat, trecând din poziția Oz în poziția Oz' . Se constată că, contrar aparenței, rotația acestei axe a avut loc nu în jurul axei Ox_1 ci în jurul axei Oy_1 . Această deplasare a axei de rotație într-un plan perpendicular pe direcția forței perturbatoare poartă numele de *efect giroscopic*.

Dacă prin construcție deplasarea axei de rotație este împiedicată, tendința de deplasare menționată se va manifesta printr-un cuplu de forțe $(\bar{F}, -\bar{F})$ de moment \bar{M}_g numit *cuplu giroscopic*; acesta va acționa asupra lagărelor laterale ale discului încărcându-l pe unul și descărcându-l pe celălalt. Componentele \bar{V}_1 și \bar{V}_2 ale reacțiunilor din lagăre, aplicate axului discului, se modifică corespunzător cu forțele acestui cuplu (fig.18.18).

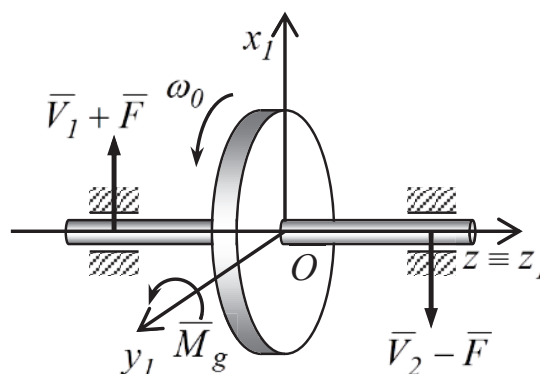


Fig.18.18

18.4 Mișcarea plan-paralelă

Pentru simplificarea tratării, sistemul de referință mobil atașat corpului se alege cu originea în centrul de masă al acestuia (fig.18.19). Cei trei parametri poziționali sunt în acest caz:

$$\begin{cases} x_{IC} = x_{IC}(t) \\ y_{IC} = y_{IC}(t) \\ \theta = \theta(t) \end{cases} \quad (18.127)$$

Sistemul de forțe aplicat corpului, în care de această dată se vor include și reacțiunile, se reduce în centrul de masă.

Teorema impulsului se aplică considerând mișcarea corpului față de sistemul de referință fix; teorema momentului cinetic se aplică considerând mișcarea acestuia față de sistemul de referință mobil. Relațiile generale sunt:

$$\dot{\bar{H}} = m\bar{a}_{IC} = m\ddot{\bar{r}}_{IC} = \sum \bar{F}_1 \quad (18.128)$$

$$\dot{\bar{K}}_C = \sum \bar{M}_C \quad (18.129)$$

Din teorema impulsului rezultă un prim set de ecuații diferențiale:

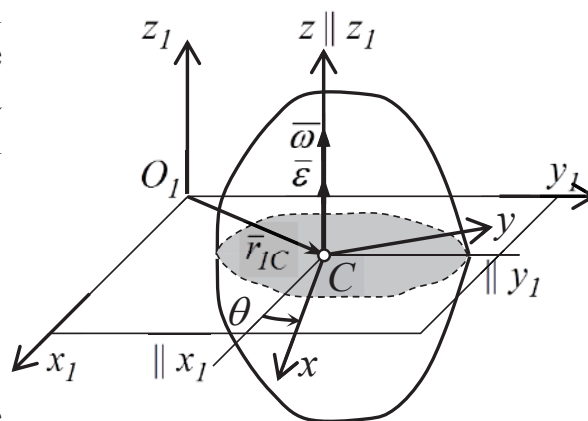


Fig.18.19

$$\begin{cases} m\ddot{x}_{IC} = \sum F_{x1} \\ m\ddot{y}_{IC} = \sum F_{y1} \\ 0 = \sum F_{z1} \end{cases} \quad (18.130)$$

Pentru definirea momentului cinetic \bar{K}_C se observă că viteza și accelerația unghiulară sunt perpendiculare pe planul mișcării, respectiv $\bar{\omega} = \omega \bar{k} = \dot{\theta} \bar{k}$ și $\bar{\varepsilon} = \varepsilon \bar{k} = \ddot{\theta} \bar{k}$. Se obține relațiile:

$$\begin{bmatrix} K_{Cx} \\ K_{Cy} \\ K_{Cz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix} \quad (18.131)$$

$$\bar{K}_C = -J_{xz}\omega \bar{i} - J_{yz}\omega \bar{j} + J_z\omega \bar{k} \quad (18.132)$$

Deoarece momentul cinetic s-a calculat cu proiecțiile sale în sistemul de referință mobil, pentru derivata acestuia în raport cu timpul se utilizează relația:

$$\frac{d\bar{K}_C}{dt} = \frac{\partial \bar{K}_C}{\partial t} + \bar{\omega} \times \bar{K}_C \quad (18.133)$$

Termenii acesteia sunt:

$$\frac{\partial \bar{K}_C}{\partial t} = -J_{xz}\varepsilon \bar{i} - J_{yz}\varepsilon \bar{j} + J_z\varepsilon \bar{k} \quad (18.134)$$

$$\bar{\omega} \times \bar{K}_C = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ -J_{xz}\omega & -J_{yz}\omega & J_z\omega \end{vmatrix} = J_{yz}\omega^2 \bar{i} - J_{xz}\omega^2 \bar{j} \quad (18.135)$$

În final, din relația (18.129) se obține un al doilea sistem de ecuații diferențiale:

$$\begin{cases} -J_{xz}\varepsilon + J_{yz}\omega^2 = \sum M_{Cx} \\ -J_{yz}\varepsilon - J_{xz}\omega^2 = \sum M_{Cy} \\ J_z\varepsilon = \sum M_{Cz} \end{cases} \quad (18.136)$$

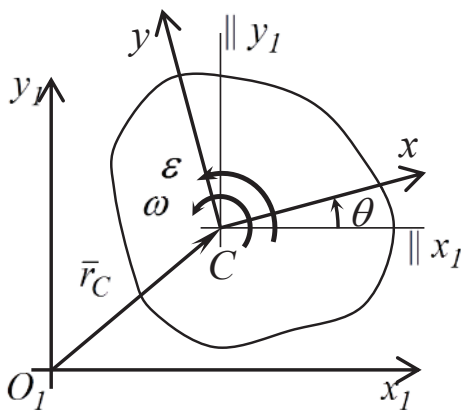


Fig.18.20

În cazul frecvent al unei plăci plane solicitată doar de forțe coplanare cu ea (fig.18.20):

$$\sum F_{z1} = 0 \quad \sum M_{Cx} = \sum M_{Cy} = 0 \quad (18.137)$$

Dacă direcțiile Cx și Cy sunt și direcții principale de inerție (axe de simetrie), $J_{xz} = J_{yz} = 0$.

Sistemul de ecuații corespunzător va fi:

$$\begin{cases} m\ddot{x}_{IC} = \sum F_{x1} \\ m\ddot{y}_{IC} = \sum F_{y1} \\ J_z\varepsilon = \sum M_{Cz} \end{cases} \quad (18.138)$$

Problema 18.3 – Să se studieze mișcarea unei roți pe un plan înclinat în ipoteza unei rostogoliri fără alunecare și cu alunecare, considerând că aceasta pornește din repaus.

Date: G, R, α, μ, s

Cerute: x_{IC}, θ

Rezolvare: Se observă că $y_{IC} = R = \text{const.}$ și în consecință $\ddot{y}_{IC} = 0$. Asupra roții acționează forțele reprezentate în fig.18.21. Se fac înlocuirile în sistemul (18.138) și se obțin ecuațiile:

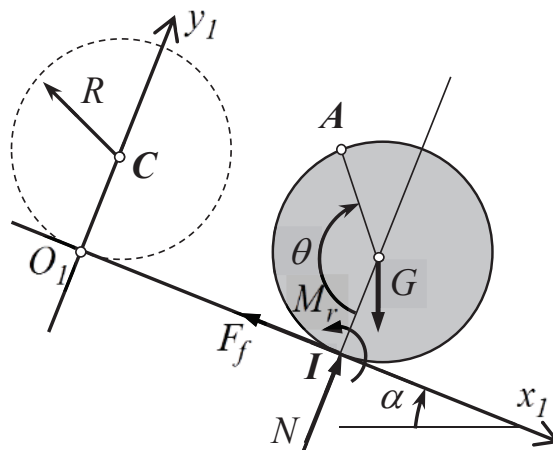


Fig.18.21

$$\begin{cases} \frac{G}{g} \ddot{x}_{IC} = G \sin \alpha - F_f \\ 0 = N - G \cos \alpha \\ \frac{GR^2}{2g} \ddot{\theta} = F_f R - M_r \\ M_r = s N \end{cases} \quad (18.139)$$

În cazul rostogolirii fără alunecare $F_f \leq \mu N$. Se observă că $O_1 I = IA$ și în consecință $x_{IC} = R\theta$, egalitate valabilă și la nivelul derivatelor $\ddot{x}_{IC} = R\ddot{\theta}$. Prelucrând sistemul de mai sus se obțin ecuațiile:

$$\ddot{x}_{IC} = \frac{2}{3}g(\sin \alpha - \frac{s}{R}\cos \alpha) \quad (18.140) \quad \ddot{\theta} = \frac{2}{3}\frac{g}{R}(\sin \alpha - \frac{s}{R}\cos \alpha) \quad (18.141)$$

Integrând fiecare ecuație de două ori și punând condițiile inițiale specifice pornirii din repaus, se găsesc legile de mișcare:

$$x_{IC} = \frac{1}{3}g(\sin \alpha - \frac{s}{R}\cos \alpha)t^2 \quad (18.142) \quad \theta = \frac{1}{3}\frac{g}{R}(\sin \alpha - \frac{s}{R}\cos \alpha)t^2 \quad (18.143)$$

Centrul de masă al roții va avea o deplasare rectilinie uniform variată; mișcarea în jurul acestuia va fi o rotație uniform variată.

În cazul rostogoliri cu alunecare, forța de frecare dintre roată și planul înclinat este $F_f = \mu N$ iar între cei doi parametri poziționali nu există nicio corelație. Din același sistem general (18.139) se obțin ecuațiile:

$$\ddot{x}_{IC} = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) \quad (18.144) \quad \ddot{\theta} = \frac{2g}{R}(\mu - \frac{s}{R})\cos \alpha \quad (18.145)$$

Integrând aceste ecuații și punând aceleași condiții inițiale, se găsesc legile de mișcare:

$$x_{IC} = \frac{gt^2}{2}(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) \quad (18.146) \quad \theta = \frac{gt^2}{R}(\mu - \frac{s}{R})\cos \alpha \quad (18.147)$$

19. DINAMICA SISTEMELOR DE CORPURI

19.1 Generalități

Se reamintește că un sistem de corpuri reprezintă un ansamblu de solide rigide aflate în interacțiune mecanică; sub acțiunea forțelor și momentelor extrioare sistemul capătă o mișcare bine determinată.

