CONȚINUTUL

1 INTRODUCERE

1.1 Noțiuni generale

Având în vedere tematica prezentei lucrări, respectiv analiza pozițională, cinematică și dinamică a mecanismelor plane formate pe baza grupelor structurale binare (diade), în cele ce urmează se face o succintă trecere în revistă a principalelor noțiunilor utilizate. O tratare exhaustivă a acestora aparține disciplinei Teoria Mecanismelor și Mașinilor.

Din punctul de vedere al Mecanicii, disciplină importantă a pregătirii generale inginerești, prin *mecanism* se înțelege un sistem de corpuri solide rigide aflate în interacțiune mecanică, sistem care primește, transformă sau transmite o mișcare într-un scop tehnologic bine determinat. La un *mecanism plan* deplasările acestor corpuri se efectuează în același plan sau, în funcție de particularitățile constructive, în plane paralele. În baza definirii din Mecanică corpurile au o *mișcare plan-paralelă*; rotația și translația în plan sunt cazuri particulare ale acesteia.

Corpurile care compun un mecanism sunt legate între ele prin *cuple cinematice*; la mecanismele plane amintite mai sus acestea sunt de tipul *articulație plană (cilindrică)* și *culisă* cu translație rectilinie. Reprezentarea grafică a acestora este prezentată în fig.1.1.

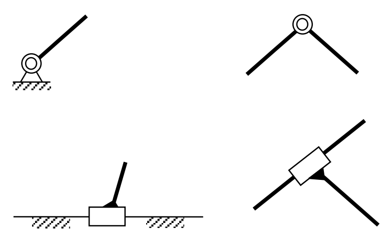


Fig.1.1

Un mecanism este legat prin una sau mai multe cuple cinematice la un suport fix; în cadrul schemei cinematice acesta reprezintă *baza mecanismului*. Din configurația reală a bazei interesează numai pozițiile cuplelor cinematice respective.

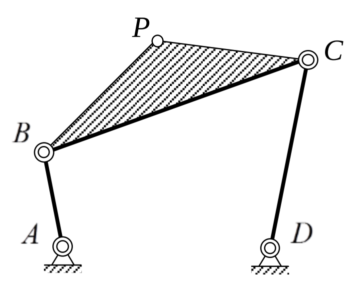


Fig.1.2

Deoarece corpurile pot avea forme constructive diverse, pentru analiza cinematică și dinamică a unui mecanism se poate recurge la o schemă grafică simplificată numită *schemă cinematică*, corespunzătoare din punct de vedere structural și funcțional mecanismului considerat (fig.1.2). În cadrul acestei scheme corpurile reale sunt reprezentate prin linii drepte (analoge barelor rectilinii) care unesc între ele centrele geometrice ale cuplelor cinematice menționate mai sus și, după caz, punctele de interes din configurația corpurilor (altele decât cuplele cinematice). Schema cinematică va fi astfel compusă din *elemente,* fiecare element corespunzând, prin dimensiunile liniare și unghiulare unui corp real.

Elementele succesive din cadrul unei scheme alcătuiesc un *lanț cinematic*. Dacă elementul inițial și cel final sunt legate la bază, se spune că lanțul cinematic este *închis*; dacă numai elementul inițial este legat la bază, lanțul cinematic este *deschis*. Împreună cu baza lanțurile cinematice închise formează mecanisme *monoconture* (cu un singur lanț cinematic) sau *multiconture* (cu mai multe lanțuri cinematice interconectate).

În cadrul lanțurilor cinematice închise se deosebesc *elemente conducătoare* și *elemente conduse*. Elementele conducătoare, de regulă legate la bază, primesc mișcarea de la agentul de acționare și o transmit elementelor conduse. În cazul lanțurilor cinematice deschise elementele componente succesive pot primi mișcări relative unul în raport cu celălalt prin intermediul unor acționări intermediare.

Dacă mișcarea mecanismului are un caracter periodic, în sensul că toate elementele acestuia ajung după un timp în aceeași poziție, perioada respectivă reprezintă un *ciclu cinematic*. Această mișcare este specifică numai mecanismelor cu lanțuri cinematice închise, monoconture sau multiconture.

În faza de regim staționar a funcționării mecanismului, periodicitatea se extinde și asupra vitezelor și accelerațiilor care vor relua aceleași valori. Dacă, de exemplu, mecanismul este acționat printr-o manivelă care se rotește în jurul unei articulații fixe, ciclul cinematic poate corespunde unei rotații complete a acesteia. Se înțelege că în fazele de pornire sau frânare, respectiv accelerare sau încetinire, valorile parametrilor cinematici vor fi diferite de la un ciclu la altul. Mecanismele cu lanț cinematic deschis nu au funcționare ciclică. Acestea se întâlnesc în cazul manipulatoarelor, roboților sau al unor dispozitive asimilate acestora.

1.2 Parametrii mecanismelor

Caracterizarea din punct de vedere funcțional a unui mecanism poate fi făcută printr-o serie de mărimi constante sau variabile, numite generic *parametri*.

– *parametri dimensionali* – mărimi constante provenite din caracteristicile constructive ale fiecărui element, respectiv lungimi și unghiuri fixe precum și coordonatele punctelor de interes în raport cu un sistem de referință local atașat elementului respectiv; pe baza acestora poate fi realizată schema cinematică.

– *parametri poziționali* – mărimi variabile în care sunt incluse coordonatele cuplelor cinematice și ale punctelor de interes într-un sistem de referință fix atașat întregului mecanism, unghiurile de poziție ale elementelor precum și pozițiile culiselor pe suporturile lor de alunecare.

– *parametri cinematici* – mărimi variabile în care se includ vitezele și accelerațiile unghiulare ale elementelor, vitezele și accelerațiile absolute și relative ale cuplelor cinematice și ale punctelor de interes.

În afara acestora se mai utilizează și noțiunea de *parametri unghiulari* în care se includ unghiurile, vitezele unghiulare și accelerațiile unghiulare; aceștia aparțin în general parametrilor poziționali și cinematici menționați mai sus.

Așa cum se cunoaște din Mecanică, numărul *gradelor de libertate* (mobilitate) ale unui sistem de corpuri este egal cu numărul parametrilor poziționali independenți; în cazul mecanismelor plane aceștia aparțin elementelor conducătoare. Dacă elementul conducător este o manivelă, având o mișcare de rotație în jurul unei articulații fixe, parametrul pozițional corespunzător este unghiul ei de poziție; în cazul unei culise care are o translație rectilinie pe un suport fix, parametrul pozițional este distanța acesteia față de un reper de pe suport. Teoretic, pentru fiecare grad de libertate trebuie să existe o acționare independentă.

Mecanismele plane de largă utilizare monoconture și multiconture au în general cel mult două grade de libertate. Funcționarea ciclică este asigurată dacă acestea au un singur grad de libertate sau dacă între cele două elemente conducătoare există un raport de transmitere constant, asigurat de grupul motor de acționare.

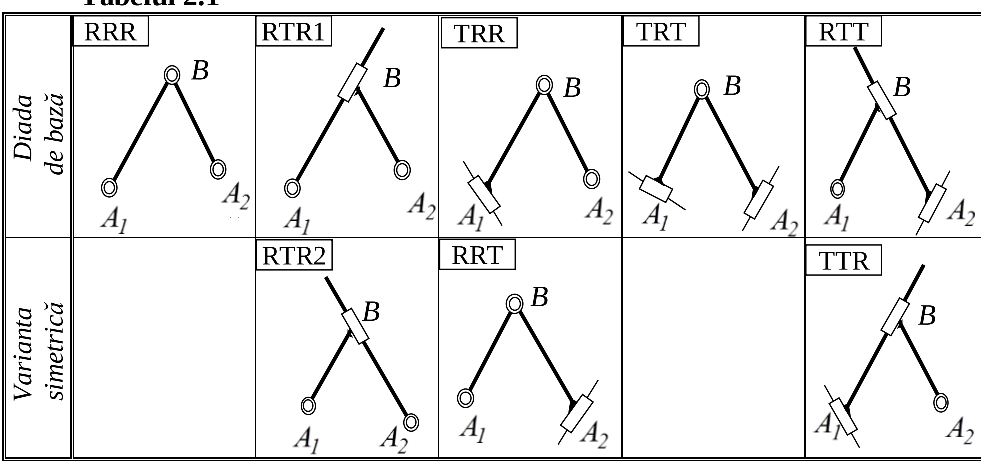
2 STRUCTURA MECANISMELOR PLANE

2.1 Generalități

Mecanismele plane pot avea configurații diverse în corelație cu funcțiile lor tehnologice. Pentru analiza din punct de vedere structural a acestora se utilizează conceptul de *grupă structurală*. O astfel de grupă este formată numai din elemente conduse și are gradul propriu de mobilitate nul; prin imobilizarea cuplelor cinematice exterioare de legătură ale grupei cu elementele conducătoare, grupa în ansamblul ei rămâne fixă. Problema structurii și clasificării mecanismelor plane pe baza conceptului de grupă structurală este tratată pe larg în cadrul disciplinei Teoria Mecanismelor și Mașinilor.

Cea mai simplă grupă structurală este *diada*, formată din două elemente și trei cuple cinematice, articulații și culise (tab.2.1); corespunzător numărului de elemente constituente, diadele mai sunt numite și *grupe structurale binare*.

Tabelul 2.1



Pentru o analiză unitară a diadelor se adoptă în continuare notații unice pentru cuplele cinematice care mărginesc elementele prin literele A_1, B și A_2.

În mod uzual diadele se pot denumi prin tipul cuplelor cinematice exterioare și interioare în succesiunea $A_1 \to B \to A_2$, atribuind litera R articulațiilor și T culiselor. În funcție de combinațiile cuplelor se deosebesc cinci variante de bază (combinația *TTT* nu respectă condiția de imobilitate menționată mai sus). În tab.2.1 au fost introduse și variantele simetrice ale unora dintre diade; deși pentru acestea analiza este asemănătoare cu a celor de bază, ele sunt utile la alcătuirea unor scheme cinematice diferite. În mod asemănător se denumesc și elementele conducătoare.

2.2 Pentalaterele fundamentale și mecanismele monoconture derivate

În cadrul unui mecanism diadele se pot lega prin cuplele cinematice exterioare A_1 și A_2 la două elemente conducătoare ale căror cuple de antrenare sunt de același tip . Împreună cu acestea și cu baza se formează un contur poligonal cu cinci laturi numit *pentalater*. Un astfel de mecanism are două grade de libertate. Importanța studierii pentalaterelor provine din faptul că prin particularizări dimensionale se pot obține schemele cinematice ale majorității mecanismelor uzuale care au un singur grad de libertate, fiind puse în mișcare printr-un sigur grup motor.

Mecanismele pentalatere fundamentale precum și mecanismele monoconture derivate din acestea prin diferite particularizări sunt prezentate detaliat în figurile din tab.2.2. Se indică în continuare câteva aspecte avute în vedere la stabilirea notațiile utilizate.

Indiferent de tipul diadei, pentru sistematizarea calculelor se convine ca toți parametrii dimensionali și unghiulari care se referă la elementul A_1B să poarte indicele *1* iar cei care se referă la elementul A_2B să aibă indicele *2*. Coordonatele, vitezele și accelerațiile vor avea ca indice notația alfanumerică a punctului de interes respectiv.

Unghiurile de poziție α ale elementelor diadelor precum și unghiurile φ ale elementelor conducătoare se măsoară față de direcția pozitivă a axei *x* a sistemului de referință fix. Ele vor fi pozitive în sens trigonometric și negative în sens orar.

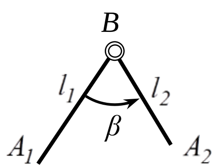


Fig.2.1

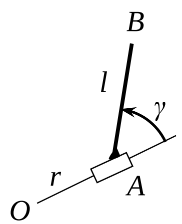


Fig.2.2

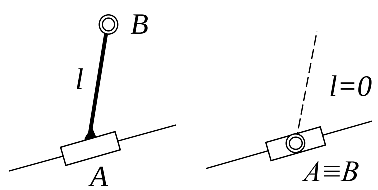


Fig.2.3

Convenția menționată se extinde și asupra unghiurilor dintre elemente. Acestea se vor măsura între direcțiile pozitive ale elementelor, direcții care în majoritatea cazurilor coincid cu axele locale *x* atașate acestora. Pentru o recunoaștere mai comodă se fac câteva precizări. Astfel, unghiul intern β al oricărei diade se măsoară de la elementul A_1B către elementul A_2B (fig.2.1). Unghiurile exterioare γ se măsoară de la suportul translației *OA* către elementul *AB* (fig.2.2). Pentru evitarea unor posibile erori se introduc niște indicatori care vor fi precizați la analiza pozițională a fiecărei diade.

Convenția menționată în ceea ce privește unghiurile se extinde și asupra derivatelor acestora în raport cu timpul, respectiv vitezele și accelerațiile unghiulare.

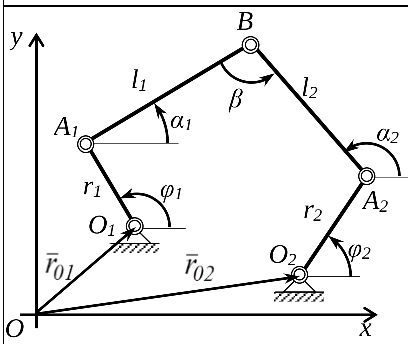
La unele mecanisme lungimea unui element mărginit de două cuple cinematice diferită poate fi nulă, centrele acestora fiind suprapuse (fig2.3).

În tabelul 2.2 sunt prezentate atât schemele cinematice ale pentalaterelor fundamentale cât și cele ale mecanismelor derivate. La toate acestea a fost păstrată manivele principală O_1A_1. În cadrul fiecărei scheme sunt indicate, pe lângă gradul de mobilitate și anumite caracteristici ale parametrilor dimensionali și unghiulari. Astfel:

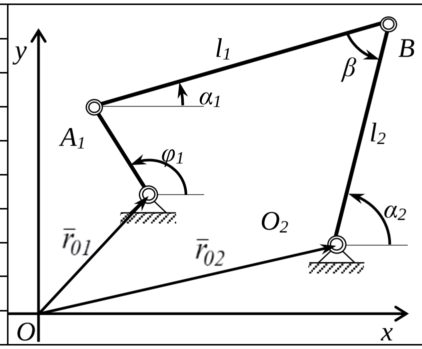
c = parametru constant, face parte din datele dimensionale;
0 = parametru nul, datorită particularizărilor elementelor;
~ = parametru nedeterminat, de regulă se ia egal cu *0*;
x = parametru variabil necunoscut, se determină prin calcul;
– = parametrul nu aparține diadei respective.