Un prim obiectiv al analizei dinamice constă în stabilirea ecuațiilor diferențiale ale mișcării sistemului ținând cont atât de solicitările exterioare cât și de relațiile cinematice interne dintre corpurile acestuia; este evident că ecuațiile diferențiale menționate conțin accelerațiile sistemului. Prin integrarea acestor ecuații se poate determina în continuare legea de mișcare la nivelul vitezelor și deplasărilor. Un al doilea obiectiv se referă la determinarea reacțiunilor dinamice interioare și exterioare.

Numărul gradelor de libertate ale unui sistem este egal cu cel al parametrilor poziționali independenți; de regulă acești parametri se referă la corpul sau corpurile care pun în mișcare sistemul. Parametrii poziționali ai celorlalte corpuri se exprimă în funcție de aceștia. Această corelație se extinde și la ceilalți parametri cinematici, respectiv la viteze și accelerații, liniare sau unghiulare. În cap.12.3 s-a prezentat modul de efectuare a analizei cinematice, respectiv de alcătuire a tabelului cinematic care precede analiza dinamică a oricărui sistem.

Stabilirea ecuațiilor diferențiale menționate mai sus este echivalentă determinării în primul rând a accelerațiilor corespunzătoare parametrilor poziționali independenți; pe baza relațiilor cinematice se pot calcula apoi și celelalte accelerații. Reacțiunile dinamice aplicate corpurilor vor depinde evident de accelerațiile acestora.

Pentru studiul sistemelor, ca și în dinamica punctului material (cap.13.3.1), se pot utiliza următoarele metode:

- *metoda impulsului*, având la bază teorema impulsului și teorema momentului cinetic; prin utilizarea metodei se determină atât accelerațiile sistemului cât și reacțiunile dinamice;

- *metoda energiei*, bazată pe teorema energiei cinetice. Prin această metodă se pot determina numai accelerațiile sistemului; după determinarea acestora, pentru calculul reacțiunilor dinamice se apelează la metoda impulsului.

Elementul comun ambelor metode este tabelul cinematic. La alcătuirea acestuia se au în vedere următoarele aspecte:

- se stabilește mai întâi corpul principal al sistemului; în general acesta este corpul sau elementul care pune sistemul în mișcare. Parametrii cinematici ai acestuia (poziția, viteza, accelerația) vor fi parametri principali. Dacă sistemul are două sau mai multe grade de libertate va exista câte un set de parametri principali pentru fiecare din acestea.

- numărul de linii al tabelului este de regulă egal cu numărul de corpuri al sistemului. Aplicațiile curente pentru însușirea metodei conțin corpuri cu mișcări de rotație, de translație și plan paralele; pentru acestea din urmă se prevăd două

linii – una corespunzătoare translației centrului de masă și alta corespunzătoare rotației în jurul acestuia.

– tabelul conține, în afara elementelor de identificare, trei coloane pentru parametrii cinematici (poziția, viteza, accelerația) liniari sau, după caz, unghiulari.

– pe baza modului de transmitere a mișcării se stabilesc relațiile de legătură dintre parametrii cinematici ai corpurilor secundare și parametrii considerați principali. Dacă sistemul pornește din repaus, condițiile inițiale sunt nule și relațiile corespunzătoare unui corp au aceeași formă.

19.2 Metoda impulsului

Metoda este analogă din punct de vedere procedural *metodei izolării corpurilor* din Statică (cap.7.2), ecuațiile de echilibru fiind înlocuite însă cu ecuațiile provenite din utilizarea teoremelor generale – teorema impulsului și teorema momentului cinetic. După alcătuirea tabelului cinematic, conform celor arătate mai sus, se parcurg următoarele etape:

– se izolează corpurile sistemului utilizând reprezentări grafice simplificate care conține numai elementele geometrice esențiale;

– se reprezintă forțele și momentele date, direct aplicate, precum și reacțiunile interioare și exterioare dintre corpurile sistemului;

– se scriu ecuațiile provenite din aplicarea celor două teoreme pentru fiecare din corpurile sistemului; numărul acestor ecuații depinde de forțele aplicate;

– dacă în sistem există frecare, se adaugă relațiile de definiție ale forțelor și momentelor de frecare corespunzătoare;

– se prelucrează sistemul general de ecuații obținut astfel încât prin substituții succesive să se obțină una sau mai multe ecuații care să conțină drept necunoscute numai accelerațiile corpurilor;

– accelerațiile secundare se înlocuiesc prin expresiile corespunzătoare din tabelul cinematic; după înlocuire ecuațiile reduse vor conține numai accelerațiile principale;

– se determină valorile accelerațiilor principale;

– se calculează accelerațiile secundare;

– se calculează reacțiunile.

În cazul frecvent al sistemelor cu mișcări plane, acționate de forțe coplanare, ecuațiile generale provenite din cele două teoreme au formele:

$$m\bar{a}_C = \sum \bar{F} \quad (19.1) \quad J_C \varepsilon = \sum M_C \quad (19.2)$$

În legătură cu utilizarea concretă a acestor relații se pot face câteva observații:

– pentru un corp care are numai mișcare de translație se scriu numai ecuații de forma (19.1);

– pentru un corp care execută o mișcare de rotație în jurul unei articulații fixe, articulație care coincide cu centrul de masă, termenul din partea stângă a ecuației (19.1) este nul ($\bar{a}_C = 0$);

– în membrul din parte dreaptă al fiecărei ecuații se vor considera pozitive forțele și momentele care acționează în sensul accelerației respective.

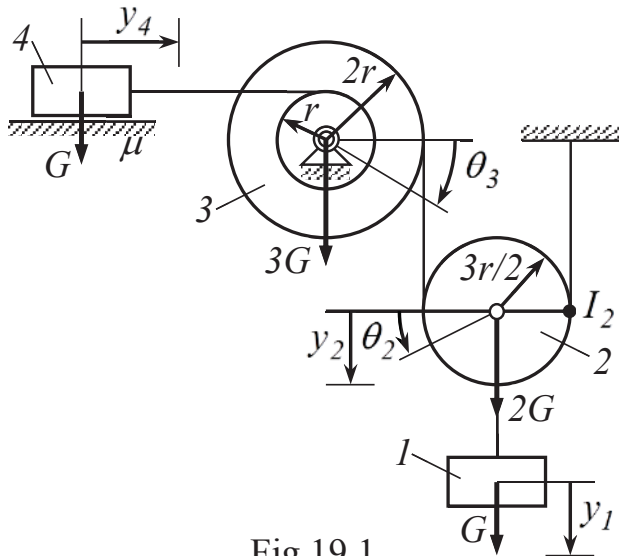


Fig.19.1

Problema 19.1 Sistemul din fig.19.1 se pune în mișcare sub acțiunea greutateii, pornind din repaus. Să se determine accelerația sistemului și reacțiunile.

Date: $G, r, \mu = 1/4, J_3 = 4Gr^2 / g$

Cerute: $a_1, \text{ reacțiunile.}$

Rezolvare: Momentul de inerție al corpului 2 față de centrul său de masă se calculează cu relația:

$$J_2 = \frac{m_2 R_2^2}{2} = \frac{9 Gr^2}{4 g} \quad (19.3)$$

Pentru alcătuirea tabelului cinematic se evidențiază relațiile dintre viteze:

$$v_2 = v_1 = \omega_2 \cdot 3r/2 \quad v_{23} = \omega_2 \cdot 3r = \omega_3 \cdot 2r \quad v_4 = \omega_3 \cdot r \quad (19.4)$$

Tabelul cinematic va avea în consecință componența ilustrată în tab.19.1.

Tabelul 19.1

Nr.	Mișc.	Deplasări	Viteze	Accelerații
1	T	y_1	v_1	a_1
2	T	$v_2 = v_1$	$v_2 = v_1$	$a_2 = a_1$
	R	$\theta_2 = 2y_1 / 3r$	$\omega_2 = 2v_1 / 3r$	$\varepsilon_2 = 2a_1 / 3r$
3	R	$\theta_3 = y_1 / r$	$\omega_3 = v_1 / r$	$\varepsilon_3 = a_1 / r$
4	T	$y_4 = y_1$	$v_4 = v_1$	$a_4 = a_1$

Schemele de încărcare pentru corpurile sistemului sunt date în fig.19.2.

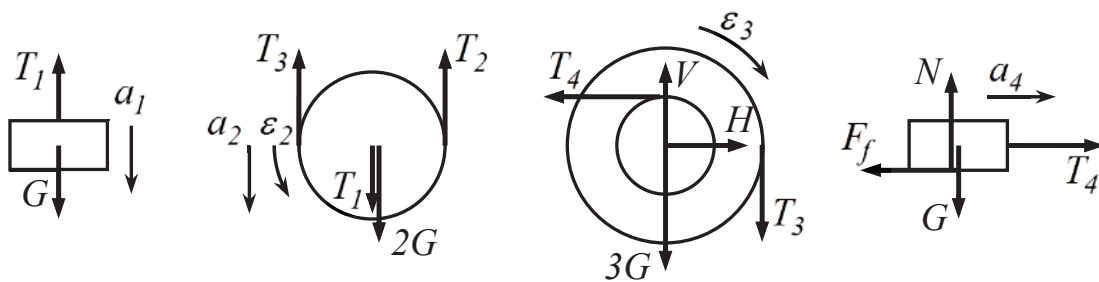


Fig.19.2

Aplicând teoremele generale se obține următorul sistem de ecuații:

<i>Corp 1:</i> $m_1 a_1 = G - T_1 \quad (1)$	<i>Corp 3:</i> $0 = H - T_4 \quad (4)$	<i>Corp 4:</i> $m_4 a_4 = T_4 - F_f \quad (7)$
<i>Corp 2:</i> $m_2 a_2 = 2G + T_1 - T_2 - T_3 \quad (2)$	$0 = V - 3G - T_3 \quad (5)$	$0 = N - G \quad (8)$
$J_2 \varepsilon_2 = (T_2 - T_3) \cdot 3r/2 \quad (3)$	$J_3 \varepsilon_3 = T_3 2r - T_4 r \quad (6)$	$F_f = \mu N \quad (9)$