Tabelul 2.2

Mecanisme derivate din diada RRR

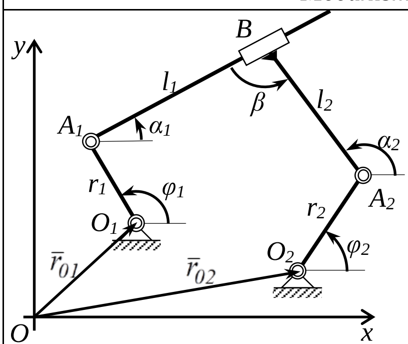


mob	2
r_1	c
r_2	c
l_1	c
l_2	c
α_1	×
α_2	×
β	×
γ_1	–
γ_2	–

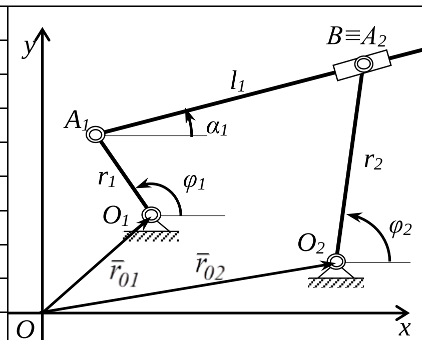


mob	1
r_1	c
r_2	0
l_1	c
l_2	c
α_1	×
α_2	×
β	×
γ_1	–
γ_2	–

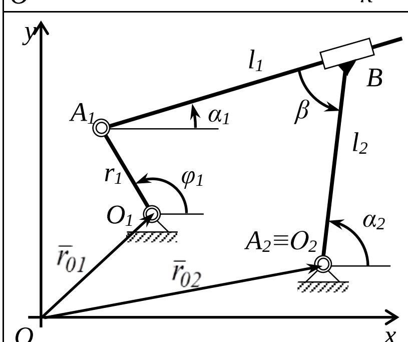
Mecanisme derivate din diada RTR1



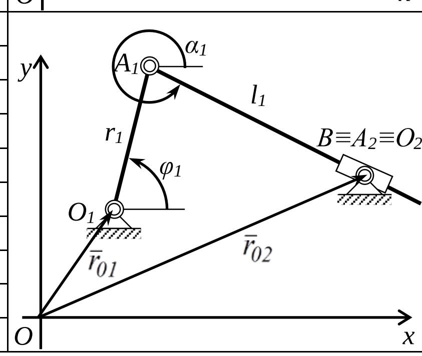
mob	2
r_1	c
r_2	c
l_1	×
l_2	c
α_1	×
α_2	×
β	c
γ_1	–
γ_2	–



mob	2
r_1	c
r_2	c
l_1	×
l_2	0
α_1	×
α_2	~
β	~
γ_1	–
γ_2	–

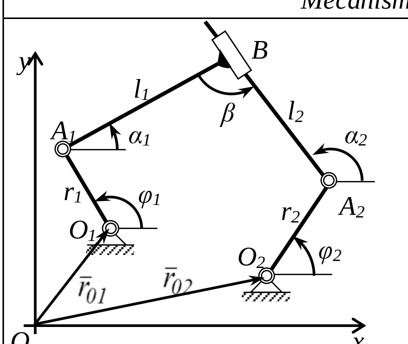


mob	1
r_1	c
r_2	0
l_1	×
l_2	c
α_1	×
α_2	×
β	c
γ_1	–
γ_2	–

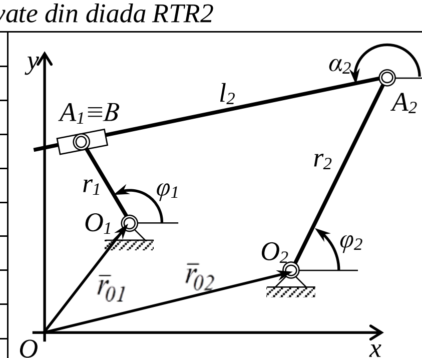


mob	1
r_1	c
r_2	0
l_1	×
l_2	0
α_1	c
α_2	~
β	~
γ_1	–
γ_2	–

Mecanisme derivate din diada RTR2

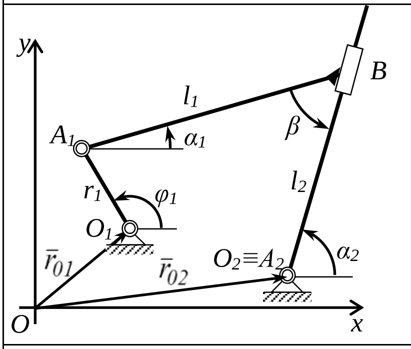
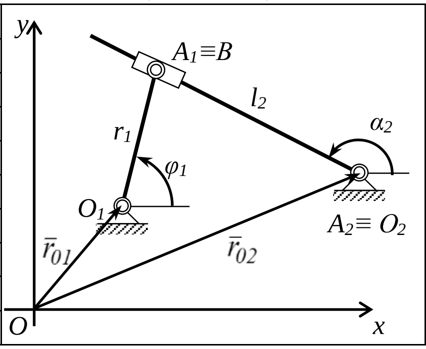
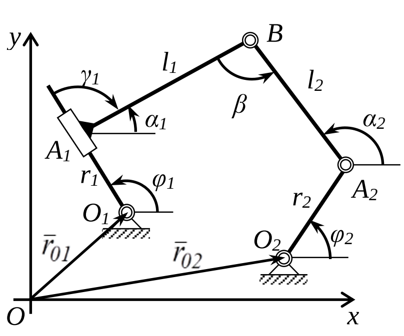
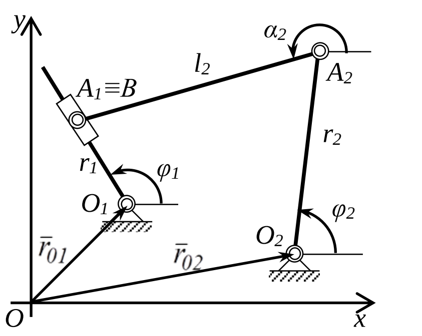
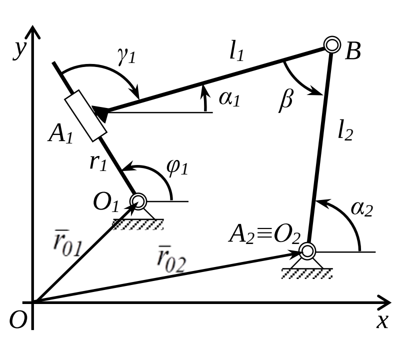
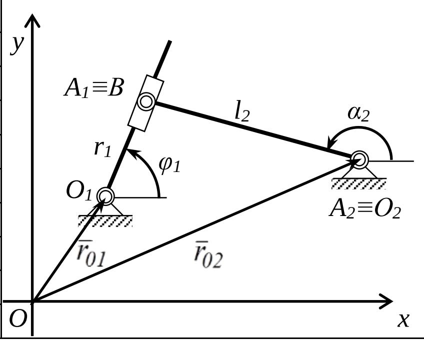
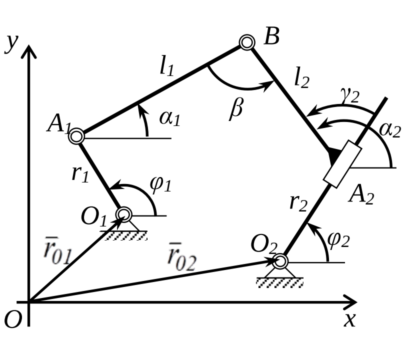
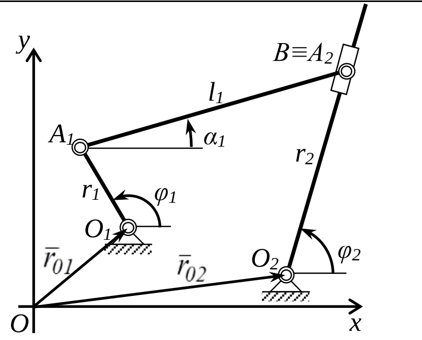


mob	2
r_1	c
r_2	c
l_1	c
l_2	c
α_1	×
α_2	×
β	c
γ_1	–
γ_2	–



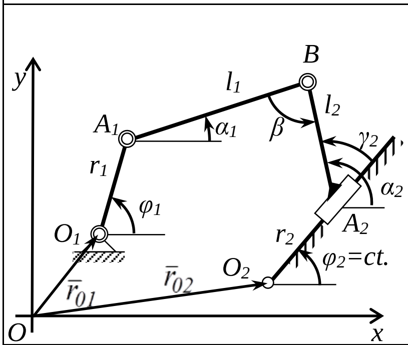
mob	2
r_1	c
r_2	c
l_1	0
l_2	×
α_1	~
α_2	×
β	~
γ_1	–
γ_2	–

Tabelul 2.2 (continuare)

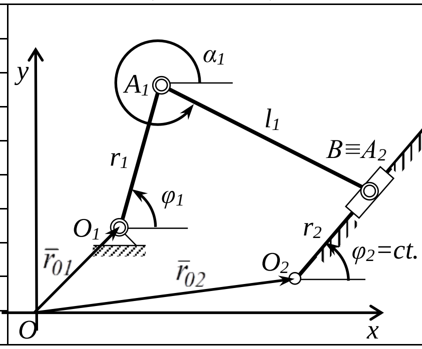
<table>
<tr><td colspan="6">Mecanisme derivate din diada RTR2 (continuare)</td></tr>
<tr><td rowspan="10"></td><td>mob</td><td>1</td><td rowspan="10"></td><td>mob</td><td>1</td></tr>
<tr><td>r_1</td><td>c</td><td>r_1</td><td>c</td></tr>
<tr><td>r_2</td><td>0</td><td>r_2</td><td>0</td></tr>
<tr><td>l_1</td><td>c</td><td>l_1</td><td>0</td></tr>
<tr><td>l_2</td><td>×</td><td>l_2</td><td>×</td></tr>
<tr><td>α_1</td><td>×</td><td>α_1</td><td>~</td></tr>
<tr><td>α_2</td><td>×</td><td>α_2</td><td>×</td></tr>
<tr><td>β</td><td>c</td><td>β</td><td>~</td></tr>
<tr><td>γ_1</td><td>−</td><td>γ_1</td><td>−</td></tr>
<tr><td>γ_2</td><td>−</td><td>γ_2</td><td>−</td></tr>
<tr><td colspan="6">Mecanisme derivate din diada TRR</td></tr>
<tr><td rowspan="10"></td><td>mob</td><td>2</td><td rowspan="10"></td><td>mob</td><td>2</td></tr>
<tr><td>r_1</td><td>×</td><td>r_1</td><td>×</td></tr>
<tr><td>r_2</td><td>c</td><td>r_2</td><td>c</td></tr>
<tr><td>l_1</td><td>c</td><td>l_1</td><td>0</td></tr>
<tr><td>l_2</td><td>c</td><td>l_2</td><td>c</td></tr>
<tr><td>α_1</td><td>×</td><td>α_1</td><td>~</td></tr>
<tr><td>α_2</td><td>×</td><td>α_2</td><td>×</td></tr>
<tr><td>β</td><td>×</td><td>β</td><td>~</td></tr>
<tr><td>γ_1</td><td>c</td><td>γ_1</td><td>~</td></tr>
<tr><td>γ_2</td><td>−</td><td>γ_2</td><td>−</td></tr>
<tr><td rowspan="10"></td><td>mob</td><td>1</td><td rowspan="10"></td><td>mob</td><td>1</td></tr>
<tr><td>r_1</td><td>×</td><td>r_1</td><td>×</td></tr>
<tr><td>r_2</td><td>0</td><td>r_2</td><td>0</td></tr>
<tr><td>l_1</td><td>c</td><td>l_1</td><td>0</td></tr>
<tr><td>l_2</td><td>c</td><td>l_2</td><td>c</td></tr>
<tr><td>α_1</td><td>×</td><td>α_1</td><td>~</td></tr>
<tr><td>α_2</td><td>×</td><td>α_2</td><td>×</td></tr>
<tr><td>β</td><td>×</td><td>β</td><td>~</td></tr>
<tr><td>γ_1</td><td>c</td><td>γ_1</td><td>~</td></tr>
<tr><td>γ_2</td><td>−</td><td>γ_2</td><td>−</td></tr>
<tr><td colspan="6">Mecanisme derivate din diada RRT</td></tr>
<tr><td rowspan="10"></td><td>mob</td><td>2</td><td rowspan="10"></td><td>mob</td><td>2</td></tr>
<tr><td>r_1</td><td>c</td><td>r_1</td><td>c</td></tr>
<tr><td>r_2</td><td>×</td><td>r_2</td><td>×</td></tr>
<tr><td>l_1</td><td>c</td><td>l_1</td><td>c</td></tr>
<tr><td>l_2</td><td>c</td><td>l_2</td><td>0</td></tr>
<tr><td>α_1</td><td>×</td><td>α_1</td><td>×</td></tr>
<tr><td>α_2</td><td>×</td><td>α_2</td><td>~</td></tr>
<tr><td>β</td><td>×</td><td>β</td><td>~</td></tr>
<tr><td>γ_1</td><td>−</td><td>γ_1</td><td>−</td></tr>
<tr><td>γ_2</td><td>c</td><td>γ_2</td><td>~</td></tr>
</table>

Tabelul 2.2 (continuare)

Mecanisme derivate din diada RRT (continuare)

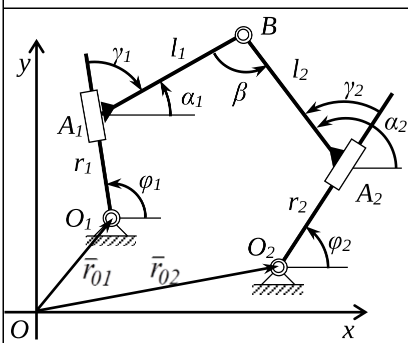


mob	1
r_1	c
r_2	×
l_1	c
l_2	c
α_1	×
α_2	c
β	×
γ_1	−
γ_2	c

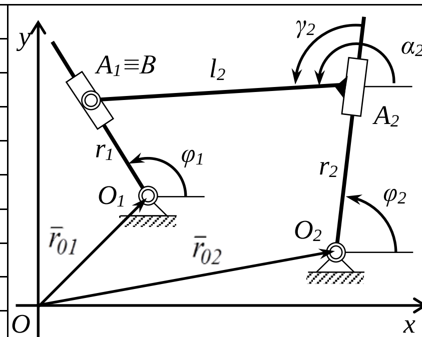


mob	1
r_1	c
r_2	×
l_1	c
l_2	0
α_1	×
α_2	~
β	~
γ_1	−
γ_2	~

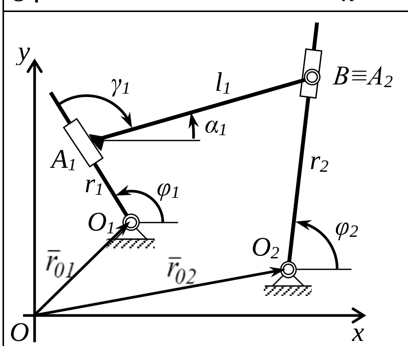
Mecanisme derivate din diada TRT



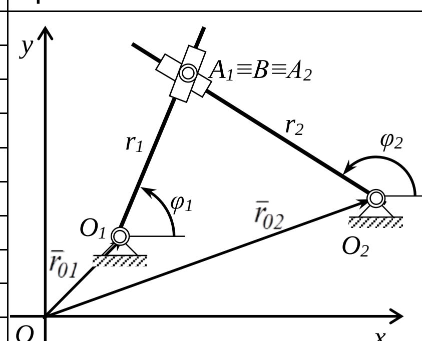
mob	2
r_1	×
r_2	×
l_1	c
l_2	c
α_1	×
α_2	×
β	×
γ_1	c
γ_2	c



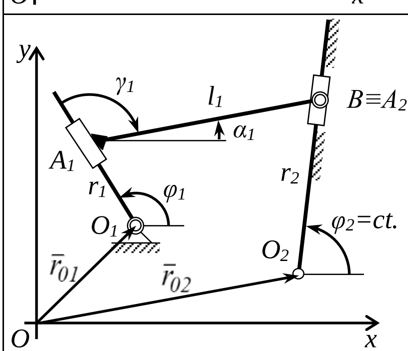
mob	2
r_1	×
r_2	×
l_1	0
l_2	c
α_1	~
α_2	×
β	~
γ_1	~
γ_2	c



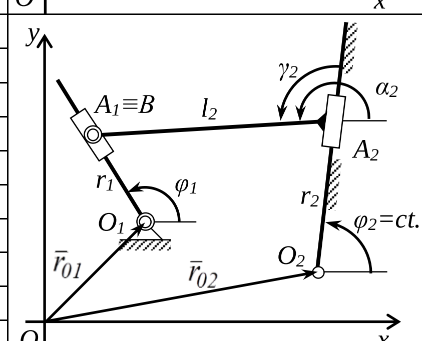
mob	2
r_1	×
r_2	×
l_1	c
l_2	0
α_1	~
α_2	~
β	~
γ_1	c
γ_2	~



mob	c
r_1	×
r_2	×
l_1	0
l_2	0
α_1	~
α_2	~
β	~
γ_1	~
γ_2	~



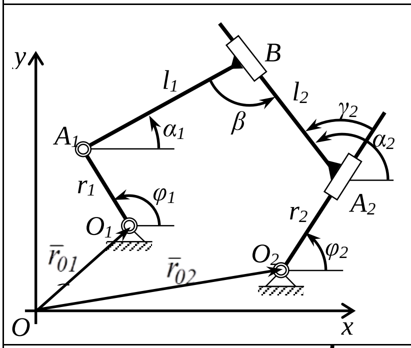
mob	1
r_1	×
r_2	×
l_1	c
l_2	0
α_1	×
α_2	~
β	~
γ_1	c
γ_2	~



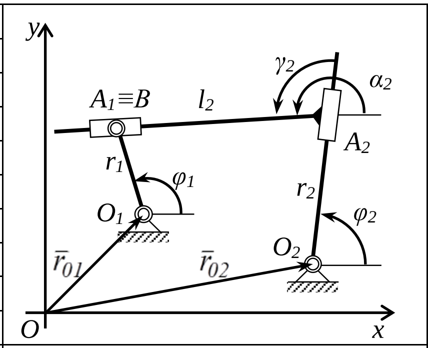
mob	1
r_1	×
r_2	×
l_1	0
l_2	c
α_1	~
α_2	×
β	~
γ_1	~
γ_2	c

Tabelul 2.2 (continuare)

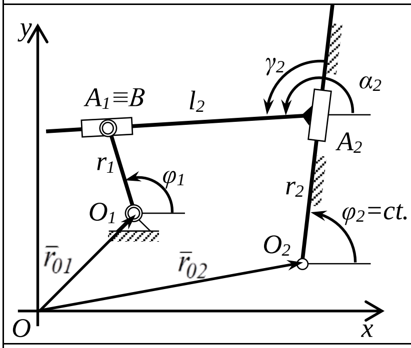
Mecanisme derivate din diada RTT



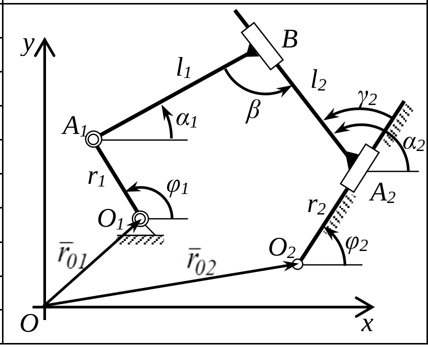
mob	r_1	r_2	l_1	l_2	α_1	α_2	β	γ_1	γ_2
2	c	×	c	×	×	×	c	–	c



mob	r_1	r_2	l_1	l_2	α_1	α_2	β	γ_1	γ_2
2	c	×	0	×	~	×	~	–	c

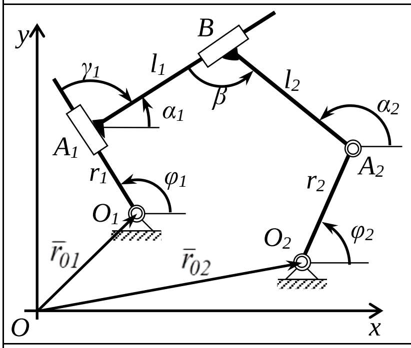


mob	r_1	r_2	l_1	l_2	α_1	α_2	β	γ_1	γ_2
1	c	×	0	×	~	×	~	–	c

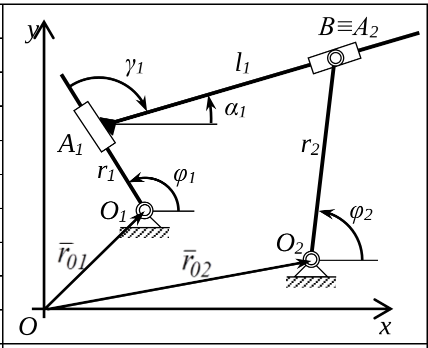


mob	r_1	r_2	l_1	l_2	α_1	α_2	β	γ_1	γ_2
1	c	×	c	×	×	×	c	–	c

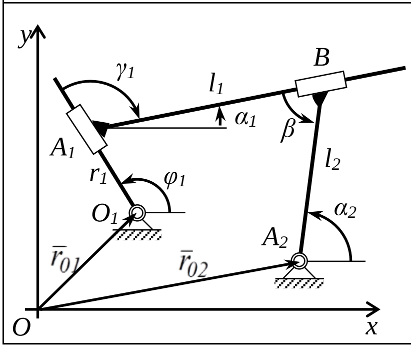
Mecanisme derivate din diada TTR



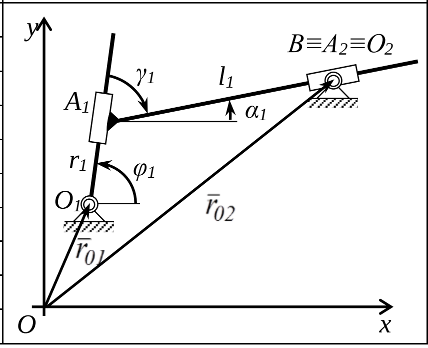
mob	r_1	r_2	l_1	l_2	α_1	α_2	β	γ_1	γ_2
2	×	c	×	c	×	×	c	c	–



mob	r_1	r_2	l_1	l_2	α_1	α_2	β	γ_1	γ_2
2	×	c	×	0	×	~	~	c	–



mob	r_1	r_2	l_1	l_2	α_1	α_2	β	γ_1	γ_2
1	×	0	×	c	×	×	c	c	–



mob	r_1	r_2	l_1	l_2	α_1	α_2	β	γ_1	γ_2
1	×	0	×	0	×	~	~	c	–

3 METODA ANALITICĂ ÎN STUDIUL MECANISMELOR PLANE

3.1 Generalităţi asupra metodei

Metoda analitică dezvoltată pentru calculul cinematic al sistemelor de corpuri cu mişcare plan-paralelă, aplicabilă în special la studiul mecanismelor plane, a fost expusă pe larg în cap.10.4.5 din partea de Mecanică. În cele ce urmează se face o succintă expunere a metodei, accentuându-se aspectele de sistematizare indispensabile la stabilirea unor algoritme de calcul programabile.

Pentru mecanismul analizat se alege un sistem de referinţă plan general, numit în continuare *sistemul fix*; baza mecanismului este conținută în acest sistem. În cele mai multe cazuri, axele acestui sistem au direcțiile naturale orizontală și respectiv verticală.

Fiecărui element din configuraţia mecanismului i se ataşează câte un sistem de referinţă plan, mobil împreună cu elementul, numit în continuare *sistemul local*. De regulă originea unui sistem local se alege într-una din cuplele cinematice ale elementului respectiv iar axa x se suprapune direcţiei acestuia; coordonatelor sistemelor locale li se atașează numarul de ordine al elementului respectiv. În funcție de context, pentru necesitățile calculului pozițional-cinematic, elementele pot fi tratate ca vectori în planul fix sau mobil.

Se reamintește din Mecanică că în cadrul mișcării plan-paralele parametrii poziționali și cinematici, respectiv vectorul de poziție, viteza și accelerația sunt vectori conținuți în planul mișcării; proiecțiile acestora pe axele unui sistem de coordonate local sau fix sunt mărimi scalare pozitive sau negative în raport sensurile stabilite pentru aceste axe.

Toate unghiurile de poziție ale elementelor se măsoară față de axa x a sistemului de referință fix, ele sunt pozitive în sens trigonometric și negative în sens orar. Aceeași regulă privind sensul se aplică și unghiurilor fixe (cu precizările făcute în cap.2.2 pentru unghiurile β *și* γ. Sensul trigonometric se aplică și unghiurilor variabile dintre două elemente vecine.

Parametrii cinematici unghiulari, respectiv vitezele și accelerațiile unghiulare sunt vectori perpendiculari pe planul mișcării. Scalarii acestora vor fi pozitivi în dacă acestea acționează deasemenea în sens trigonometric. Aceste convenţii de semne permit o corectă interpretare a rezultatelor obţinute din calcule atât pentru unghiuri cât și pentru vitezele și accelerațiile unghiulare.

În cadrul metodei analitice utilizate relaţiile vectoriale cunoscute pentru determinarea poziţiilor, vitezelor şi acceleraţiilor se transpun mai întâi într-o formă matriceală din care se obţin în continuare sistemele de ecuaţii scalare necesare la stabilirea algoritmelor de calcul programabile. Prin algoritm de calcul se înțelege și în acest caz un complex de relații pentru determinarea parametrilor cinematici, dispuse în succesiunea logică a efectuării calculelor. Nu se includ în aceste algoritme relațiile intermediare care servesc la stabilirea relațiilor menționate. Un algoritmul servește de regulă la alcătuirea programului de calculator în oricare din limbajele de programare uzuale.

Principalul avantaj al sistematizării propuse provine din similitudinea relaţiilor matriceale pentru poziţii, viteze şi acceleraţii şi în comoditatea obţinerii sistemelor de ecuaţii scalare din aceste relaţii.

3.2 Analiza poziţională

Mişcarea plan-paralelă a unui element se consideră compusă dintr-o translaţie cu parametrii cinematici ai originii sistemului local, simultană cu o rotaţie în jurul acesteia. Pentru claritate se consideră necesară prezentarea unor aspecte de detaliu specifice metodei analitice, mai ușor de urmărit în cadrul analizei poziționale.

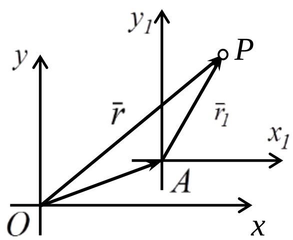


Fig.3.1

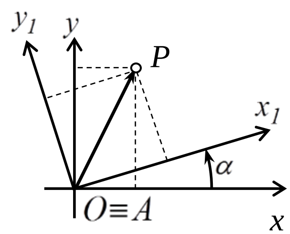


Fig.3.2

Se consideră un sistem fix Oxy și unul local Ax_1y_1. Dacă sistemul local este translatat față de cel fix (fig.3.1), între vectorii de poziție ai unui punct oarecare P există relația:

$$\bar{r} = \bar{r}_A + \bar{r}_1 \tag{3.1}$$

care se traduce prin relațiile între coordonate:

$$x = x_A + x_1 \qquad y = y_A + y_1 \tag{3.2}$$

Aceste relații pot fi puse sub forma matriceală:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_A + x_1 \\ y_A + y_1 \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

Dacă sistemul local este rotit cu un unghi α față de cel fix (fig.3.2), între cele două perechi de coordonate există relațiile:

$$\begin{cases} x = x_1 \cos\alpha - y_1 \sin\alpha \\ y = x_1 \sin\alpha + y_1 \cos\alpha \end{cases} \quad (3.4) \qquad \begin{cases} x_1 = x\cos\alpha + y\sin\alpha \\ y_1 = -x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{cases} \quad (3.5)$$

cărora le corespund relațiile matriceale:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \quad (3.6) \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

În relația (3.7) matricea de rotație este transpusa celei din relația (3.6).