Se elimină din sistem reacțiunile T_1 , T_2 , T_3 și T_4 și se obține o relație care conține numai accelerațiile și forțele date:

$$m_1 a_1 + m_2 a_2 + \frac{2}{3r} J_2 \varepsilon_2 + \frac{1}{r} J_3 \varepsilon_3 + m_4 a_4 = 3G - \mu G \quad (19.5)$$

Se exprimă masele în funcție de greutatea și accelerațiile secundare în funcție de a_1 , conform tabelului cinematic și datelor problemei. Rezultă în final accelerația principală:

$$a_1 = \frac{11}{36} g \quad (19.6)$$

și accelerațiile secundare:

$$a_2 = a_4 = a_1 = \frac{11}{36} g \quad \varepsilon_2 = \frac{2}{3r} a_1 = \frac{11}{54} \frac{g}{r} \quad \varepsilon_3 = \frac{1}{r} a_1 = \frac{11}{36} \frac{g}{r} \quad (19.7)$$

Reacțiunile se calculează în modul următor:

$$\begin{aligned} T_1 &= G - m_1 a_1 = \frac{25}{36} G = 0,694 G \\ T_2 &= \frac{1}{2} (3G - m_1 a_1 - m_2 a_2 - \frac{2}{3r} J_2 \varepsilon_2) = \frac{25}{24} G = 1,042 G \\ T_3 &= \frac{1}{2} (3G - m_1 a_1 - m_2 a_2 + \frac{2}{3r} J_2 \varepsilon_2) = \frac{97}{72} G = 1,347 G \\ T_4 &= H = m_4 a_4 + \mu G = \frac{5}{9} G = 0,556 G \\ V &= 3G + T_3 = \frac{313}{72} G = 4,347 G \end{aligned} \quad (19.8)$$

La sistemele care se pun în mișcare numai sub acțiunea greutății, pornind din repaus, accelerația este constantă și reprezintă o cotă subunitară din accelerația gravitațională. O valoare negativă a acesteia indică mișcarea în sens opus celui considerat inițial.

Problema 19.2 În fig.19.3 este dat un sistem cu două grade de libertate. Sistemul se pune în mișcare sub acțiunea greutăților proprii, pornind din repaus. Corpul 5 se rostogolește fără alunecare pe suprafața orizontală. Să se calculeze accelerațiile corpurilor sistemului și reacțiunile dintre ele.

Date: $G, r, \mu = 1/4, s = r/20$

$$J_3 = J_4 = 4Gr^2 / g$$

Cerute: $\varepsilon_3, \varepsilon_4, \text{ reacțiunile.}$

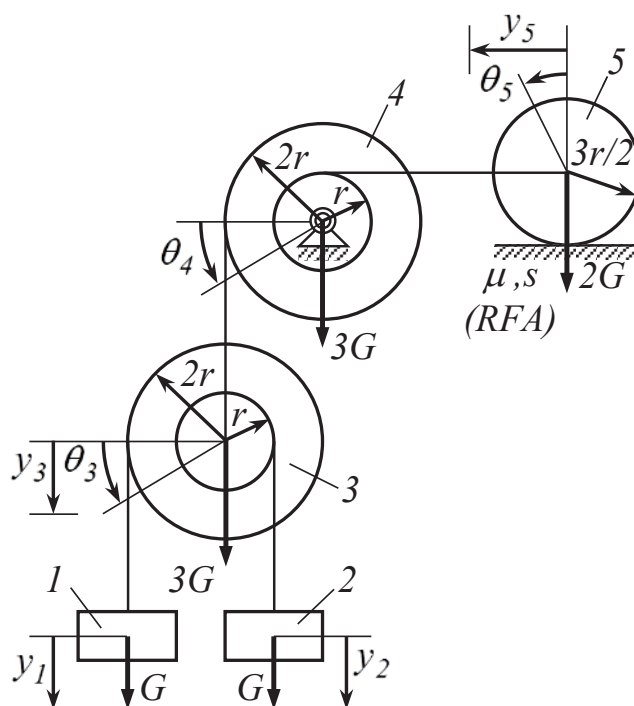


Fig.19.3

Rezolvare: Momentul de inerție al corpului 5 față de centrul său de masă se calculează cu relația:

$$J_5 = \frac{m_5 R_5^2}{2} = \frac{9}{4} \frac{Gr^2}{g} \quad (19.9)$$

Drept parametri principali se aleg unghiurile θ_3 și θ_4 și derivatele lor. În funcție de aceștia se stabilesc parametrii secundari în tab.19.2.

Tabelul 19.2

Nr.	Mișc.	Deplasări	Viteze	Accelerații
1	T	$y_1 = 2r\theta_4 + 2r\theta_3$	$v_1 = 2r\omega_4 + 2r\omega_3$	$a_1 = 2r\varepsilon_4 + 2r\varepsilon_3$
2	T	$y_2 = 2r\theta_4 - r\theta_3$	$v_2 = 2r\omega_4 - r\omega_3$	$a_2 = 2r\varepsilon_4 - r\varepsilon_3$
3	T	$y_3 = 2r\theta_4$	$v_3 = 2r\omega_4$	$a_3 = 2r\varepsilon_4$
	R	θ_3	ω_3	ε_3
4	R	θ_4	ω_4	ε_4
5	T	$y_5 = r\theta_4$	$v_5 = r\omega_4$	$a_5 = r\varepsilon_4$
	R	$\theta_5 = 2\theta_4/3$	$\omega_5 = 2\omega_4/3$	$\varepsilon_5 = 2\varepsilon_4/3$

Schemele de încărcare ale corpurilor sunt prezentate în fig.19.4.

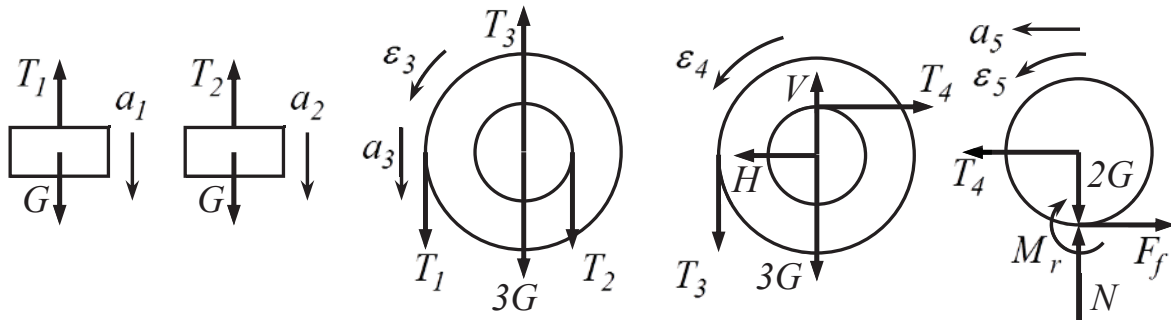


Fig.19.4

Ecuțiile care se obțin în baza teoremelor generale sunt următoarele:

<p><u>Corp 1:</u> $m_1 a_1 = G - T_1 \quad (1)$</p>	<p><u>Corp 4:</u> $0 = T_4 - H \quad (5)$ $0 = V - 3G - T_3 \quad (6)$ $J_4 \varepsilon_4 = T_3 \cdot 2r - T_4 \cdot r \quad (7)$</p>	<p><u>Corp 5:</u> $m_5 a_5 = T_4 - F_f \quad (8)$ $0 = N - 2G \quad (9)$ $J_5 \varepsilon_5 = F_f \cdot \frac{3r}{2} - M_r \quad (10)$ $M_r = sN \quad (11)$ $F_f \leq \mu N$</p>
<p><u>Corp 2:</u> $m_2 a_2 = G - T_2 \quad (2)$</p>	<p><u>Corp 3:</u> $m_3 a_3 = 3G + T_1 + T_2 - T_3 \quad (3)$ $J_3 \varepsilon_3 = T_1 \cdot 2r - T_2 \cdot r \quad (4)$</p>	

Din ecuațiile (1), (2) și (3) se izolează reacțiunile T_1 , T_2 și T_3 iar din ecuațiile (8)÷(11) se determină reacțiunea T_4 . Expresiile acestora se înlocuiesc apoi în ecuațiile (4) și (7); rezultă un sistem de două ecuații în care apar drept necunoscute numai accelerațiile sistemului:

$$\begin{cases} 2m_1a_1 - m_2a_2 + \frac{1}{r}J_3\varepsilon_3 = G \\ 2m_1a_1 + 2m_2a_2 + 2m_3a_3 + \frac{1}{r}J_4\varepsilon_4 + m_5a_5 + \frac{2}{3r}J_5\varepsilon_5 = 10G - \frac{4s}{3r}G \end{cases} \quad (19.10)$$

Se înlocuiesc accelerațiile secundare în funcție de ε_3 și ε_4 , conform tabelului cinematic, precum și elementele masice în funcție de datele enunțului; se rezolvă sistemul obținut în raport cu aceste accelerații unghiulare:

$$\begin{cases} 2\varepsilon_4 + 9\varepsilon_3 = \frac{g}{r} \\ 27\varepsilon_4 + 2\varepsilon_3 = \frac{149}{15} \frac{g}{r} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \varepsilon_3 = \frac{321}{10755} \frac{g}{r} = 0,03 \frac{g}{r} \\ \varepsilon_4 = \frac{437}{1195} \frac{g}{r} = 0,374 \frac{g}{r} \end{cases} \quad (19.11)$$

Accelerațiile secundare sunt următoarele:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{9508}{10755} g = 0,791g & a_2 &= \frac{7545}{10755} g = 0,701g & a_3 &= \frac{874}{1195} g = 0,731g \\ a_5 &= \frac{437}{1195} g = 0,374g & \varepsilon_5 &= \frac{874}{3585} g/r = 0,244g/r \end{aligned} \quad (19.12)$$

Se calculează în continuare reacțiunile:

$$\begin{aligned} N &= 2G \\ M_r &= sN = 0,1Gr \\ F_f &= 2 \cdot (J_5\varepsilon_5 + M_r) / 3r = 0,3G \\ T_2 &= G - m_2a_2 = 0,299G \\ T_3 &= 5G - m_1a_1 - m_2a_2 - m_3a_3 = 1,315G \\ T_4 &= m_5a_5 + F_f = 1,048G \end{aligned} \quad (19.13)$$

Se poate observa că în cazul rostogolirii fără alunecare forța de frecare este mai mică decât valoarea limită a acesteia $F_{f \max} = \mu N = 0,5G$.

19.3 Metoda energiei cinetice

Această metodă permite o determinare mai rapidă a accelerației sistemului; ea se aplică numai sistemelor de corpuri cu un singur grad de libertate (de menționat că în Mecanica Analitică există o metodă echivalentă pentru sistemele cu mai multe grade de libertate care utilizează ecuațiile lui Lagrange).

Metoda se bazează pe teorema energiei cinetice pusă sub forma:

$$dE = dL \rightarrow \frac{dE}{dt} = \frac{dL}{dt} \quad (19.14)$$

În această relație E reprezintă energia cinetică totală a sistemului care se obține însumând energiile cinetice ale corpurilor componente la un moment t oarecare, după pornirea din repaus. Se reamintește că relațiile uzuale de calcul pentru translație și rotație sunt:

$$E_{tr} = \frac{1}{2}mv_C^2 \quad (19.15) \quad E_{rot} = \frac{1}{2}J_C\omega^2 \quad (19.16)$$

Lucrul mecanic L se calculează pentru forțele motoare și rezistente aplicate corpurilor sistemului în intervalul de timp $0 - t$. Considerând deplasări finite ale corpurilor, relațiile uzuale de calcul pentru lucrul mecanic al unei forțe concentrate și al unui moment sunt:

$$L = F \cdot y \quad (19.17) \quad L = M \cdot \theta \quad (19.18)$$

în care y este deplasarea liniară a punctului de aplicație al forței pe direcția ei de acțiune iar θ este unghiul de rotație în plan produs de momentul respectiv. Se reamintește că în cazul forțelor de greutate lucrul mecanic depinde numai de diferența de nivel între pozițiile respective. Este util să se precizeze că *nu se calculează lucrul mecanic* pentru următoarele forțe:

- forțele aplicate în puncte fixe;
- forțele aplicate în centrele instantanee de rotație;
- forțele perpendiculare pe direcțiile deplasărilor;
- forțele de legătură (reacțiunile) dintre corpurile sistemului (lucrurile mecanic al reacțiunilor egale și direct opuse se compensează reciproc).

După alcătuirea tabelului cinematic, ca și în cazul metodei impulsului, se izolează corpurile sistemului și se introduc forțele date și reacțiunile din legături. În continuare se fac următoarele operații:

- se calculează energiile cinetice ale fiecărui corp din sistem; vitezele liniare și unghiulare ale corpurilor se înlocuiesc cu expresiile lor din tabelul cinematic;
- se calculează energia cinetică totală a sistemului;
- se calculează lucrul mecanic total al forțelor din sistem ținând cont de observațiile de mai sus; deplasările liniare și unghiulare se înlocuiesc prin expresiile corespunzătoare din tabelul cinematic;
- se egalează derivatele în raport cu timpul ale energiei cinetice totale și al lucrului mecanic; din expresia obținută se calculează accelerația principală;
- se calculează accelerațiile secundare;
- se calculează reacțiunile utilizând relațiile metodei impulsului.

Problema 19.3 Să se aplice metoda energiei pentru calculul accelerației principale a_1 de la problema 19.1.

Rezolvare: Cu vitezele din tab.19.1 se calculează următoarele energii cinetice:

$$E_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} \frac{G}{g} v_1^2 \quad (19.19)$$

$$E_2 = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{2} J_2 \omega_2^2 = \frac{1}{2} \frac{2G}{g} v_1^2 + \frac{1}{2} \frac{9}{4} \frac{Gr^2}{g} \left(\frac{2v_1}{3r} \right)^2 = \frac{3}{2} \frac{G}{g} v_1^2 \quad (19.20)$$

$$E_3 = \frac{1}{2} J_3 \omega_3^2 = \frac{1}{2} \frac{4Gr^2}{g} \left(\frac{v_1}{r} \right)^2 = 2 \frac{G}{g} v_1^2 \quad (19.21)$$

$$E_4 = \frac{1}{2} m_4 v_4^2 = \frac{1}{2} \frac{G}{g} v_1^2 \quad (19.22)$$

Energia cinetică totală se obține făcând însumarea acestor energii cinetice parțiale:

$$E = E_1 + E_2 + E_3 + E_4 = \frac{9}{2} \frac{G}{g} v_1^2 \quad (19.23)$$

Se calculează în continuare lucrul mecanic al forțelor din sistem:

$$L = Gy_1 + 2Gy_2 - F_f y_4 = Gy_1 + 2Gy_1 - \frac{1}{4} Gy_1 = \frac{11}{4} Gy_1 \quad (19.24)$$

Cu observația că $\dot{y}_1 = v_1$ și $\dot{v}_1 = a_1$, se egalează derivatele acestor expresii:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dL}{dt} \rightarrow \frac{9}{2} \frac{G}{g} 2v_1 a_1 = \frac{11}{4} Gv_1 \rightarrow a_1 = \frac{11}{36} g \quad (19.25)$$

S-a obținut pentru accelerația principală un rezultat identic cu cel determinat prin metoda impulsului, rel.(19.6).

Problema 19.4 Să se determine accelerația sistemului din fig.19.5.

Date: $G, r, \mu = 1/4, s = r/10\sqrt{3}, \alpha = 30^\circ$

$$J_2 = J_3 = 3Gr^2/g, M = 4Gr$$

Cerute: ε_1 , reacțiunile

Rezolvare: Momentul de inerție al corpului 1 se calculează cu relația:

$$J_1 = \frac{m_1 r_1^2}{2} = \frac{9}{8} \frac{Gr^2}{g} \quad (19.26)$$

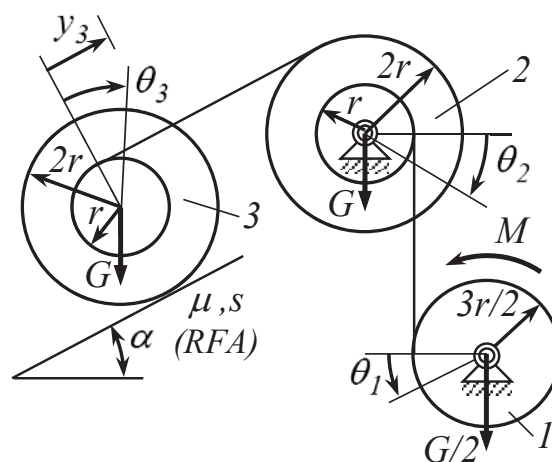


Fig.19.5

Mărimile $\theta_1, \omega_1, \varepsilon_1$ ale corpului motor 1 se aleg drept parametri principali. Pentru alcătuirea tabelului cinematic sunt utile câteva relații între viteze:

$$v_{12} = \omega_1 \cdot 3r/2 = \omega_2 r \quad v_{23} = \omega_2 \cdot 2r = \omega_3 \cdot 3r \quad v_3 = \omega_3 \cdot 2r \quad (19.27)$$

Tabelul cinematic este da tab.19.3.

Tabelul 19.3

Nr.	Mișc.	Deplasări	Viteze	Accelerații
1	R	θ_1	ω_1	ε_1
2	R	$\theta_2 = 3\theta_1/2$	$\omega_2 = 3\omega_1/2$	$\varepsilon_2 = 3\varepsilon_1/2$
3	T	$y_3 = 2r\theta_1$	$v_3 = 2r\omega_1$	$a_3 = 2r\varepsilon_1$
	R	$\theta_3 = \theta_1$	$\omega_3 = \omega_1$	$\varepsilon_3 = \varepsilon_1$

Energiile cinetice ale corpurilor sunt următoarele:

$$E_1 = \frac{1}{2} J_1 \omega_1^2 = \frac{1}{2} \frac{9}{8} \frac{Gr^2}{g} \omega_1^2 = \frac{9}{16} \frac{G}{g} r^2 \omega_1^2 \quad (19.28)$$

$$E_2 = \frac{1}{2} J_2 \omega_2^2 = \frac{1}{2} \frac{3Gr^2}{g} \left(\frac{3\omega_1}{2} \right)^2 = \frac{27}{8} \frac{G}{g} r^2 \omega_1^2 \quad (19.29)$$

$$E_3 = \frac{1}{2} m_3 v_3^2 + \frac{1}{2} J_3 \omega_3^2 = \frac{1}{2} \frac{G}{g} (2r\omega_1)^2 + \frac{1}{2} \frac{3Gr^2}{g} \omega_1^2 = \frac{7}{2} \frac{G}{g} r^2 \omega_1^2 \quad (19.30)$$

Energia cinetică totală a sistemului este:

$$E = E_1 + E_2 + E_3 = \frac{119}{16} \frac{G}{g} r^2 \omega_1^2 \quad (19.31)$$

Izolarea și încărcarea corpurilor este prezentată în fig.19.6.

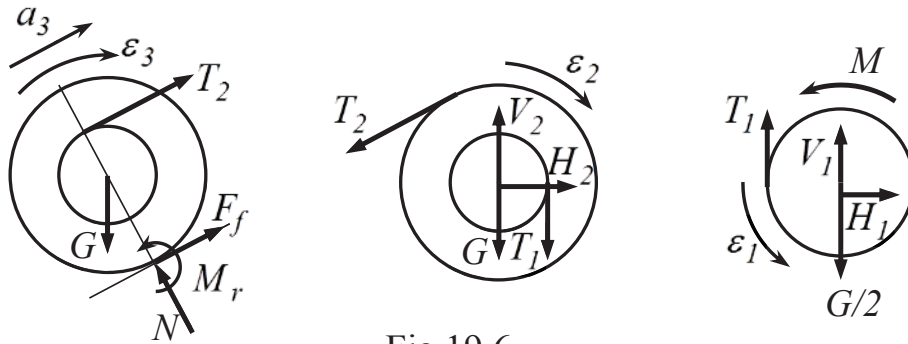


Fig.19.6

Lucrul mecanic total se va calcula cu relația:

$$L = M\theta_1 - G \sin \alpha \cdot y_3 - M_r \theta_3 = M\theta_1 - G(\sin \alpha + \frac{s}{2r} \cos \alpha) \cdot 2r\theta_1 \quad (19.32)$$

în care $M_r = sN = sG \cos \alpha$. Cu datele problemei rezultă:

$$L = \frac{129}{20} Gr\theta_1 \quad (19.33)$$

Se egalează în continuare derivatele în raport cu timpul ale energiei cinetice și lucrului mecanic. Ținând cont că $\dot{\theta}_1 = \omega_1$ și $\dot{\omega}_1 = \varepsilon_1$ se calculează accelerația unghiulară a corpului motor 1:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dL}{dt} \rightarrow \frac{119}{16} \frac{G}{g} r^2 \cdot 2\omega_1 \varepsilon_1 = \frac{129}{20} Gr\omega_1 \rightarrow \varepsilon_1 = \frac{258}{595} \frac{g}{r} = 0,434 \frac{g}{r} \quad (19.34)$$

Reacțiunile se pot determina în continuare calculând accelerațiile secundare din tab.19.3 și rezolvând sistemul de ecuații provenit din utilizarea metodei impulsului.