Pentru un element oarecare AB de lungime l din schema cinematică a unui mecanism, sistemul de referință local se alege cu originea în articulația A și cu axa x_1 suprapusă direcției AB (fig.3.3). În cazul general în care elementul execută o mișcare plan-paralelă, se combină relațiile de mai sus, corespunzătoare celor două mișcări elementare, respectiv translația și rotația.

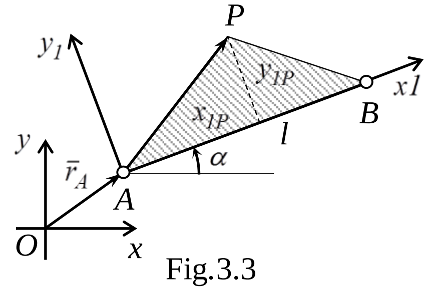


Fig.3.3

Se deduc mai întâi relațiile vectoriale și, pe baza acestora, relațiile matriceale; din dezvoltarea acestora se obțin în continuare ecuațiile scalare aplicând regulile specifice operațiunilor cu matrice.

Pentru un punct de interes P se poate scrie relația vectorială:

$$\bar{r}_P = \bar{r}_A + \overline{AP} \tag{3.8}$$

cu dezvoltarea matriceală:

$$\begin{bmatrix} x_P \\ y_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{1P} \\ y_{1P} \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

Din această expresie se deduce sistemul de ecuaţii scalare:

$$\begin{cases} x_P = x_A + x_{1P}\cos\alpha - y_{1P}\sin\alpha \\ y_P = y_A + x_{1P}\sin\alpha + y_{1P}\cos\alpha \end{cases} \tag{3.10}$$

Pentru punctul B, aflat pe axa locală x_1, relaţiile de mai sus se particularizează în modul următor:

$$\begin{bmatrix} x_B \\ y_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} l \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.11}$$

$$\begin{cases} x_B = x_A + l\cos\alpha \\ y_B = y_A + l\sin\alpha \end{cases} \tag{3.12}$$

3.3 Analiza vitezelor

Viteza punctului P este definită vectorial printr-o relaţia de tip Euler pentru viteze în mişcarea plan-paralelă:

$$\bar{v}_P = \bar{v}_A + \bar{v}_{PA} \tag{3.13}$$

Proiecţiile pe axele locale ale vitezei $\bar{v}_{PA}$ (fig.3.4) se calculează cu relaţiile cunoscute din mişcarea circulară:

$$\begin{cases} v_{x1} = -y_{1P}\,\omega_1 \\ v_{y1} = x_{1P}\,\omega_1 \end{cases} \tag{3.14}$$

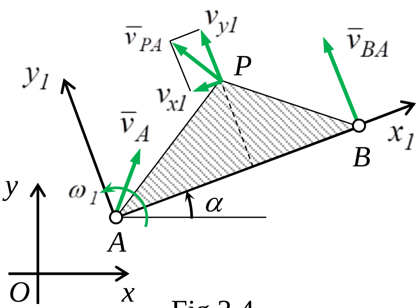


Fig.3.4

Relaţia (3.13) se transpune sub forma matriceală:

$$\begin{bmatrix} v_{Px} \\ v_{Py} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{Ax} \\ v_{Ay} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_{x1} \\ v_{y1} \end{bmatrix} \tag{3.15}$$

Din aceasta se deduc ecuaţiile scalare pentru proiecţiile pe axele sistemului fix:

$$\begin{cases} v_{Px} = v_{Ax} + v_{x1}\cos\alpha - v_{y1}\sin\alpha \\ v_{Py} = v_{Ay} + v_{x1}\sin\alpha + v_{y1}\cos\alpha \end{cases} \tag{3.16}$$

Viteza punctului B se calculează asemănător, observând însă că $\bar{v}_{BA}$ este paralelă cu y_1 şi are mărimea:

$$v_{BA} = l\omega_1 \tag{3.17}$$

$$\begin{bmatrix} v_{Bx} \\ v_{By} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{Ax} \\ v_{Ay} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ v_{BA} \end{bmatrix} \tag{3.18}$$

$$\begin{cases} v_{Bx} = v_{Ax} - v_{BA} \sin\alpha \\ v_{By} = v_{Ay} + v_{BA} \cos\alpha \end{cases} \tag{3.19}$$

3.4 Analiza acceleraţiilor

Pentru acceleraţia punctului P este utilizată o relaţie vectorială de tip Euler pentru acceleraţii în mişcarea plan-paralelă, respectiv:

$$\bar{a}_P = \bar{a}_A + \bar{a}_{PA} \tag{3.20}$$

Ca şi la viteze, acceleraţia $\bar{a}_{PA}$ (fig.3.5) are proiecţiile pe axele locale date de relaţiile specifice mişcării circulare:

$$\begin{cases} a_{x1} = -x_{1P}\,\omega_1^2 - y_{1P}\varepsilon_1 \\ a_{y1} = -y_{1P}\,\omega_1^2 + x_{1P}\,\varepsilon_1 \end{cases} \tag{3.21}$$

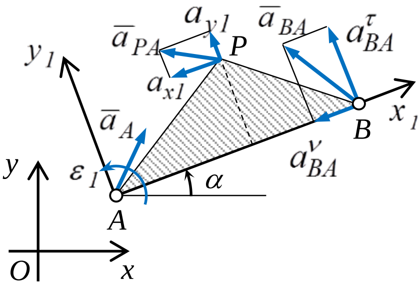


Fig.3.5

Relaţia matriceală corespunzătoare expresiei (3.20) este:

$$\begin{bmatrix} a_{Px} \\ a_{Py} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{Ax} \\ a_{Ay} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{x1} \\ a_{y1} \end{bmatrix} \tag{3.22}$$

Se deduc din aceasta relaţiile scalare pentru proiecţiile acceleraţiilor pe axele sistemului fix:

$$\begin{cases} a_{Px} = a_{Ax} + a_{x1}\cos\alpha - a_{y1}\sin\alpha \\ a_{Py} = a_{Ay} + a_{x1}\sin\alpha + a_{y1}\cos\alpha \end{cases} \tag{3.23}$$

Pentru acceleraţia punctului B se poate utiliza o relaţie vectorială mai detaliată:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA} = \bar{a}_A + \bar{a}^{\nu}_{BA} + \bar{a}^{\tau}_{BA} \tag{3.24}$$

Componenetele normală şi tangenţială ale acceleraţiei $\bar{a}_{BA}$ au direcţiile axelor locale şi se calculează cu relaţiile:

$$a^{\nu}_{BA} = -l\,\omega_1^2 \qquad a^{\tau}_{BA} = l\,\varepsilon_1 \tag{3.25}$$

Se deduc în continuare relaţia matriceală:

$$\begin{bmatrix} a_{Bx} \\ a_{By} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{Ax} \\ a_{Ay} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a^{\nu}_{BA} \\ a^{\tau}_{BA} \end{bmatrix} \tag{3.26}$$

şi ecuaţiile scalare provenite din aceasta:

$$\begin{cases} a_{Bx} = a_{Ax} + a^{\nu}_{BA}\cos\alpha - a^{\tau}_{BA}\sin\alpha \\ a_{By} = a_{Ay} + a^{\nu}_{BA}\sin\alpha + a^{\tau}_{BA}\cos\alpha \end{cases} \tag{3.27}$$

3.5 Mişcări compuse

Se consideră un punct de interes mobil atât în raport cu sistemul fix cât şi cu sistemul local. Faţă de sistemul fix el are o *mişcare absolută* iar faţă de cel local o *mişcare relativă*; pentru acest punct sistemul local efectuează în raport cu cel fix o *mişcare de transport*. Mişcarea absolută reprezintă o compunere a mişcării relative cu cea de transport. Cazul frecvent în analiza mecanismelor este cel în care o culisă se deplasează pe un suport din configuraţia unui element mobil.

Pentru poziţia culisei C (fig.3.6) sunt valabile relaţii de forma celor stabilite în cap.3.2 pentru punctul B cu precizarea că lungimea AC va fi necunoscută.

$$\begin{cases} x_C = x_A + AC\cos\alpha \\ y_C = y_A + AC\sin\alpha \end{cases} \tag{3.28}$$

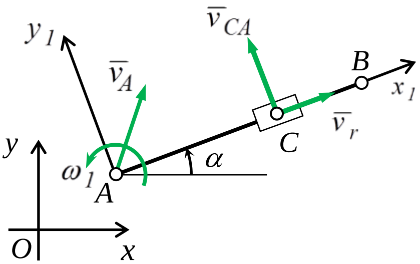


Fig.3.6

Pentru viteza culisei există relaţia specifică mişcărilor compuse:

$$\bar{v}_C \equiv \bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_t \tag{3.29}$$

în care $\bar{v}_a$ este viteza absolută faţă de sistemul fix, $\bar{v}_r$ este viteza relativă faţă de sistemul local (în cazul de faţă este coliniară cu direcţia barei); $\bar{v}_t$ este viteza de transport, respectiv viteza punctului de pe bară în care se află culisa:

$$\bar{v}_t = \bar{v}_A + \bar{v}_{CA} \tag{3.30}$$

în care viteza locală a punctului C de pe elementul AB este:

$$v_{CA} = AC\omega_1 \tag{3.31}$$

Viteza absolută a culisei devine:

$$\bar{v}_C = \bar{v}_A + \bar{v}_{CA} + \bar{v}_r \tag{3.32}$$

Din această relaţie se deduc ecuaţiile matriceală şi cele scalare:

$$\begin{bmatrix} v_{Cx} \\ v_{Cy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{Ax} \\ v_{Ay} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_r \\ v_{CA} \end{bmatrix} \tag{3.33}$$

$$\begin{cases} v_{Cx} = v_{Ax} + v_r\cos\alpha - v_{CA}\sin\alpha \\ v_{Cy} = v_{Ay} + v_r\sin\alpha + v_{CA}\cos\alpha \end{cases} \tag{3.34}$$

Pentru acceleraţia culisei C relaţia specifică mişcărilor compuse este:

$$\bar{a}_C \equiv \bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_t + \bar{a}_{cor} \tag{3.35}$$

În această relaţie $\bar{a}_a$ reprezintă acceleraţia absolută, $\bar{a}_r$ este acceleraţia relativă (coliniară cu bara), $\bar{a}_t$ este acceleraţia de transport iar $\bar{a}_{cor}$ este acceleraţia complementară a lui Coriolis.

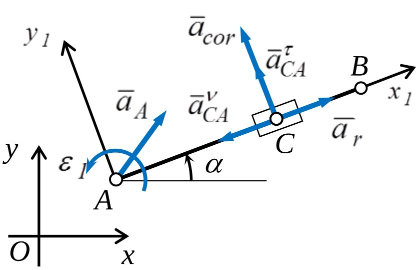


Fig3.7

Pentru acceleraţia de transport se poate scrie relaţia vectorială:

$$\bar{a}_t = \bar{a}_A + \bar{a}_{CA} = \bar{a}_A + \bar{a}_{CA}^{\nu} + \bar{a}_{CA}^{\tau} \tag{3.36}$$

în care componentele acceleraţiei locale sunt:

$$a_{CA}^{\nu} = -AC\omega_1^2 \qquad a_{CA}^{\tau} = AC\varepsilon_1 \tag{3.37}$$

Componenta normală are direcţia elementului şi sensul de la C către A; componenta tangenţială este perpendiculară pe acesta, sensul ei fiind dat de acceleraţia unghiulară. Pentru acceleraţia Coriolis relaţiile corespunzătoare sunt:

$$\bar{a}_{cor} = 2\bar{\omega}_t \times \bar{v}_r \quad (3.38) \qquad a_{cor} = 2\omega_1 v_r \quad (3.39)$$

în care $\omega_t \equiv \omega_1$ este viteza unghiulară a mişcării de transport.

Dacă v_r şi ω_t sunt pozitive, atunci această acceleraţie are direcţia şi sensul axei locale Ay_1. Cu detalierile de mai sus, ilustrate în fig.3.7, relaţia (3.35) devine:

$$\bar{a}_C = \bar{a}_A + (\bar{a}_{CA}^{\nu} + \bar{a}_r) + (\bar{a}_{CA}^{\tau} + \bar{a}_{cor}) \tag{3.40}$$

Din forma matriceală echivalentă:

$$\begin{bmatrix} a_{Cx} \\ a_{Cy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{Ax} \\ a_{Ay} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{CA}^{\nu} + a_r \\ a_{CA}^{\tau} + a_{cor} \end{bmatrix} \tag{3.41}$$

se obţin în continuare relaţiile scalare:

$$\begin{cases} a_{Cx} = a_{Ax} + (a_{CA}^{\nu} + a_r)\cos\alpha - (a_{CA}^{\tau} + a_{cor})\sin\alpha \\ a_{Cy} = a_{Ay} + (a_{CA}^{\nu} + a_r)\sin\alpha + (a_{CA}^{\tau} + a_{cor})\cos\alpha \end{cases} \tag{3.42}$$

3.6 Mişcări compuse pe suport dezaxat

Analiza precedentă poate fi extinsă pentru cazul mai general în care suportul culisei C nu trece prin punctul A. În această situație este convenabil ca axa x_1 a sistemului de referință local să fie paralelă cu suportul translației (fig.3.8). Poziția locală a culisei C, respectiv coordonatele x_{1C}, y_{1C}, se determină în cadrul analizei poziționale a grupei structurale din care face parte elementul AB.