<p><u>Corp 1:</u> $0 = H_1$ $0 = V_1 + T_1 - G/2$ $J_1 \varepsilon_1 = M - T_1 \cdot 3r/2$</p>	<p><u>Corp 2:</u> $0 = H_2 - T_2 \cos \alpha$ $0 = V_2 - G - T_1 - T_2 \sin \alpha$ $J_2 \varepsilon_2 = T_1 \cdot r - T_2 \cdot 2r$</p>	<p><u>Corp 3:</u> $m_3 a_3 = T_2 + F_f - G \sin \alpha$ $0 = N - G \cos \alpha$ $J_3 \varepsilon_3 = T_2 \cdot r - F_f \cdot 2r - M_r$ $M_r = sN$ $F_f \leq \mu N$</p>
--	--	--

Algoritmul pentru calculul acestora va conține relațiile următoare:

<p>1) $T_1 = (M - J_1 \varepsilon_1) \cdot 2/3r$ 2) $T_2 = (T_1 r - J_2 \varepsilon_2)/2r$ 3) $H_1 = 0$ 4) $V_1 = G/2 - T_1$</p>	<p>5) $H_2 = T_2 \cos \alpha$ 6) $V_2 = G + T_1 + T_2 \sin \alpha$ 7) $N = G \cos \alpha$ 8) $M_r = sN$ 9) $F_f = G \sin \alpha + m_3 a_3 - T_2$</p>
---	---

20. CIOCNIRI ȘI PERCUȚII

20.1 Generalități

Prin ciocnire se înțelege contactul brusc a două sau mai multe corpuri, însoțit de variația instantanee a vitezelor acestora. Contactul menționat se petrece într-un interval de timp $\Delta t \neq 0$ foarte scurt. În celelalte mișcări studiate până acum în Mecanică viteza \bar{v} a oricărui corp și, implicit, impulsul acestuia $\bar{H} = m\bar{v}$, au o variație fără discontinuități. La ciocnire, în intervalul de timp Δt , viteza își modifică brusc atributele – mărimea, direcția sau, după caz, și sensul.

Studiul ciocnirilor poate fi efectuat numai dacă se renunțe la ipoteza rigidității corpurilor, ipoteză luată în considerare în Mecanică în toate celelalte aspecte ale mișcării, și se admite pe durata ciocnirii că acestea sunt deformabile atât elastic cât și plastic.

Asupra corpurilor supuse ciocnirii, și numai pe durata acesteia, iau naștere și acționează niște forțe foarte mari, numite *forțe percutante*. În comparație cu acestea, toate celelalte forțe (de greutate, de frecare, etc.) sunt neglijabile și nu se iau în considerare. Forțele percutante au variații foarte rapide în intervalul $\Delta t = t' - t$, în care t reprezintă momentul în care corpurile care se ciocnesc intră în contact iar t' este momentul când acestea se desprind (fig.20.1). Intervalul Δt este foarte mic, astfel că se poate considera că nu are loc o variație a poziției corpurilor pe durata ciocnirii.

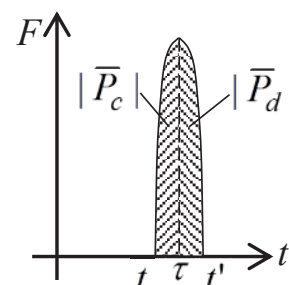


Fig.20.1

Legat de forțele percutante se definește noțiunea de *percuție*:

$$\bar{P} = \int_t^{t'} \bar{F} dt \quad (20.1)$$

Se observă că vectorul percuției este colinar și are același sens cu vectorul forței percutante. În mod practic, în studiul ciocnirilor în locul forțelor percutante se vor introduce percuțiile respective. Modulul percuției $|\bar{P}|$ este numeric egal cu aria de sub diagrama de variație a forței percutante $|\bar{F}(t)|$.

Intervalul de timp în care are loc ciocnirea poate fi divizat în două faze, respectiv faza de comprimare $t - \tau$ și faza de destindere $\tau - t'$ în care τ reprezintă momentul când forța percutantă atinge valoarea maximă. În consecință și percuția poate fi divizată corespunzător acestor faze:

$$\bar{P} = \int_t^{\tau} \bar{F} dt + \int_{\tau}^{t'} \bar{F} dt = \bar{P}_c + \bar{P}_d \quad (20.2)$$

Legat de comportamentul corpurilor în timpul ciocnirii se definește coeficientul:

$$k = \frac{|\bar{P}_d|}{|\bar{P}_c|} \quad (20.3)$$

numit *coeficient de restituire* sau *coeficient de elasticitate la ciocnire*. Pentru o combinație de materiale dată acest coeficient este considerat constant.

Coeficientul de restituire se determină experimental și are o valoare pozitivă subunitară. Se deosebesc următoarele situații:

- *ciocnirea perfect elastică* ($k = 1$) în care percuțiile în cele două faze sunt egale; după ciocnire corpurile se desprind;
- *ciocnirea perfect plastică* ($k = 0$) în care percuția în faza de destindere este nulă; după ciocnire corpurile rămân în contact;
- *ciocnirea elasto-plastică sau naturală* ($0 < k < 1$) în care percuția din faza de destindere este mai mică decât cea din faza de comprimare datorită unei pierderi energetice la deformarea corpurilor.

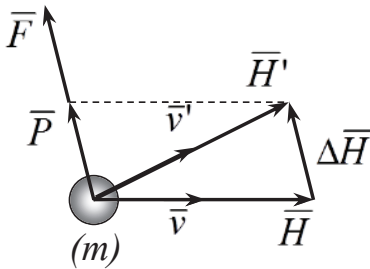


Fig.20.2

Pentru un corp oarecare supus unei forțe percutante \bar{F} se poate scrie:

$$\bar{F} = m\bar{a} = m \frac{d\bar{v}}{dt} \rightarrow \bar{F} dt = m d\bar{v} \quad (20.4)$$

Se face înlocuirea în relația (20.1):

$$\begin{aligned} \bar{P} &= \int_t^{t'} \bar{F} dt = \int_{\bar{v}}^{\bar{v}'} m d\bar{v} = m(\bar{v}' - \bar{v}) = \\ &= m\bar{v}' - m\bar{v} = \bar{H}' - \bar{H} = \Delta\bar{H} \end{aligned} \quad (20.5)$$

S-au notat prin \bar{v} și \bar{v}' vitezele corpului la momentele t și t' . Se demonstrează astfel că percuția este egală cu variația impulsului în timpul ciocnirii (fig.20.2).

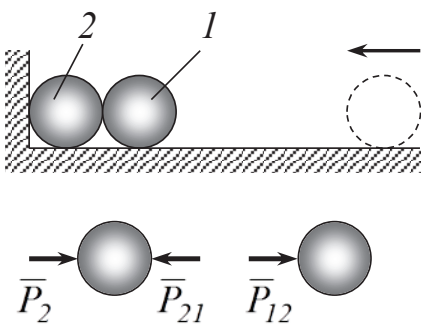


Fig.20.3

Între corpurile participante la ciocnire apar *percuții interioare*; asupra acestora se pot aplica și *percuții exterioare* din partea unor corpuri care nu aparțin ansamblului format de acestea. În exemplul din fig.20.3, sfera 1 lovește sfera 2 lipită de un perete. Percuțiile \bar{P}_{12} și \bar{P}_{21} sunt interioare iar \bar{P}_2 este exterioară. Pentru percuțiile interioare se aplică principiul acțiunii și reacțiunii, acestea fiind egale și direct opuse; în cazul de față $|\bar{P}_{12}| = |\bar{P}_{21}|$.

20.2 Teoremele generale în studiul ciocnirilor

a) Teorema impulsului.

Din relația (20.5) aplicată unui singur punct material se reține:

$$m\bar{v}' - m\bar{v} = \bar{P} \quad (20.6)$$

Pentru un sistem de puncte materiale participante simultan la o ciocnire:

$$\sum m_i \bar{v}'_i - \sum m_i \bar{v}_i = \sum \bar{P}_{ext} + \sum \bar{P}_{int} \quad (20.7)$$

Dar, așa cum s-a arătat mai sus, percuțiile interioare sunt egale și direct opuse astfel că pe ansamblul sistemului suma percuțiilor interioare este nulă. Se deduce relația:

$$\Delta\bar{H} = \bar{H}' - \bar{H} = \sum \bar{P}_{ext} \quad (20.8)$$

care arată că variația impulsului total în timpul ciocnirii este egală cu suma percuțiilor exterioare. Relația de mai sus își păstrează valabilitatea și în cazul ciocnirii a două sau mai multe corpuri cu dimensiuni finite. În absența percuțiilor exterioare $\bar{H}' = \bar{H}$ și impulsul total al sistemului se conservă.

b) Teorema momentului cinetic

Ținând cont de observația că în timpul ciocnirii nu are loc o variație a poziției, termenii relației (20.6) se pot înmulți vectorial la stânga cu vectorul de poziție \bar{r} al punctului material față de un reper O :

$$\bar{r} \times m\bar{v}' + \bar{r} \times m\bar{v} = \bar{r} \times \bar{P} \quad (20.9)$$

Făcând însumarea pentru toate punctele materiale ale unui sistem se obține:

$$\sum(\bar{r}_i \times m_i \bar{v}_i') - \sum(\bar{r}_i \times m_i \bar{v}_i) = \sum(\bar{r} \times \bar{P}_{ext}) + \sum(\bar{r} \times \bar{P}_{int}) \quad (20.10)$$

Și în acest caz se poate observa că suma momentelor percuțiilor interioare este nulă astfel că relația de mai sus va lua forma:

$$\Delta \bar{K}_O = \bar{K}_O' - \bar{K}_O = \sum \bar{M}_O(\bar{P}_{ext}) \quad (20.11)$$

Această relație indică faptul că variația momentului cinetic în timpul ciocnirii este egală cu suma momentelor percuțiilor exterioare față de reperul considerat. Relația este valabilă și în cazul ciocnirii unui sistem de corpuri.

În absența percuțiilor exterioare $\bar{K}_O' = \bar{K}_O$ și momentul cinetic se conservă.

c) Teorema energiei cinetice.

Pentru un punct material de rang i dintr-un sistem relația (20.6) devine:

$$m_i(\bar{v}_i' - \bar{v}_i) = \bar{P}_i + \sum \bar{P}_{ij} \quad (20.12)$$

în care \bar{P}_i este percuție exterioară iar \bar{P}_{ij} sunt percuții interioare. Se înmulțește această relație scalar cu \bar{v}_i' :

$$m_i(\bar{v}_i' - \bar{v}_i) \cdot \bar{v}_i' = \bar{P}_i \cdot \bar{v}_i' + \sum(\bar{P}_{ij} \cdot \bar{v}_i') \quad (20.13)$$

Se poate verifica ușor că:

$$(\bar{v}_i' - \bar{v}_i) \cdot \bar{v}_i' = \frac{1}{2}(\bar{v}_i')^2 - \frac{1}{2}(\bar{v}_i)^2 + \frac{1}{2}(\bar{v}_i' - \bar{v}_i)^2 \quad (20.14)$$

Se face înlocuirea în rel.(20.13) și se face însumarea pentru întregul sistem:

$$\frac{1}{2} \sum m_i (\bar{v}_i')^2 - \frac{1}{2} \sum m_i (\bar{v}_i)^2 + \frac{1}{2} \sum m_i (\bar{v}_i' - \bar{v}_i)^2 = \sum \bar{P}_i \cdot \bar{v}_i' + \sum \sum (\bar{P}_{ij} \cdot \bar{v}_i') \quad (20.15)$$

Termenii din partea stângă au următoarea semnificație:

$$E' = \frac{1}{2} \sum m_i (\bar{v}_i')^2 - \text{energia cinetică a sistemului după ciocnire;}$$

$$E = \frac{1}{2} \sum m_i (\bar{v}_i)^2 - \text{energia cinetică a sistemului înainte de ciocnire;}$$

$$E_p = \frac{1}{2} \sum m_i (\bar{v}_i' - \bar{v}_i)^2 - \text{energia cinetică corespunzătoare vitezelor pierdute.}$$

Relația (20.15) devine:

$$E' - E + E_p = \sum \bar{P}_i \cdot \bar{v}_i' + \sum \sum (\bar{P}_{ij} \cdot \bar{v}_i') \quad (20.16)$$

Dacă nu există percuții exterioare ($\bar{P}_i = 0$) și după ciocnire punctele materiale respective rămân în contact ($\bar{P}_{ij} = -\bar{P}_{ji}$ și $\bar{v}_i' = \bar{v}_j'$), atunci partea din dreapta a acestei relații este nulă. În acest caz din expresia de mai sus se obține:

$$E - E' = E_p \tag{20.17}$$

Această relație este cunoscută în Mecanică sub numele de *teorema lui Carnot*; conform acesteia pierderea de energie cinetică în timpul ciocnirii este egală cu energia cinetică a vitezelor pierdute.

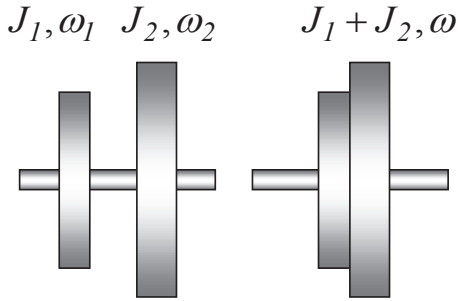


Fig.20.4

Trebuie menționat că relația (20.17) se aplică sistemelor de corpuri cu legături rigide (neelastice) și fără frecare. Fie, de exemplu, două discuri coaxiale cu momentele de inerție J_1 și J_2 care se rotesc cu viteze unghiulare ω_1 și ω_2 diferite (fig.20.4). Ele se cuplează brusc printr-un procedeu oarecare; după cuplare ele se vor roti cu aceeași viteză unghiulară ω . Făcând înlocuirile în relația (20.17) se obține:

$$\frac{1}{2} J_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \omega_2^2 - \frac{1}{2} (J_1 + J_2) \omega^2 = \frac{1}{2} J_1 (\omega - \omega_1)^2 + \frac{1}{2} J_2 (\omega - \omega_2)^2 \tag{20.18}$$

Din această ecuație se poate calcula viteza unghiulară finală:

$$\omega = \frac{J_1 \omega_1 + J_2 \omega_2}{J_1 + J_2} \tag{20.19}$$

Rezultatul obținut pune în evidență și conservarea momentului cinetic total în absența percuțiilor exterioare.

20.3 Ciocnirea centrică a două sfere

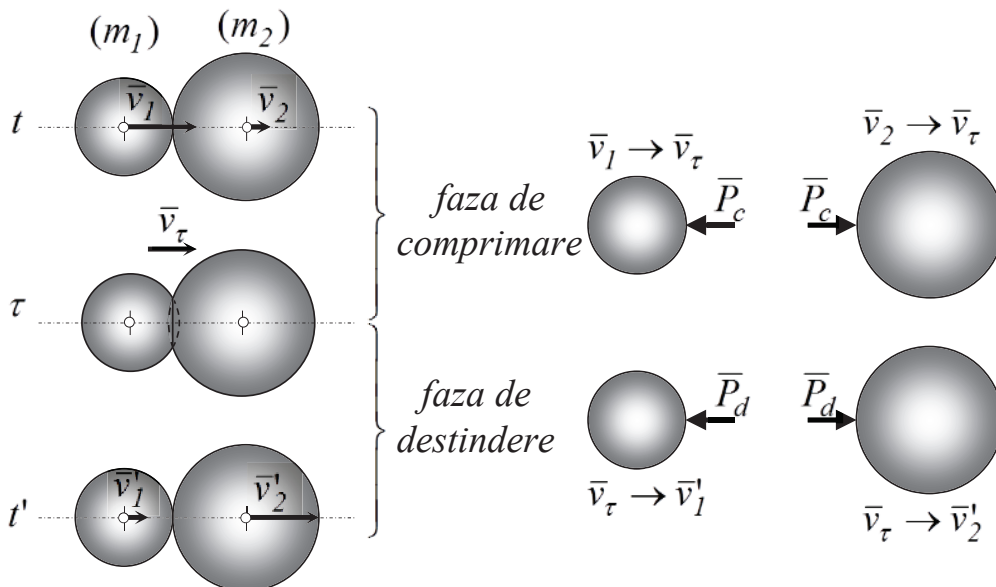


Fig.20.5

Se considera două sfere a căror deplasare înainte și după ciocnire are loc după linia care unește centrele lor geometrice (fig.20.5). Forța percutantă și, implicit, percuția au direcția normalei la suprafețele în contact, aflându-se în consecință pe linia centrelor. Sub acțiunea forței percutante are loc în faza de comprimare o deformare locală a celor două sfere, o parte din energia lor cinetică

se transformă în energie potențială. La sfârșitul fazei de comprimare sferile au aceeași viteză v_τ . În faza de destindere energie potențială acumulată este retransformată în energiei cinetice și sferile capătă viteze diferite.

În acest context se poate aprecia că valoarea coeficientului de restituire k arată cât din energia potențială acumulată în faza de comprimare este retransformată în timpul fazei de destindere.

Considerând cunoscute masele celor două sfere, vitezele lor înainte de ciocnire și coeficientul de restituire, se calculează vitezele acestora după ciocnire. În acest scop, pentru fiecare sferă se aplică relația vectorială (20.6) proiectată pe linia centrelor, atât în faza de comprimare cât și în cea de destindere:

$$\begin{cases} m_1 v_\tau - m_1 v_1 = -P_c \\ m_2 v_\tau - m_2 v_2 = P_c \end{cases} \quad (20.20) \quad \begin{cases} m_1 v'_x - m_1 v_\tau = -P_d \\ m_2 v'_2 - m_2 v_\tau = P_c \end{cases} \quad (20.21)$$

Din aceste sisteme de ecuații se obține:

$$v_\tau = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 v'_1 + m_2 v'_2}{m_1 + m_2} \quad (20.22)$$

$$P_c = \frac{m_1 m_2 (v_1 - v_2)}{m_1 + m_2} \quad (20.23) \quad P_d = \frac{m_1 m_2 (v'_2 - v'_1)}{m_1 + m_2} \quad (20.24)$$

Din egalitatea (20.22) se obține:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2 \quad (20.25)$$

Această relație confirmă că în absența percuțiilor exterioare impulsul total al sistemului format din cele două sfere se conservă. Din definiția (20.3) a coeficientului de restituire se deduce:

$$k = \frac{P_d}{P_c} = \frac{v'_2 - v'_1}{v_1 - v_2} \quad (20.26)$$

În continuare, din sistemul format de ecuațiile (20.25) și (20.26) se calculează:

$$v'_1 = v_1 - \frac{(v_1 - v_2)(I + k)}{I + \frac{m_1}{m_2}} \quad (20.27) \quad v'_2 = v_2 + \frac{(v_1 - v_2)(I + k)}{I + \frac{m_2}{m_1}} \quad (20.28)$$

Dacă cele două sfere sunt identice și perfect elastice ($m_1 = m_2, k = 1$), are loc un schimb de viteze, rezultând $v'_1 = v_2$ și $v'_2 = v_1$.

În cazul general al unei ciocniri naturale ($0 < k < 1$), numai o parte din energia cinetică este recuperată. Pierderea de energie cinetică este:

$$\Delta E = E - E' = \left(\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \right) - \left(\frac{1}{2} m_1 v'^2_1 + \frac{1}{2} m_2 v'^2_2 \right) \quad (20.29)$$

Înlocuind în această relație expresiile vitezelor după ciocnire se găsește:

$$\Delta E = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)} (1 - k^2) (v_1 - v_2)^2 \quad (20.30)$$

Dacă ciocnirea este perfect elastică ($k = 1$) se obține $\Delta E = 0$ și întreaga energie cinetică este recuperată; la polul opus, dacă ciocnirea este plastică ($k = 0$)

pierderea de energie cinetică este:

$$\Delta E = \frac{l}{2} \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)} (v_1 - v_2)^2 \quad (2.31)$$

Dacă în expresiile (20.27) și (20.28) se introduce $k=0$ se obține $v'_1 = v'_2 = v_\tau$; cele două sfere nu se desprind, deplasându-se în continuare cu viteza de la sfârșitul fazei de comprimare. Energie cinetică pierdută se regăsește în lucrul mecanic de deformare plastică și în căldura degajată.