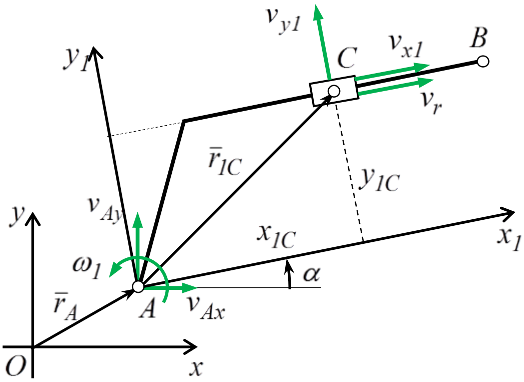


Fig.3.8

La nivel vectorial poziția culisei în sistemul de referință fix este dată de relația:

$$\bar{r}_C = \bar{r}_A + \bar{r}_{1C} \tag{3.43}$$

Relația matriceală corespunzătoare este:

$$\begin{bmatrix} x_C \\ y_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{1C} \\ y_{1C} \end{bmatrix} \tag{3.44}$$

din care se deduc relațiile scalare:

$$\begin{cases} x_C = x_A + x_{1C}\cos\alpha - y_{1C}\sin\alpha \\ y_C = y_A + x_{1C}\sin\alpha + y_{1C}\cos\alpha \end{cases} \tag{3.45}$$

Viteza absolută a culisei C este dată de relația generală:

$$\bar{v}_C = \bar{v}_t + \bar{v}_r \tag{3.46}$$

Viteza relativă $\bar{v}_r$ se determină în cadrul analizei vitezelor de la grupa structurală menționată. Pentru viteza de transport $\bar{v}_t$ relația vectorială este:

$$\bar{v}_t = \bar{v}_A + \bar{v}_{CA} \tag{3.47}$$

Pentru proiecțiile pe axele locale ale vitezei $\bar{v}_{CA}$, reprezentate în fig.3.8 în sensurile pozitive, se utilizează relațiile cunoscute din mișcarea circulară :

$$\begin{cases} v_{x1} = -y_{1C}\,\omega_1 \\ v_{y1} = x_{1C}\,\omega_1 \end{cases} \tag{3.48}$$

Cu aceste precizări, relația vectorială pentru viteza absolută a culisei:

$$\bar{v}_C = \bar{v}_A + \bar{v}_{CA} + \bar{v}_r \tag{3.49}$$

ia forma matriceală:

$$\begin{bmatrix} v_{Cx} \\ v_{Cy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{Ax} \\ v_{Ay} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_{x1} + v_r \\ v_{y1} \end{bmatrix} \tag{3.50}$$

din care se deduc ecuațiile scalare:

$$\begin{cases} v_{Cx} = v_{Ax} + (v_{x1} + v_r)\cos\alpha - v_{y1}\sin\alpha \\ v_{Cy} = v_{Ay} + (v_{x1} + v_r)\sin\alpha + v_{y1}\cos\alpha \end{cases} \tag{3.51}$$

Accelerația absolută a culisei C are forma vectorială generală:

$$\bar{a}_C = \bar{a}_r + \bar{a}_t + \bar{a}_{cor} \tag{3.52}$$

Și în acest caz accelerația relativă $\bar{a}_r$ se determină în cadrul analizei accelerațiilor la grupa structurală respectivă. Pentru accelerația complementară Coriolis sunt valabile relațiile:

$$\bar{a}_{cor} = 2\,\bar{\omega}_t \times \bar{v}_r \tag{3.53}$$

$$a_{cor} = 2\,\omega_1\, v_r \tag{3.54}$$

Direcția ei este perpendiculară pe suportul translației.

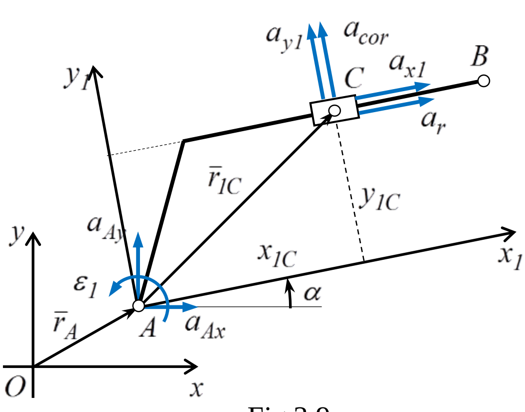


Fig.3.9

Accelerația de transport $\bar{a}_t$ este definită la nivel vectorial prin relația:

$$\bar{a}_t = \bar{a}_A + \bar{a}_{CA} \tag{3.55}$$

Ca și în cazul vitezelor, pentru proiecțiile pe axele locale ale accelerației $\bar{a}_{CA}$, reprezentate în fig.3.9 în sensurile lor considerate pozitive, se utilizează relațiile cunoscute din mișcarea circulară:

$$\begin{cases} a_{x1} = -x_{1C}\,\omega_1^2 - y_{1C}\varepsilon_1 \\ a_{y1} = -y_{1C}\,\omega_1^2 + x_{1C}\,\varepsilon_1 \end{cases} \tag{3.56}$$

În final, accelerația absolută a culisei C are forma vectorială:

$$\bar{a}_C = \bar{a}_A + \bar{a}_{CA} + \bar{a}_r + \bar{a}_{cor} \tag{3.57}$$

Din dezvoltarea matriceală a acesteia:

$$\begin{bmatrix} a_{Cx} \\ a_{Cy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{Ax} \\ a_{Ay} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{x1} + a_r \\ a_{y1} + a_{cor} \end{bmatrix} \tag{3.58}$$

se obțin ecuațiile scalare ale proiecțiilor accelerației absolute pe axele sistemului de referință fix:

$$\begin{cases} a_{Cx} = a_{Ax} + (a_{x1} + a_r)\cos\alpha - (a_{y1} + a_{cor})\sin\alpha \\ a_{Cy} = a_{Ay} + (a_{x1} + a_r)\sin\alpha + (a_{y1} + a_{cor})\cos\alpha \end{cases} \tag{3.59}$$

Se poate pune în evidență observația că situația în care suportul culisei trece prin punctul *A* este un caz particular al celui în care există dezaxarea. Dacă se alege $y_{1C} = 0$ și $x_{1C} = AC$ se regăsesc aceleași relații de calcul, ușor adaptate.

3.7 Particularități de calcul matriceal

În unele etape ale utilizării metodei analitice în analiza cinematică a diadelor, datorită complexității unor relații corespunzătoare mai ales mișcărilor relative ale elementelor, se consideră utilă introducerea relațiilor matriceale sub formă simbolică drept alternativă la relațiile scalare excesiv de lungi. Această procedeu poate fi și în avantajul unei programări mai comode a algoritmelor de calcul utilizând acele medii de programare care operează cu matrice (de exemplu MATLAB).

Din prezentarea metodei analitice utilizate, expusă în subcapitolele precedente, se observă că toate relațiile conțin proiecții ale mărimilor vectoriale în sistemul de referință fix *Oxy*. Fiecărui vector din plan i se poate atașa o matrice coloană cu două elemnte care sunt tocmai proiecțiile menționate. Nu întâmplător în mod curent această matrice poartă deasemenea denumirea de *vector*.

Așa cum s-a procedat și în parta de Mecanică, se convine ca simbolizarea unei matrice să se facă prin caractere aldine (îngroșate – “**bold**”); acest mod de simbolizare se regăsește și la editoarele de texte de utilizare curentă. Încadrarea elementelor matricei se face prin paranteze drepte.

Într-un sistem de referință fix, pentru vectorul de poziție $\bar{r}$, pentru viteza $\bar{v}$ și accelerația $\bar{a}$ a unui punct oarecare, simbolizarea și conținutul au în general formele următoare:

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} \qquad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix} \tag{3.60}$$

Într-un sistem de referință mobil numerotat cu *1*, aceste mărimi vor fi:

$$\mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} v_{x1} \\ v_{y1} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} a_{x1} \\ a_{y1} \end{bmatrix} \tag{3.61}$$

Relațiile de calcul pentru vitezele locale sunt date în relațiile (3.14) iar pentru accelerații în relațiile (3.21).

Așa cum s-a arătat în cap.3.2, transformarea acestor mărimi din sistemul mobil în cel fix se face cu ajutorul unei matrice de rotație corespunzătoare unghiului dintre axele *x* ale celor două sisteme. Pentru un unghi α, matricea de rotație are forma:

$$\mathbf{rot}_\alpha = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \tag{3.62}$$

Transformarea se face înmulțind la stânga vectorii locali cu matricea de rotație:

$$\mathbf{r} = \mathbf{rot}_\alpha \cdot \mathbf{r}_1 \qquad \mathbf{v} = \mathbf{rot}_\alpha \cdot \mathbf{v}_1 \qquad \mathbf{a} = \mathbf{rot}_\alpha \cdot \mathbf{a}_1 \tag{3.63}$$

Întrucât în analiza diadelor intervine poziția, viteza și accelerația punctului central B dintre elemente, se consideră necesară reluarea din subcapitolele precedente, a unor detalii specifice. În sistemul de referință local, atașat unuia sau altuia dintre elemente, poziția punctului B va coincide cu lungimea activă a elementului. Dacă în B se află o articulație, poziția, viteza și accelerația în raport cu originea A a sistemului mobil au formele matriceale:

$$\mathbf{r}_{1B} = \begin{bmatrix} l \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v}_{1B} = \begin{bmatrix} 0 \\ v_B \end{bmatrix} \qquad \mathbf{a}_{1B} = \begin{bmatrix} a_{Bt}^{\nu} \\ a_{Bt}^{\tau} \end{bmatrix} \tag{3.64}$$

în care pentru viteză este valabilă rel. (3.17) iar pentru accelerații rel.(3.25). Dacă în B se află o culisă care alunecă pe elementul respectiv, poziția, viteza și accelerația acesteia în raport cu originea locală A au formele matriceale:

$$\mathbf{r}_{1B} = \begin{bmatrix} l \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v}_{1B} = \begin{bmatrix} v_{Br} \\ v_{Bt} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{a}_{1B} = \begin{bmatrix} a_{Bt}^{\nu} + a_{Br} \\ a_{Bt}^{\tau} + a_{Bcor} \end{bmatrix} \tag{3.65}$$

Relațiile de calcul pentru aceste componente sunt (3.31) pentru viteze, (3.37) și (3.39) pentru accelerații, cu adaptarea corespunzătoare. Relațiile de transfer în sistemul fix pentru ambele situații sunt aceleași, respectiv(3.46). Deși se urmărește ca alocarea indicilor inferiori pentru identificarea mărimilor studiate să fie cât mai uniformă, acoperind toate diadele, în funcție de context și complexitate vor fi adoptate și alte notații.

În analiza diadelor, pentru simplificarea relațiilor de calcul se introduc niște vectori auxiliari $\Delta\bar{r}, \Delta\bar{v}, \Delta\bar{a}$ care în ecuațiile vectoriale ca și în cele matriceale grupează sumele algebrice ale unor de termeni a căror valoare este cunoscută:

$$\mathbf{\Delta r} = \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} \qquad \mathbf{\Delta v} = \begin{bmatrix} \Delta v_x \\ \Delta v_y \end{bmatrix} \qquad \mathbf{\Delta a} = \begin{bmatrix} \Delta a_x \\ \Delta a_y \end{bmatrix} \tag{3.66}$$

Unele calcule din analiza cinematică a diadelor pot fi simplificate dacă se au în vedere câteva particularități ale operațiunilor cu matricele de rotație ale unghiurilor de poziție ale elementelor. Astfel, se consideră matricea de rotație a unui unghi α :

$$\mathbf{rot}_\alpha = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \quad (3.67) \qquad \mathbf{rot}_\alpha^t = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \quad (3.68)$$

Prin înmulțirea la stânga cu transpusa acesteia, se obține matricea unitate:

$$\begin{aligned} \mathbf{rot}_\alpha^t \cdot \mathbf{rot}_\alpha &= \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \cos^2\alpha + \sin^2\alpha & -\sin\alpha\cos\alpha + \sin\alpha\cos\alpha \\ -\sin\alpha\cos\alpha + \sin\alpha\cos\alpha & \sin^2\alpha + \cos^2\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{1} \end{aligned} \tag{3.69}$$

Este de remarcat că orice altă matrice înmulțită la stânga cu matricea unitate (respectând evident regulile de înmulțire matriceală) rămâne neschimbată:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad \mathbf{1} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{r} \tag{3.70}$$

Un alt aspect se referă la suma și diferența a două unghiuri atunci când sunt cunoscute matricele lor de rotație. Pentru exemplificare se aleg chiar unghiuri întâlnite în analiza pozițională a diadelor.

Se consideră diferența:

$$\beta = \alpha_2 - \alpha_1 \qquad \begin{cases} \sin\beta = \sin\alpha_2 \cos\alpha_1 - \cos\alpha_2 \sin\alpha_1 \\ \cos\beta = \cos\alpha_2 \cos\alpha_1 + \sin\alpha_2 \sin\alpha_1 \end{cases} \tag{3.71}$$

în care pentru unghiurile α_1 și α_2 matricile de rotație au forma (3.67). Se înmulțește la stânga matricea unghiului α_2 cu matricea transpusă a unghiului α_1:

$$\begin{aligned}\mathbf{rot}^t_{\alpha 1} \cdot \mathbf{rot}_{\alpha 2} &= \begin{bmatrix} \cos\alpha_1 & \sin\alpha_1 \\ -\sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\alpha_2 & -\sin\alpha_2 \\ \sin\alpha_2 & \cos\alpha_2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \cos\alpha_2 \cos\alpha_1 + \sin\alpha_2 \sin\alpha_1 & -\sin\alpha_2 \cos\alpha_1 + \sin\alpha_2 \cos\alpha_1 \\ -\cos\alpha_2 \sin\alpha_1 + \sin\alpha_2 \cos\alpha_1 & \sin\alpha_2 \sin\alpha_1 + \cos\alpha_2 \cos\alpha_1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix} = \mathbf{rot}_\beta \end{aligned} \tag{3.72}$$

S-a obținut astfel matricea de rotație a unghiului β:

$$\mathbf{rot}^t_{\alpha 1} \cdot \mathbf{rot}_{\alpha 2} = \mathbf{rot}_\beta \quad \rightarrow \quad \alpha_2 - \alpha_1 = \beta \tag{3.73}$$

Se verifică ușor că produsul celor două matrici de rotație este comutativ. La transpunerea unui produs de matrici, termenii acestuia se permută între ei. Astfel, transpunerea relației de mai sus conduce la expresia:

$$\mathbf{rot}^t_{\alpha 2} \cdot \mathbf{rot}_{\alpha 1} = \mathbf{rot}^t_\beta \quad \rightarrow \quad \alpha_1 - \alpha_2 = -\beta \tag{3.74}$$

În mod asemănător se poate studia și suma a două unghiuri ale căror matrice de rotație sunt cunoscute.

$$\alpha = \varphi + \gamma \qquad \begin{cases} \sin\alpha = \sin\varphi \cos\gamma + \cos\varphi \sin\gamma \\ \cos\alpha = \cos\varphi \cos\varphi - \sin\varphi \sin\gamma \end{cases} \tag{3.75}$$

Se înmulțesc între ele matricele de rotație ale unghiurilor φ și γ .

$$\begin{aligned}\mathbf{rot}_\varphi \cdot \mathbf{rot}_\gamma &= \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma \\ \sin\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \cos\varphi \cos\gamma - \sin\varphi \sin\gamma & -\cos\varphi \sin\gamma - \sin\varphi \cos\gamma \\ \sin\varphi \cos\gamma + \cos\varphi \sin\gamma & -\sin\varphi \sin\gamma + \cos\varphi \cos\gamma \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} = \mathbf{rot}_\alpha \end{aligned} \tag{3.76}$$

Se constată ușor că înmulțirea este comutativă.

$$\mathbf{rot}_\varphi \cdot \mathbf{rot}_\gamma = \mathbf{rot}_\gamma \cdot \mathbf{rot}_\varphi = \mathbf{rot}_\alpha \quad \rightarrow \quad \varphi + \gamma = \alpha \tag{3.77}$$

Comutativitatea din rel.(3.73) și (3.77) este explicabilă prin faptul că succesiunea rotațiilor poate fi inversată, ajungând la același rezultat. Păstrarea regulii de înmulțire la stânga este însă necesară în expresiile matriceale pentru realizarea corectă a transformării vectorilor dintr-un sistem în altul, exemplificată în relația (3.63).