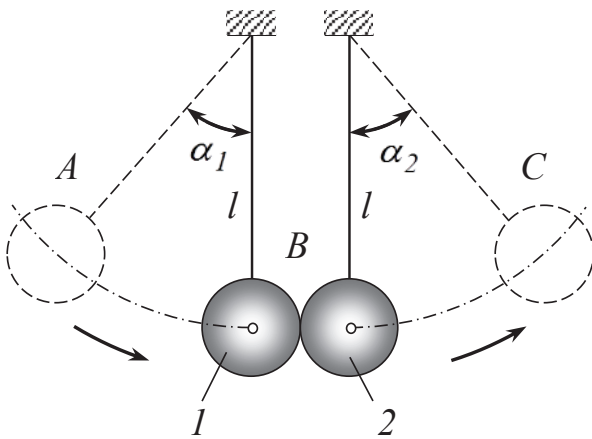


Fig.20.6

Problema 20.1 Se consideră două pendule matematice identice având fiecare masa m și lungimea firului l (din punctul de suspendare până în centrul sferei); cele două sfere sunt perfect elastice (fig.20.6). Pendulul 1 este lansat din poziția α_1 fără viteză inițială spre pendulul 2 aflat în repaus. Să se studieze mișcarea acestora după ciocnire.

Date: $m, l, \alpha_1, v_2 = 0, k = 1$;

Cerute: $v_1, v'_1, v'_2, \alpha_2$;

Rezolvare: Pentru calculul vitezei inițiale v_1 se aplică pendulului 1 teorema energiei cinetice între poziția de lansare A și poziția verticală B, observând că singura forță care dă lucru mecanic este greutatea sferei:

$$E_B - E_A = L_{AB} \rightarrow \frac{1}{2} m v_1^2 = m g l (1 - \cos \alpha_1) \rightarrow v_1 = \sqrt{2 g l (1 - \cos \alpha_1)} \quad (20.32)$$

Pentru calculul vitezelor după ciocnire se folosesc relațiile (20.27) și (20.28) particularizate cu datele din enunț; se obține $v'_1 = 0$ și $v'_2 = v_1$. Sfera 1 se oprește iar sfera 2 este expulzată cu viteza dinainte de ciocnire a sferei 1. Pentru pendulul 2 se aplică în continuare teorema energiei cinetice între pozițiile B și C:

$$E_C - E_B = L_{CB} \rightarrow -\frac{1}{2} m v_2'^2 = -m g l (1 - \cos \alpha_2) \rightarrow \cos \alpha_2 = \cos \alpha_1 \quad (20.33)$$

Rezultă ca pendulul 2 se va deplasa cu un unghi egal cu cel de la care a fost lansat pendulul 1. În continuare procesul se reia în sens invers și, în absența oricărei rezistențe, poate continua la infinit.

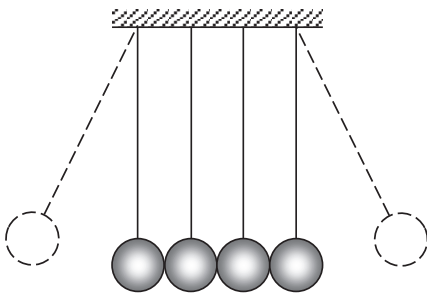


Fig.20.7

Este interesant de remarcat cazul în care un număr oarecare de pendule identice sunt așezate în linie și cu sferele în contact (fig.20.7). Dacă unul din pendulele exterioare este lansat către pendulul vecin va avea loc o ciocnire în lanț și percuțiile se vor transmite de la o sferă la alta. Se constată însă că numai pendulul aflat la cealaltă extremitate a șirului se va deplasa în modul expus mai sus în timp ce pendulele interioare vor rămâne pe loc. Și

în acest caz, în absența vreunei rezistențe din partea mediului, procesul poate continua la infinit.

20.4 Ciocnirea oblică a două sfere

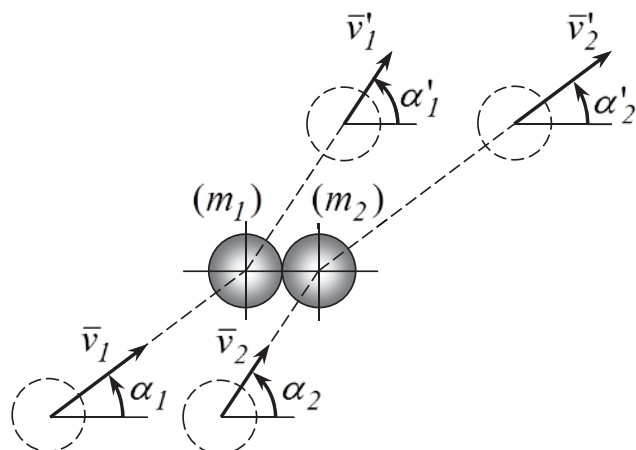


Fig.20.8

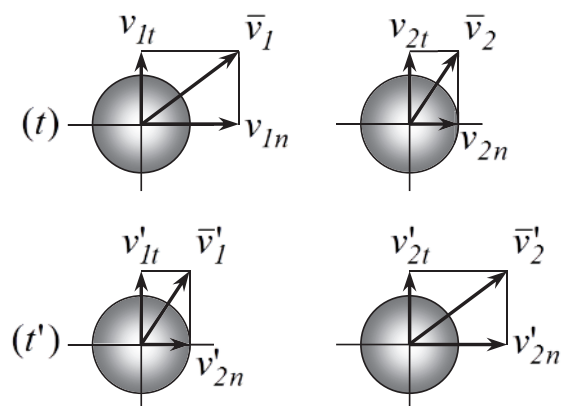


Fig.20.9

Ca și în cazul ciocnirii centrice, contactul dintre cele două sfere va avea loc după linia care unește centrele geometrice ale acestora (fig.20.8). Forțele percutante (egale și direct opuse) și percuțiile corespunzătoare acestora vor acționa după linia centrelor. În cazul ciocnirii oblice, pe lângă calcularea mărimii vitezelor după ciocnire, se determină și direcțiile acestora, respectiv direcțiile de deplasare ale sferelor. În acest scop, direcțiile vitezelor înainte și după ciocnire se raportează la linia centrelor.

Vitezele celor două sfere, înainte și după ciocnire (momentele t și t') se descompun pe direcția liniei centrelor și perpendicular pe aceasta (fig.20.9); proiecțiile acestora (normale și respectiv tangențiale în raport cu suprafețele sferelor) au expresiile:

$$\begin{cases} v_{1n} = v_1 \cos \alpha_1 \\ v_{1t} = v_1 \sin \alpha_1 \\ v_{2n} = v_2 \cos \alpha_2 \\ v_{2t} = v_2 \sin \alpha_2 \end{cases} \quad (20.34)$$

$$\begin{cases} v'_{1n} = v'_1 \cos \alpha'_1 \\ v'_{1t} = v'_1 \sin \alpha'_1 \\ v'_{2n} = v'_2 \cos \alpha'_2 \\ v'_{2t} = v'_2 \sin \alpha'_2 \end{cases} \quad (20.35)$$

Deoarece percuțiile acționează după linia centrelor, vor fi afectate numai componentele normale ale vitezelor celor două sfere, componentele tangențiale rămânând nemodificate, astfel că:

$$v'_{1t} = v_{1t} \quad (20.36)$$

$$v'_{2t} = v_{2t} \quad (20.37)$$

În consecință sunt valabile relațiile stabilite în capitolul precedent cu deosebirea că ele se aplică numai vitezelor normale:

$$m_1 v_{1n} + m_2 v_{2n} = m_1 v'_{1n} + m_2 v'_{2n} \quad (20.38)$$

$$k = \frac{v'_{2n} - v'_{1n}}{v_{1n} - v_{2n}} \quad (20.39)$$

Din aceste ecuații rezultă:

$$v'_{1n} = v_{1n} - \frac{(v_{1n} - v_{2n})(I + k)}{I + \frac{m_1}{m_2}} \quad (20.40) \quad v'_{2n} = v_{2n} + \frac{(v_{1n} - v_{2n})(I + k)}{I + \frac{m_2}{m_1}} \quad (20.41)$$

Vitezele totale după ciocnire se vor calcula cu relațiile:

$$v'_I = \sqrt{(v'_{In})^2 + (v'_{It})^2} \quad (20.42) \quad v'_2 = \sqrt{(v'_{2n})^2 + (v'_{2t})^2} \quad (20.43)$$

Pentru direcțiile acestor viteze se calculează funcțiile trigonometrice:

$$\operatorname{tg} \alpha'_I = \frac{v'_{It}}{v'_{In}} \quad (20.44) \quad \operatorname{tg} \alpha'_2 = \frac{v'_{2t}}{v'_{2n}} \quad (20.45)$$

20.5 Ciocnirea unei sfere cu o suprafață fixă

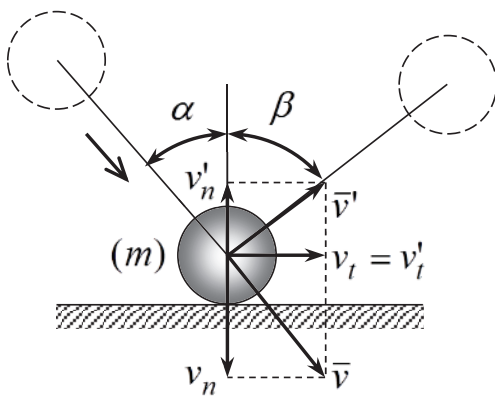


Fig.20.10

Suprafața fixă se poate considera ca aparținând unui corp de masă infinită ($M = \infty$) și viteză nulă ($V = 0$). Cunoscând viteza \bar{v} a sferei și unghiul de incidență α față de normala comună la suprafețele în contact (fig.20.10), se determină viteza \bar{v}' a sferei după ciocnire și unghiul de ricoșare β . Viteza sferei înainte și după ciocnire se descompune în componentele normală și tangențială:

$$\begin{cases} v_n = v \cos \alpha \\ v_t = v \sin \alpha \end{cases} \quad \begin{cases} v'_n = v' \cos \beta \\ v'_t = v' \sin \beta \end{cases} \quad (20.46)$$

Forța percutantă și respectiv percuția aplicată sferei are direcția normalei la cele două suprafețe. În consecință ea va afecta numai componenta normală a vitezei sferei, cea tangențială rămânând nemodificată ($v'_t = v_t = v \sin \alpha$). Relația de conservare a impulsului în timpul ciocnirii:

$$mv_n + MV_n = mv'_n + MV'_n \quad (20.47)$$

conduce la o nedeterminare ($MV_n = MV'_n = \infty \cdot 0$). Relație de definiere a coeficientului de restituire ia forma:

$$k = \frac{V'_n - v'_n}{v_n - V_n} = -\frac{v'_n}{v_n} \rightarrow v'_n = -k v_n = -k v \cos \alpha \quad (20.48)$$

Semnul minus indică schimbarea sensului componentei normale după ciocnire. Viteza sferei după ciocnire și unghiul de ricoșare se pot calcula în modul următor:

$$v' = \sqrt{(v'_n)^2 + (v'_t)^2} = v \sqrt{k^2 \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} \quad (20.49)$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{v'_t}{v'_n} = \frac{v_t}{-k v_n} = \frac{v \sin \alpha}{-k v \cos \alpha} = -\frac{1}{k} \operatorname{tg} \alpha \quad (20.50)$$

Semnul minus indică faptul că unghiul β este de cealaltă parte a normalei față de α . Examinând aceste relații se pot face următoarele observații:

– dacă ciocnirea este perfect elastică ($k = 1$) se obține $v' = v$ și $|\beta| = |\alpha|$ – sfera va ricoșa cu aceeași viteză, unghiul de ricoșare fiind egal cu cel de incidență;

– dacă ciocnirea este perfect plastică ($k = 0$) se obține $v' = v \sin \alpha = v_t$ și $|\beta| = \pi/2$ – sfera nu va ricoșa ci va aluneca în lungul suprafeței.