Pe parcursul analizei diadelor, atât pentru poziții cât și pentru viteze și accelerații, se formează sisteme liniare de câte două ecuații cu două necunoscute.

Aceste necunoscute sunt de fapt relațiile efective de calcul ale parametrilor cinematici din secțiunea respectivă.

Pentru rezolvarea acestor sisteme sunt binecunoscute metoda reducerii și metoda bazată pe regula lui Cramer. Cea de a doua metodă, pe lângă o anumită eleganță, permite și utilizarea unei rutine generale în mediile de programare pe calculator. În cele ce urmează se consideră utilă reamintirea modului de rezolvare a sistemelor menționate prin regula lui Cramer.

Fie un sistem oarecare de două ecuații liniare cu două necunoscute având forma generală:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{3.78}$$

Atât coeficienții cât și termenii liberi sunt parametri cunoscuți sau expresii de calcul ale acestora. Sistemul poate fi pus și sub forma matriceală:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \tag{3.79}$$

Se calculează un determinant al coeficienților și doi determinanți în care pe rând coloanele acestuia sunt înlocuite cu termenii liberi:

$$D_0 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\,a_{22} - a_{21}\,a_{12} \tag{3.80}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1\,a_{22} - b_2\,a_{12} \tag{3.81}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}\,b_2 - a_{21}\,b_1 \tag{3.82}$$

Necunoscutele sistemului se determină făcând următoarele rapoarte:

$$x_1 = \frac{D_1}{D_0} = \frac{b_1\,a_{22} - b_2\,a_{12}}{a_{11}\,a_{22} - a_{21}\,a_{12}} \tag{3.83}$$

$$x_2 = \frac{D_2}{D_0} = \frac{a_{11}\,b_2 - a_{21}\,b_1}{a_{11}\,a_{22} - a_{21}\,a_{12}} \tag{3.84}$$

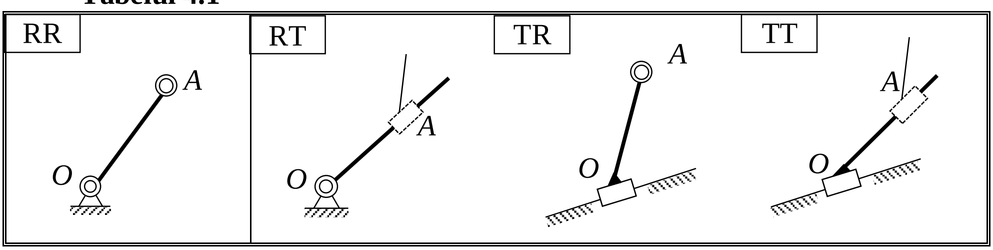
Relațiile astfel obținute se pot include în algoritmele de calcul pe baza cărora se realizează programele de calculator.

4 ANALIZA CINEMATICĂ A ELEMENTELOR CONDUCĂTOARE

4.1 Generalități

Cele patru tipuri de elemente conducătoare prin care pot fi antrenate diadele în cadrul mecanismelor pantalatere fundamentale și al mecanismelor derivate din acestea sunt prezentate în tab.4.1. Ele se identifică, ca și diadele, prin tipul cuplelor cinematice R de rotație (articulații) sau T de translație (culise) care le mărginesc, respectiv RR, RT, TR, TT. Prima dintre aceste cuple este legată la baza mecanismului iar cealaltă la una din cuplele exterioare ale diadei pe care o antrenează, în funcție de tipul acesteia.

Tabelul 4.1



Elementele RR și RT, numite curent *manivele*, au o mișcare de rotație în jurul articulației *O* legată la bază; se cunoaște poziția acesteia în sistemul de referință fix precum și legea de mișcare prin variația în raport cu timpul a parametrilor unghiulari φ, ω, ε. La elementele TR și TT culisa *O* translatează pe un suport fix al bazei; legea de mișcare este cunoscută prin variația în timp a parametrilor liniari *s*, *v*, *a*.

La elementele RT și TT culisa mobilă *A* are o poziție variabilă pe elementul conducător respectiv. Poziția, viteza și accelerația acesteia se determină în corelație cu diada pe care o acționează. Elementul conducător TR admite și situația în care distanța între cele două cuple este nulă, centrele acestora fiind suprapuse.

În continuare, pentru comoditatea tratării, originea sistemului de referință fix se alege în punctul *O* al elementelor RR și RT; suportul pentru translația culiselor *O* la elementele TR și TT se suprapune axei *x* a sistemului de referință fix. Dacă în mod practic se impune un alt sistem de referință, transferul rezultatelor se poate face în modul prezentat în cap.3.2.

4.2 Elementul conducător RR

Date: $OA=r$, φ, ω, ε
Cerute: poziția, viteza și accelerația pentru articulația *A*

Sistemul de referință fix este *Oxy* iar cel mobil solidar cu elementul este Ox_0y_0 (fig.4.1). Legătura între coordonatele punctului *A* în cele două sisteme este dată de relația de transfer matriceală din care se deduc relațiile scalare:

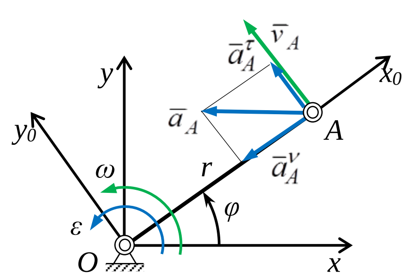


Fig.4.1

$$\begin{bmatrix} x_A \\ y_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

$$\begin{cases} x_A = r\cos\varphi \\ y_A = r\sin\varphi \end{cases} \quad (4.2)$$

În mișcarea de rotație a manivelei, viteza articulației A perpendiculară pe OA și are sensul vitezei unghiulare ω.

$$v_A = \omega r \tag{4.3}$$

$$\begin{bmatrix} v_{Ax} \\ v_{Ay} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ v_A \end{bmatrix} \quad (4.4) \qquad \begin{cases} v_{Ax} = -v_A \sin\varphi \\ v_{Ay} = v_A \cos\varphi \end{cases} \quad (4.5)$$

$$v_A = \sqrt{v_{Ax}^2 + v_{Ay}^2} \tag{4.6}$$

Accelerația articulației A are două componente, una normală coliniară cu OA îndreptată spre punctul O și alta tangențială, perpendiculară pe OA, în sensul accelerației unghiulare ε.

$$a_A^{\nu} = -\omega^2 r \qquad a_A^{\tau} = \varepsilon r \tag{4.7}$$

$$\begin{bmatrix} a_{Ax} \\ a_{Ay} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_A^{\nu} \\ a_A^{\tau} \end{bmatrix} (4.8) \qquad \begin{cases} a_{Ax} = a_A^{\nu}\cos\varphi - a_A^{\tau}\sin\varphi \\ a_{Ay} = a_A^{\nu}\sin\varphi + a_A^{\tau}\cos\varphi \end{cases} \quad (4.9)$$

$$a_A = \sqrt{(a_{Ax}^{\nu})^2 + (a_{Ay}^{\tau})^2} \tag{4.10}$$

4.3 Elementul conducător RT

Date: $\varphi, \omega, \varepsilon$

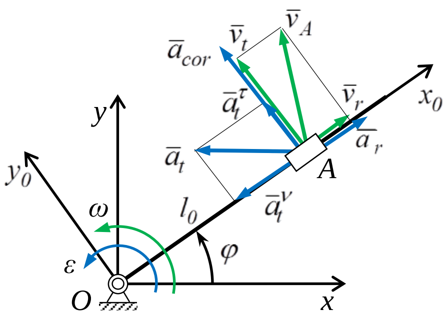


Fig.4.2

Regimul cinematic al acestui element conducător este dependent de pozița culisei A pe suportul de alunecare, respectiv de lungimea l_0 (fig.4.2). Aceasta, împreună cu viteza relativă v_r și accelerația relativă a_r (prima și cea de a doua derivată în raport cu timpul a lungimii variabile l_0) se determină în corelație cu diada căreia îi aparține culisa. Presupunând în continuare cunoscute aceaste mărimi, analiza se desfășoară după cum urmează:

$$\begin{bmatrix} x_A \\ y_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} l_0 \\ 0 \end{bmatrix} (4.11) \qquad \begin{cases} x_A = l_0 \cos\varphi \\ y_A = l_0 \sin\varphi \end{cases} \quad (4.12)$$

Viteza absolută a culisei este suma dintre viteza relativă și cea de transport:

$$\bar{v}_A = \bar{v}_r + \bar{v}_t \quad (4.13) \qquad v_t = \omega l_0 \quad (4.14)$$

$$\begin{bmatrix} v_{Ax} \\ v_{Ay} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_r \\ v_t \end{bmatrix} (4.15) \qquad \begin{cases} v_{Ax} = v_r\cos\varphi - v_t\sin\varphi \\ v_{Ay} = v_r\sin\varphi + v_A\cos\varphi \end{cases} \quad (4.16)$$

Pentru accelerația absolută a culisei sunt valabile relațiile:

$$\bar{a}_A = \bar{a}_r + \bar{a}_t + \bar{a}_{cor} \quad (4.17) \qquad \bar{a}_t = \bar{a}_t^{\nu} + \bar{a}_t^{\tau} \quad (4.18)$$

în care pentru componentele accelerației de transport și pentru accelerația complementară Coriolis proiecțiile pe axele sistemului local sunt:

$$\begin{cases} a_t^{\nu} = -\omega^2 l_0 \\ a_t^{\tau} = \varepsilon l_0 \end{cases} \quad (4.19) \qquad a_{cor} = 2\omega v_r \quad (4.20)$$

Proiecțiile accelerației absolute în sistemul de referință fix sunt:

$$\begin{bmatrix} a_{Ax} \\ a_{Ay} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_r + a_A^{\nu} \\ a_t^{\tau} + a_{cor} \end{bmatrix} \tag{4.21}$$

$$\begin{cases} a_{Ax} = (a_r + a_t^{\nu})\cos\varphi - (a_t^{\tau} + a_{cor})\sin\varphi \\ a_{Ay} = (a_r + a_t^{\nu})\sin\varphi + (a_t^{\tau} + a_{cor})\cos\varphi \end{cases} \tag{4.22}$$

4.4 Elementul conducător TR

Date: *r*, *s*, *v*, *a*

Cerute: poziția, viteza și accelerația pentru articulația *A*

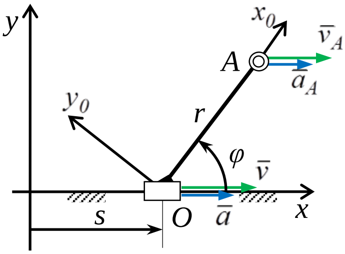


Fig.4.3

Pentru comoditatea rezolvării, sistemul de referință fix se alege cu axa *x* suprapusă direcției pe care are loc translația culisei *O* (fig.4.3). Dacă din anumite considerente se impune un alt sistem fix, rezultatele pentru poziții, viteze și accelerații se transformă utilizând relațiile de transfer prezentate în cap.3.2. Este evident că viteza și accelerația sunt coliniare cu suportul translației culisei.