Relația (20.48) poate servi la determinarea experimentală a coeficientului de restituire k pentru o combinație de materiale. O sferă dintr-un anumit material se lasă să cadă vertical peste o placă confecționată din celălalt material (fig.20.11). Printr-un procedeu oarecare se măsoară atât înălțimea h de la care cade sfera precum și înălțimea h' la care aceasta ricoșează. Particularizând în acest caz relația (13.88) de mișcare pe verticală a unui punct material în mediu nerezistent, din relația (20.48) se deduce:

$$k = \frac{|v'|}{|v|} = \frac{\sqrt{2gh'}}{\sqrt{2gh}} = \sqrt{\frac{h'}{h}} \quad (20.51)$$

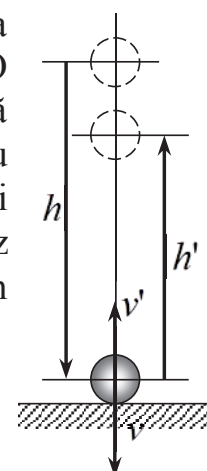


Fig.20.11

20.6 Ciocnirea unei sfere cu un corp rotitor

Sfera 1 lovește corpul 2 care se poate roti în jurul unei articulații fixe O (pentru exemplificare, fără a reduce din generalitate, în fig.20.12 s-a ales cazul unei bare). Percuțiile \bar{P} care apar în punctul de impact sunt percuții interioare sistemului format de cele două corpuri și au direcția normalei comune la suprafețele în contact; în afara acestora, în articulația fixă apare și percuția exterioară \bar{P}_O , având o direcție necunoscută.

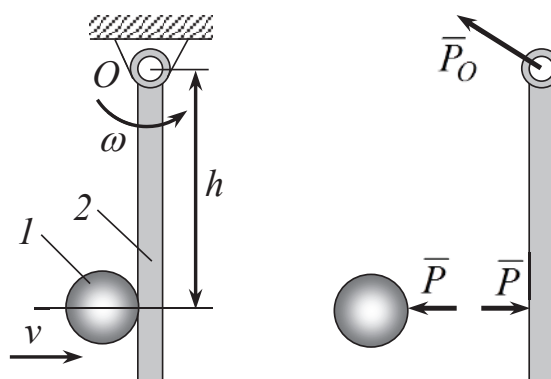


Fig.20.12

Conform teoremelor studiate în cap.20.2, pentru corpurile participante la ciocnire sunt valabile relațiile generale:

$$\bar{H}' - \bar{H} = \sum \bar{P}_{ext} \quad (20.52) \quad \bar{K}'_O - \bar{K}_O = \sum \bar{M}_O(\bar{P}_{ext}) \quad (20.53)$$

Pentru determinarea vitezelor corpurilor după ciocnire, este indicat să se aplice teorema momentului cinetic relativ la centrul articulației, față de care momentul percuției exterioare este nul și momentul cinetic se conseră. Observând că vectorii momentelor cinetice ale celor două corpuri sunt perpendiculari pe planul mișcării, relația (20.53) se detaliază în modul următor:

$$\bar{K}'_O = \bar{K}_O \rightarrow K_O^{(1)} + K_O^{(2)} = K_O^{(1)} + K_O^{(2)} \quad (20.54)$$

O a doua relație necesară este dată de definiția coeficientului de restituire, cu precizarea că vitezele din această relație aparțin punctelor de contact între corpuri:

$$k = \frac{v'_2 - v'_1}{v_1 - v_2} \quad (20.55)$$

În exemplul din fig.20.12 se consideră că sfera are masa m și viteza inițială v iar bara are momentul de inerție J_O și viteza unghiulară ω ; ciocnirea este normală la distanța h de articulația O . Relațiile de mai sus iau forma următoare:

$$mv'h + J_O\omega' = mvh + J_O\omega \quad (20.56) \quad k = \frac{\omega'h - v'}{v - \omega h} \quad (20.57)$$

S-a format un sistem de două ecuații din care se pot calcula vitezele v' și ω' :

$$v' = v - \frac{(v - \omega h)(I + k)}{I + \frac{mh^2}{J_O}} \quad (20.58) \quad \omega' = \omega + \frac{(v - \omega h)(I + k)}{I + \frac{J_O}{mh^2}} \quad (20.59)$$

Analiza efectuată mai sus poate fi aplicată la orice combinație de corpuri dintre care cel puțin unul are mișcare de rotație față de un punct fix. Ea poate fi particularizată și în cazul unor ciocniri oblice, cu precizarea că în relația (20.55) se introduc componentele vitezelor după direcția normalei la suprafețele în contact.

Problema 20.2 O bară articulată la o extremitate este lăsată să cadă fără viteză inițială din poziția orizontală; ajungând în poziție verticală ea lovește un corp aflat pe o suprafață orizontală cu frecare. Se cere să se determine unghiul cu care se rotește bara după ciocnire și distanța parcursă de corpul lovit (fig.20.13).

Date: m_1, l, m_2, μ, k ; Cerute: α, d

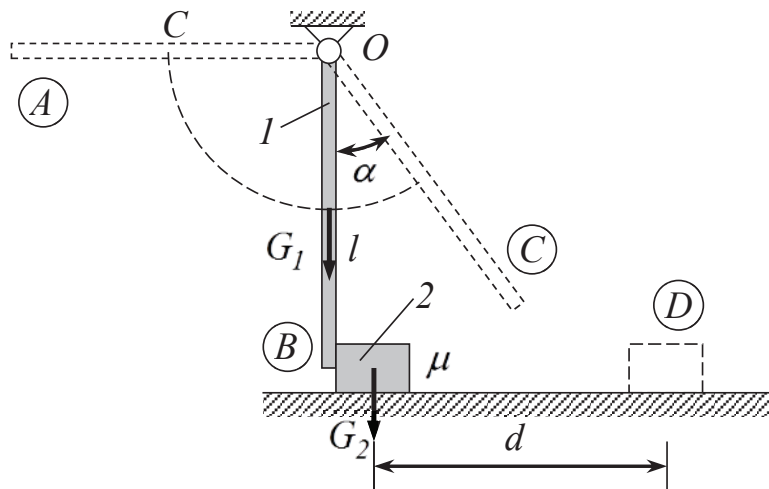


Fig.20.13

Rezolvare: Se aplică teorema energiei cinetice la bara l între pozițiile A și B :

$$E_B - E_A = L_{AB} \quad (20.60)$$

Cu datele problemei, observând că $E_A = 0$ și momentul de inerție al barei față de articulația din punctul O este $J_1 = m_1 l^2 / 3$, se obține:

$$E_B = \frac{1}{2} J_1 \omega_1^2 = \frac{m_1 l^2}{6} \omega_1^2 \quad (20.61)$$

Lucrul mecanic al greutateii barei este:

$$L_{AB} = G_1 \frac{l}{2} = \frac{1}{2} m_1 g l \quad (20.62)$$

Se introduc aceste valori în (20.60) rezultând viteza unghiulară a barei și viteza punctului de impact:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{3g}{l}} \quad (20.63) \quad v_1 = \omega_1 l = \sqrt{3\omega_1 l} \quad (20.64)$$

Relația generală de conservare a momentului cinetic în timpul ciocnirii este:

$$K_O^{(1)} + K_O^{(2)} = K_O^{(1)} + K_O^{(2)} \quad (20.65)$$

Se observă că $v_2 = 0$ și în consecință $K_O^{(2)} = 0$; relația precedentă devine:

$$J_1 \omega_1' + m_2 v_2' l = J_1 \omega_1 \quad (20.66)$$

Cea de a doua relație necesară este:

$$k = \frac{v_2' - v_1'}{v_1 - v_2} = \frac{v_2' - \omega_1' l}{\omega_1 l} \quad (20.67)$$

Rezolvând sistemul format din aceste ecuații se obțin vitezele după ciocnire:

$$\omega_1' = \frac{\omega_1 (J_1 - km_2 l^2)}{J_1 + m_2 l^2} = \frac{m_1 - 3km_2}{m_1 + 3m_2} \omega_1 \quad (20.68)$$

$$v_2' = \frac{J_1 (1+k)}{J_1 + m_2 l^2} \cdot \omega_1 l = \frac{m_1 (1+k)}{m_1 + 3m_2} \cdot \omega_1 l \quad (20.69)$$

Se observă că pentru $m_1 = 3km_2$ bara se oprește iar pentru $m_1 < 3km_2$ bara ricoșează înapoi.

Pentru calculul unghiului α la care bara se oprește se aplică teorema energiei cinetice între pozițiile B și C , observând că $E_C = 0$:

$$E_C - E_B = L_{BC} \rightarrow -\frac{1}{2} J_1 \omega_1'^2 = -m_1 g \frac{l}{2} (1 - \cos \alpha) \quad (20.70)$$

$$\cos \alpha = 1 - \frac{1}{3} \frac{l}{g} \omega_1'^2 \quad (20.71)$$

Pentru calculul distanței d se aplică aceeași teoremă pentru corpul 2 între pozițiile B și D , cu observația că $E_D = 0$:

$$E_D - E_B = L_{BD} \rightarrow -\frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = -\mu m_2 g d \rightarrow d = \frac{1}{2\mu g} v_2'^2 \quad (20.72)$$