Pentru poziția articulației *A* se evidențiază relațiile:

$$\begin{bmatrix} x_A \\ y_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.23}$$

$$\begin{cases} x_A = s + r\cos\varphi \\ y_A = r\sin\varphi \end{cases} \tag{4.24}$$

Există și situația în care centrul articulației coincide cu centrul culisei; în acest caz, în relațiile de mai su se introduce $r = 0$. Pentru viteză și accelerație sunt evidente egalitățile $v_A = v$ și $a_A = a$ astfel că:

$$\begin{bmatrix} v_{Ax} \\ v_{Ay} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.25}$$

$$\begin{bmatrix} a_{Ax} \\ a_{Ay} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.26}$$

4.5 Elementul conducător TT

Date: *s*, *v*, *a*

Cerute: poziția, viteza și accelerația pentru culisa *A*

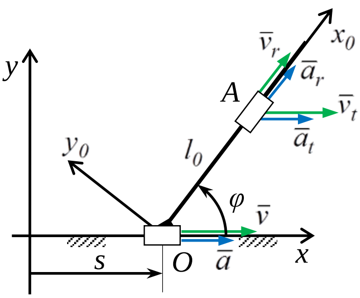


Fig.4.4

În mod asemănător elementului TR, axa *x* a sistemului fix se suprapune direcției de translație a culisei *O*. Ca și la elementul RT lungimea l_0, viteza relativă v_r și accelerația relativă a_r se determină în corelație cu diada care este antrenată prin culisa *A*. Presupunând cunoscute aceste mărimi se obține:

$$\begin{bmatrix} x_A \\ y_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} l_0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.27}$$

$$\begin{cases} x_A = s + l_0\cos\varphi \\ y_A = l_0\sin\varphi \end{cases} \tag{4.28}$$

Viteza și accelerația de transport pentru culisa *A* sunt respectiv egale cu viteza și accelerația cu care se translatează culisa *O*:

$$\bar{v}_A = \bar{v}_r + \bar{v}_t \qquad (4.29) \qquad\qquad v_t = v \qquad (4.30)$$

$$\begin{bmatrix} v_{Ax} \\ v_{Ay} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_r \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_t \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (4.31) \qquad\qquad \begin{cases} v_{Ax} = v_r \cos\varphi + v_t \\ v_{Ay} = v_r \sin\varphi \end{cases} \qquad (4.32)$$

Deoarece mișcarea de transport este o translație, nu există accelerație Coriolis.

$$\bar{a}_A = \bar{a}_r + \bar{a}_t \qquad (4.33) \qquad\qquad a_t = a \qquad (4.34)$$

$$\begin{bmatrix} a_{Ax} \\ a_{Ay} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_r \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_t \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (4.35) \qquad\qquad \begin{cases} a_{Ax} = a_r \cos\varphi + a_t \\ a_{Ay} = a_r \sin\varphi \end{cases} \qquad (4.36)$$

5 DIADA RRR

5.1 Analiza pozițională

Date: $\bar{r}_1(x_1, y_1)$, $\bar{r}_2(x_2, y_2)$, $A_1B = l_1$, $A_2B = l_2$, $k = \pm 1$

Cerute: $\alpha_1, \alpha_2, \beta$

Reprezentarea grafică a diadei RRR este conținută în fig.5.1

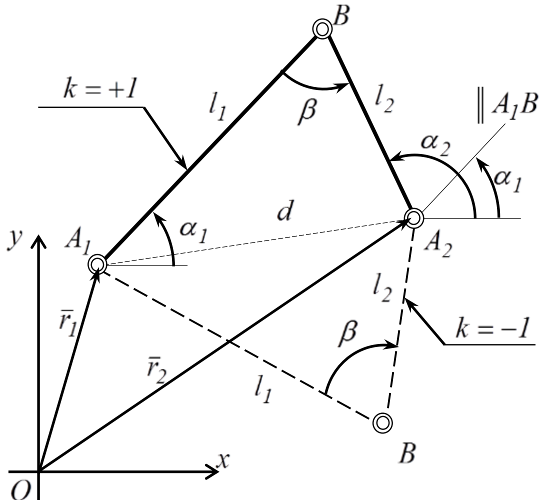


Fig.5.1

Analiza cinematică a diadei presupune cunoscute dimensiunile constante specifice acesteia (lungimi și unghiuri). Parametrii cinematici ai cuplelor exterioare ale diadei, respectiv poziția, viteza și accelerația, sunt preluați fie de la elementele conducătoare, fie de la alte diade cu care această diadă este conectată.

În analiza pozițională din cadrul unui ciclu cinematic este necesară verificarea îndeplinirii anumitor condiții geomentrice impuse diadei pentru o funcționare corectă. Pentru diada *RRR* aceste condiții sunt prezentate în continuare.

Lungimile elementelor sunt l_1 și l_2. Într-o poziție oarecare (fig.5.1), în sistemul de referință fix coordonatele articulațiilor exterioare sunt $A_1(x_1, y_1)$ și $A_2(x_2, y_2)$. Distanța între acestea se calculează cu relația:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \tag{5.1}$$

Condițiile geomentrice impuse pentru existența diadei sunt:

$$d \le l_1 + l_2 \qquad d \ge |\, l_1 - l_2 \,| \tag{5.2}$$

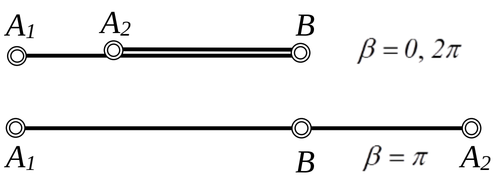


Fig.5.2

Dacă aceste condiții nu sunt îndeplinite, lanțul cinematic se blochează. Semnul "=" din aceste condiții corespunde unor situații limită în care cele două elemente ale diadei sunt suprapuse sau sunt unul în prelungirea celuilalt (fig.5.2). Acestea sunt *pozițiile critice ale diadei* . În cadrul acestor poziții continuarea mișcării este neprecizată, ea trebuind a fi definită.

Pentru aceleași coordonateale ale punctelor A_1 și A_2, pot exista două poziții diferite ale punctului *B* și, implicit, ale elementelor diadei. Pentru departajarea acestora se introduce un indicator $k = \pm 1$, care va interveni in calculul pozițional. Amintind că unghiul β se măsoară întotdeauna de la elementul A_1B către elementul

A_2B se consideră că dacă $0<\beta<\pi$ atunci $k=+1$ iar pentru $\pi<\beta<2\pi$ (sau $0>\beta>-\pi$ se alege $k=-1$. Extremele acestor intervale corespund pozițiilor critice amintite mai înainta. Dacă trecerea prin pozițiile critice dintr-o configurație în alta este asigurată funcțional (de exemplu la mecanismul patrulater paralelogram), indicele k își va schimba valoarea, fapt care va fi menționat la definirea mecanismului respectiv printr-un indicator suplimentar.

Se observă mai întâi că între unghiurile diadei există relația:

$$\beta=\alpha_2-\alpha_1 \quad (5.3) \qquad \begin{cases}\sin\beta=\sin\alpha_2\cos\alpha_1-\cos\alpha_2\sin\alpha_1\\ \cos\beta=\cos\alpha_2\cos\alpha_1+\sin\alpha_2\sin\alpha_1\end{cases} \quad (5.4)$$

Se introduce vectorul auxiliar $\Delta\bar{r}=\overline{A_1A_2}=\bar{r}_2-\bar{r}_1$ și se calculează în continuare pătratul distanța d dintre articulațiile A_1 și A_2 :

$$\mathbf{\Delta r}=\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1 \quad (5.5) \qquad \begin{bmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_2\\ y_2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}x_1\\ y_1\end{bmatrix} \quad (5.6)$$

$$\begin{cases}\Delta x=x_2-x_1\\ \Delta y=y_2-y_1\end{cases} \quad (5.7) \qquad d^2=(\Delta x)^2+(\Delta y)^2 \quad (5.8)$$

Se presupun îndeplinite condițiile geometrice din rel.5.2. Se aplică în continuare teorema cosinusului în triunghiul oarecare format cu laturile l_1, l_2 și d:

$$d^2=l_1^2+l_2^2-2l_1l_2\cos\beta \quad (5.9) \qquad \cos\beta=\frac{l_1^2+l_2^2-d^2}{2l_1l_2} \quad (5.10)$$

În funcție de configurația diadei, cu specificațiile din cap.5.1, se calculează:

$$\sin\beta=k\cdot\sqrt{1-\cos^2\beta} \quad (5.11)$$

Matricea de rotație a unghiului β va fi:

$$\mathbf{rot}_\beta=\begin{bmatrix}\cos\beta & -\sin\beta\\ \sin\beta & \cos\beta\end{bmatrix} \quad (5.12)$$

Pentru calcularea unghiurilor α_1 și α_2 se prelucrează următoarea relație:

$$\bar{r}_B=\bar{r}_1+\overline{A_1B}=\bar{r}_2+\overline{A_2B} \quad (5.13) \qquad \overline{A_1B}-\overline{A_2B}=\bar{r}_2-\bar{r}_1=\Delta\bar{r} \quad (5.14)$$

În sistemele de referință locale vectorii $\overline{A_1B}$ și $\overline{A_2B}$ au formele matriceale:

$$\overline{A_1B}\ \rightarrow\ \mathbf{L}_1=\begin{bmatrix}l_1\\ 0\end{bmatrix} \qquad \overline{A_2B}\ \rightarrow\ \mathbf{L}_2=\begin{bmatrix}l_2\\ 0\end{bmatrix} \quad (5.15)$$

În sistemul de referință fix ecuația (5.25) ia forma:

$$\begin{bmatrix}\cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1\\ \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}l_1\\ 0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\cos\alpha_2 & -\sin\alpha_2\\ \sin\alpha_2 & \cos\alpha_2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}l_2\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{bmatrix} \quad (5.16)$$

sau, sub forma simbolică:

$$\mathbf{rot}_{\alpha1}\cdot\mathbf{L}_1-\mathbf{rot}_{\alpha2}\cdot\mathbf{L}_2=\mathbf{\Delta r} \quad (5.17)$$

Se înmulțește această ecuație la stânga cu transpusa matricii unghiului α_1. În conformitate cu cele arătate în cap.3.6 referitor la matricele de rotație:

$$\mathbf{rot}_{\alpha1}^t\cdot\mathbf{rot}_{\alpha1}=\mathbf{1} \qquad \mathbf{rot}_{\alpha1}^t\cdot\mathbf{rot}_{\alpha2}=\mathbf{rot}_\beta \quad (5.18)$$

În consecință, se obține ecuația matriceală:

$$\mathbf{L}_1 - \mathbf{rot}_\beta \cdot \mathbf{L}_2 = \mathbf{rot}^t_{\alpha 1} \cdot \mathbf{\Delta r} \tag{5.19}$$

$$\begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} l_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha_1 & \sin\alpha_1 \\ -\sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} \tag{5.20}$$

A rezultat un sistem liniar de ecuații scalare având drept necunoscute cele două funcții trigonometrice $\sin\alpha_1$ și $\cos\alpha_1$. Pentru rezolvare se utilizează metoda reducerii.

$$\begin{cases} l_1 - l_2\cos\beta = \Delta x\cos\alpha_1 + \Delta y\sin\alpha_1 \\ l_2\sin\beta = \Delta x\sin\alpha_1 - \Delta y\cos\alpha_1 \end{cases} \left| \begin{matrix} \Delta y \\ \Delta x \end{matrix} \right| \begin{matrix} \Delta x \\ -\Delta y \end{matrix} \tag{5.21}$$

Se înmulțesc aceste relații cu mărimile din prima coloană din dreapta și se adună:

$$(l_1 - l_2\cos\beta)\cdot\Delta y + l_2\sin\beta\cdot\Delta x = [(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2]\sin\alpha_1 = d^2\sin\alpha_1 \tag{5.22}$$

Se procedează la fel cu mărimile din cea de a doua coloană:

$$(l_1 - l_2\cos\beta)\cdot\Delta x - l_2\sin\beta\cdot\Delta y = [(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2]\cos\alpha_1 = d^2\cos\alpha_1 \tag{5.23}$$

Se determină astfel unghiul α_1 prin funcțiile sale trigonometrice:

$$\sin\alpha_1 = \frac{(l_1 - l_2\cos\beta)\cdot\Delta y + l_2\sin\beta\cdot\Delta x}{d^2} \tag{5.24}$$

$$\cos\alpha_1 = \frac{(l_1 - l_2\cos\beta)\cdot\Delta x - l_2\sin\beta\cdot\Delta y}{d^2} \tag{5.25}$$

Variantă. Pentru rezolvarea sistemului se poate utiliza și regula lui Cramer. Sistemul (5.21) se pune sub forma:

$$\begin{bmatrix} \Delta x & \Delta y \\ -\Delta y & \Delta x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\alpha_1 \\ \sin\alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 - l_2\cos\beta \\ l_2\sin\beta \end{bmatrix} \tag{5.26}$$

Se calculează determinanții:

$$D_0 = \begin{vmatrix} \Delta x & \Delta y \\ -\Delta y & \Delta x \end{vmatrix} = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 = d^2 \tag{5.27}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} l_1 - l_2\cos\beta & \Delta y \\ l_2\sin\beta & \Delta x \end{vmatrix} = (l_1 - l_2\cos\beta)\cdot\Delta x - (l_2\sin\beta)\cdot\Delta y \tag{5.28}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} \Delta x & l_1 - l_2\cos\beta \\ -\Delta y & l_2\sin\beta \end{vmatrix} = (l_1 - l_2\cos\beta)\cdot\Delta y + (l_2\sin\beta)\cdot\Delta x \tag{5.29}$$

Conform regulii lui Cramer necunoscutele se determină cu relațiile:

$$\cos\alpha_1 = D_1/D_0 \qquad \sin\alpha_1 = D_2/D_0 \tag{5.30}$$

Se regăsesc rezultatele din relațiile (5.24) și (5.25).

În continuare, din relația (5.3) între unghiuri se deduce:

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \beta \tag{5.31}$$

prin funcțiile trigonometrice:

$$\begin{cases} \sin\alpha_2 = \sin\alpha_1\cos\beta + \cos\alpha_1\sin\beta \\ \cos\alpha_2 = \cos\alpha_1\cos\beta - \sin\alpha_1\sin\beta \end{cases} \tag{5.32}$$

Matricele de rotație pentru cele două unghiuri sunt:

$$\mathbf{rot}_{\alpha 1} = \begin{bmatrix} \cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1 \\ \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 \end{bmatrix} \tag{5.33}$$

$$\mathbf{rot}_{\alpha 2} = \mathbf{rot}_{\alpha 1} \cdot \mathbf{rot}_{\beta} = \begin{bmatrix} \cos\alpha_2 & -\sin\alpha_2 \\ \sin\alpha_2 & \cos\alpha_2 \end{bmatrix} \tag{5.34}$$

Coordonatele articulației B se calculează pornind de la relația (5.24):

$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_1 + \mathbf{rot}_{\alpha 1} \cdot \mathbf{L}_1 \qquad \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1 \\ \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5.35}$$

$$\begin{cases} x_B = x_1 + l_1 \cos\alpha_1 \\ y_B = y_1 + l_1 \sin\alpha_1 \end{cases} \tag{5.36}$$

5.2 Analiza vitezelor

Date: $\bar{v}_1(v_{1x}, v_{2x})$, $\bar{v}_2(v_{2x}, v_{2y})$.

Cerute: vitezele unghiulare ω_1 și ω_2.

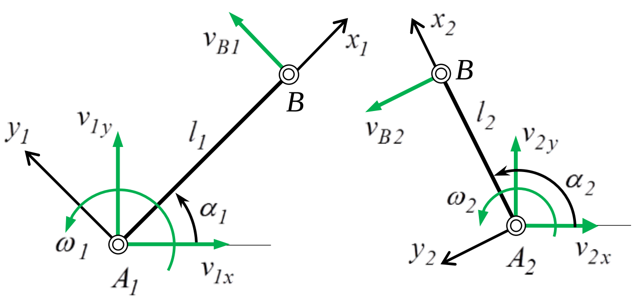


Fig.5.3

Din analiza pozițională se cunosc unghiurile α_1, α_2 și β.

Pentru rezolvare elementele diadei RRR se reprezintă detașate (fig.5.3).

Ca și în cazul analizei poziționale, se calculează mai întâi diferența între vitezele articulațiilor A_2 și A_1:

$$\Delta\bar{v} = \bar{v}_2 - \bar{v}_1 \qquad \mathbf{\Delta v} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 \tag{5.37}$$

$$\begin{bmatrix} \Delta v_x \\ \Delta v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{2x} \\ v_{2y} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} v_{1x} \\ v_{1y} \end{bmatrix} \tag{5.38}$$

$$\begin{cases} \Delta v_x = v_{2x} - v_{1x} \\ \Delta v_y = v_{2y} - v_{1y} \end{cases} \tag{5.39}$$

Pentru viteza punctului B care aparține ambelor elemente se pot utiliza relațiile lui Euler pentru viteze în mișcarea plan-paralelă:

$$\bar{v}_B = \bar{v}_1 + \bar{v}_{B1} = \bar{v}_2 + \bar{v}_{B2} \tag{5.40}$$

Se regrupează termenii acestei relații în modul următor:

$$\bar{v}_{B1} - \bar{v}_{B2} = \bar{v}_2 - \bar{v}_1 = \Delta\bar{v} \tag{5.41}$$

Prin $\bar{v}_{B1}$ și $\bar{v}_{B2}$ s-au notat vitezele punctului B în raport cu A_1 și respectiv A_2. Relațiile scalare de calcul pentru aceste viteze sunt:

$$v_{B1} = l_1\omega_1 \tag{5.42}$$

$$v_{B2} = l_2\omega_2 \tag{5.43}$$

Ele sunt perpendiculare pe direcțiile elementelor având în consecință direcțiile axelor y ale sistemelor locale atașate elementelor; sensul lor este dat de vitezele unghiulare ω_1 și respectiv ω_2. În sistemele de referință locale formele lor matriceale sunt:

$$\mathbf{v}_{B1} = \begin{bmatrix} 0 \\ v_{B1} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v}_{B2} = \begin{bmatrix} 0 \\ v_{B2} \end{bmatrix} \tag{5.44}$$

Cu aceste precizări se dezvoltă ecuația vectorială (5.41):

$$\bar{v}_{B1} - \bar{v}_{B2} = \Delta\bar{v} \tag{5.45}$$

$$\mathbf{rot}_{\alpha 1} \cdot \mathbf{v}_{B1} - \mathbf{rot}_{\alpha 2} \cdot \mathbf{v}_{B2} = \mathbf{\Delta v} \tag{5.46}$$

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1 \\ \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ v_{B1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \cos\alpha_2 & -\sin\alpha_2 \\ \sin\alpha_2 & \cos\alpha_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ v_{B2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta v_x \\ \Delta v_y \end{bmatrix} \tag{5.47}$$

$$\begin{cases} -v_{B1}\sin\alpha_1 + v_{B2}\sin\alpha_2 = \Delta v_x \\ v_{B1}\cos\alpha_1 - v_{B2}\cos\alpha_2 = \Delta v_y \end{cases} \quad \left| \begin{matrix} \cos\alpha_2 \\ \sin\alpha_2 \end{matrix} \right. \quad \left| \begin{matrix} \cos\alpha_1 \\ \sin\alpha_1 \end{matrix} \right. \tag{5.48}$$

S-a obținut un sistem liniar de două ecuații având necunoscute vitezele v_{B1} și v_{B2}. Pentru rezolvare se utilizează metoda reducerii. Se înmulțesc aceste ecuații cu prima coloană din dreapta și se adună:

$$v_{B1}(\sin\alpha_2\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2\sin\alpha_1) = \Delta v_x\cos\alpha_2 + \Delta v_y\sin\alpha_2 \tag{5.49}$$

Se procedează în același mod cu a doua coloană:

$$v_{B2}(\sin\alpha_2\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2\sin\alpha_1) = \Delta v_x\cos\alpha_1 + \Delta v_y\sin\alpha_1 \tag{5.50}$$

În expresiile din paranteze, în ambele relații, se recunoaște funcția:

$$\sin(\alpha_2 - \alpha_1) = \sin\beta \tag{5.51}$$

astfel că rezultă vitezele:

$$v_{B1} = \frac{\Delta v_x\cos\alpha_2 + \Delta v_y\sin\alpha_2}{\sin\beta} \tag{5.52}$$

$$v_{B2} = \frac{\Delta v_x\cos\alpha_1 + \Delta v_y\sin\alpha_1}{\sin\beta} \tag{5.53}$$

În funcție de context se pot utiliza și alte variante de calcul.

Varianta 1. Procedând ca la analiza pozițională (rel.5.17, 5.18), se înmulțește ecuația simbolică (5.46) la stânga cu matricea de rotație a unghiului α_1. Se obține:

$$\mathbf{v}_{B1} - \mathbf{rot}_{\beta} \cdot \mathbf{v}_{B2} = \mathbf{rot}^{t}_{\alpha 1} \cdot \mathbf{\Delta v} \tag{5.54}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ v_{B1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ v_{B2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha_1 & \sin\alpha_1 \\ -\sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta v_x \\ \Delta v_y \end{bmatrix} \tag{5.55}$$

$$\begin{cases} v_{B2}\sin\beta = \Delta v_x\cos\alpha_1 + \Delta v_y\sin\alpha_1 \\ v_{B1} - v_{B2}\cos\beta = -\Delta v_x\sin\alpha_1 + \Delta v_y\cos\alpha_1 \end{cases} \tag{5.56}$$

Din prima ecuație se calculează v_{B2} iar din cea de a doua v_{B1}, rezultatele fiind echivalente cu cele din (5.52) și (5.53).

Varianta 2. Sistemul (5.48) se poate rezolva și aplicând regula lui Cramer. Se pune acest sistem sub o formă matriceală convenabilă:

$$\begin{bmatrix} \sin\alpha_2 & -\sin\alpha_1 \\ -\cos\alpha_2 & \cos\alpha_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_{B2} \\ v_{B1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta v_x \\ \Delta v_y \end{bmatrix} \tag{5.57}$$

Se calculează determinanții:

$$D_0 = \begin{vmatrix} \sin\alpha_2 & -\sin\alpha_1 \\ -\cos\alpha_2 & \cos\alpha_1 \end{vmatrix} = \sin\alpha_2\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2\sin\alpha_1 = \\ = \sin(\alpha_2 - \alpha_1) = \sin\beta \tag{5.58}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} \Delta v_x & -\sin\alpha_1 \\ \Delta v_y & \cos\alpha_1 \end{vmatrix} = \Delta v_x\cos\alpha_1 + \Delta v_y\sin\alpha_1 \tag{5.59}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} \sin\alpha_2 & \Delta v_x \\ -\cos\alpha_2 & \Delta v_y \end{vmatrix} = \Delta v_y\sin\alpha_2 + \Delta v_x\cos\alpha_2 \tag{5.60}$$

Necunoscutele se calculează cu relațiile:

$$v_{B2} = D_1/D_0 \qquad v_{B1} = D_2/D_0 \tag{5.61}$$

Efectuând înlocuirile se regăsesc rezultatele din relațiile (5.52) și (5.53).

Vitezele unghiulare se determină din relațiile (5.42) și (5.43):

$$\omega_1 = \frac{v_{B1}}{l_1} = \frac{\Delta v_x\cos\alpha_2 + \Delta v_y\sin\alpha_2}{l_1\sin\beta} \tag{5.62}$$

$$\omega_2 = \frac{v_{B2}}{l_2} = \frac{\Delta v_x\cos\alpha_1 + \Delta v_y\sin\alpha_1}{l_2\sin\beta} \tag{5.63}$$

Viteza punctului B se calculează pe baza relației (5.40).

$$\bar{v}_B = \bar{v}_1 + \bar{v}_{B1} \tag{5.64}$$

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_1 + \mathbf{rot}_{\alpha 1} \cdot \mathbf{v}_{B1} \tag{5.65}$$

$$\begin{bmatrix} v_{Bx} \\ v_{By} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{1x} \\ v_{1y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1 \\ \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ v_{B1} \end{bmatrix} \tag{5.66}$$

$$\begin{cases} v_{Bx} = v_{1x} - v_{B1}\sin\alpha_1 \\ v_{By} = v_{1y} + v_{B1}\cos\alpha_1 \end{cases} \quad (5.67) \qquad v_B = \sqrt{v_{Bx}^2 + v_{By}^2} \quad (5.68)$$

5.3 Analiza accelerațiilor

Date: $\bar{a}_1(a_{1x}, a_{2x})$, $\bar{a}_2(a_{2x}, a_{2y})$.

Cerute: accelerațiile unghiulare ε_1 și ε_2.

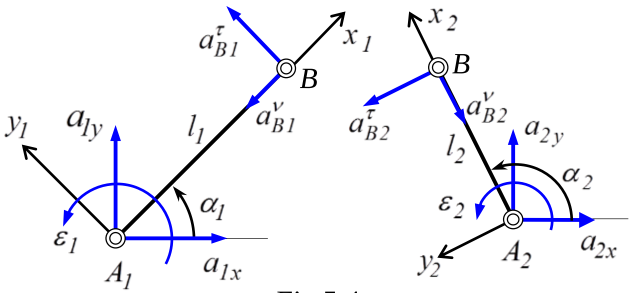


Fig.5.4

Analiza accelerațiilor se face în continuarea analizei poziționale și a vitezelor, fiind cunoscute unghiurile α_1, α_2 β și vitezele unghiulare ω_1 și ω_2. Cele două elemente ale diadei RRR se reprezintă detașate unul de celălalt în fig.5.4.

Pentru accelerația punctului B care aparține ambelor elemente se pot utiliza relațiile lui Euler pentru accelerații în mișcarea plan-paralelă:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_1 + \bar{a}_{B1} = \bar{a}_2 + \bar{a}_{B2} \tag{5.69}$$

$$\mathbf{a}_1 + \mathbf{rot}_{\alpha 1} \cdot \mathbf{a}_{B1} = \mathbf{a}_2 + \mathbf{rot}_{\alpha 2} \cdot \mathbf{a}_{B2} \tag{5.70}$$

Prin $\bar{a}_{B1}$ și $\bar{a}_{B2}$ s-au notat accelerațiile mișcării de rotație a punctului B în raport cu A_1 și A_2. În sistemele de referință locale aceste accelerații au expresiile vectoriale:

$$\bar{a}_{B1} = \bar{a}^\nu_{B1} + \bar{a}^\tau_{B1} \quad (5.71) \qquad \mathbf{a}_{B1} = \mathbf{a}^\nu_{B1} + \mathbf{a}^\tau_{B1} \quad (5.72)$$

$$\bar{a}_{B2} = \bar{a}^\nu_{B2} + \bar{a}^\tau_{B2} \quad (5.73) \qquad \mathbf{a}_{B2} = \mathbf{a}^\nu_{B2} + \mathbf{a}^\tau_{B2} \quad (5.74)$$

$$\begin{bmatrix} a^\nu_{B1} \\ a^\tau_{B1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^\nu_{B1} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ a^\tau_{B1} \end{bmatrix} \quad (5.75) \qquad \begin{bmatrix} a^\nu_{B2} \\ a^\tau_{B2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^\nu_{B2} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ a^\tau_{B2} \end{bmatrix} \quad (5.76)$$

Componentele lor normale și tangențiale sunt definite prin relațiile:

$$\begin{cases} a^\nu_{B1} = -l_1\,\omega_1^2 \\ a^\tau_{B1} = l_1\,\varepsilon_1 \end{cases} \quad (5.77) \qquad \begin{cases} a^\nu_{B2} = -l_2\,\omega_2^2 \\ a^\tau_{B2} = l_2\,\varepsilon_2 \end{cases} \quad (5.78)$$

Se observă că cele două necunoscute ε_1 și ε_2 apar în componentele tangențiale ale accelerațiilor locale ale punctului B. Pentru determinarea acestora se regrupează termenii ecuației vectoriale (5.69), introducând și componentele:

$$\bar{a}^\tau_{B1} - \bar{a}^\tau_{B2} = \bar{a}_2 - \bar{a}_1 + \bar{a}^\nu_{B2} - \bar{a}^\nu_{B1} = \Delta\bar{a} \tag{5.79}$$

Vectorul auxiliar $\Delta\bar{a}$ înglobează toate accelerațiile cunoscute din ecuație.

$$\mathbf{\Delta a} = \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1 + \mathbf{rot}_{\alpha 2} \cdot \mathbf{a}^\nu_{B2} - \mathbf{rot}_{\alpha 1} \cdot \mathbf{a}^\nu_{B1} \tag{5.80}$$

Se dezvoltă relația la nivel matriceal și scalar.

$$\begin{bmatrix} \Delta a_x \\ \Delta a_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{2x} \\ a_{2y} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_{1x} \\ a_{1y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\alpha_2 & -\sin\alpha_2 \\ \sin\alpha_2 & \cos\alpha_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a^\nu_{B2} \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1 \\ \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a^\nu_{B1} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5.81}$$

$$\begin{cases} \Delta a_x = a_{2x} - a_{1x} + a^{\nu}_{B2}\cos\alpha_2 - a^{\nu}_{B1}\cos\alpha_1 \\ \Delta a_y = a_{2y} - a_{1y} + a^{\nu}_{B2}\sin\alpha_2 - a^{\nu}_{B1}\sin\alpha_1 \end{cases} \quad (5.82)$$

Ecuația vectorială care conține necunoscutele este:

$$\bar{a}^{\tau}_{B1} - \bar{a}^{\tau}_{B2} = \Delta\bar{a} \quad (5.83) \qquad \mathbf{rot}_{\alpha 1}\cdot\mathbf{a}^{\tau}_{B1} - \mathbf{rot}_{\alpha 2}\cdot\mathbf{a}^{\tau}_{B2} = \mathbf{\Delta a} \quad (5.84)$$

Se dezvoltă ecuația la nivel matriceal și scalar:

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1 \\ \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ a^{\tau}_{B1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \cos\alpha_2 & -\sin\alpha_2 \\ \sin\alpha_2 & \cos\alpha_2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ a^{\tau}_{B2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta a_x \\ \Delta a_y \end{bmatrix} \quad (5.85)$$

$$\begin{cases} -a^{\tau}_{B1}\sin\alpha_1 + a^{\tau}_{B2}\sin\alpha_2 = \Delta a_x \\ a^{\tau}_{B1}\cos\alpha_1 - a^{\tau}_{B2}\cos\alpha_2 = \Delta a_x \end{cases} \quad (5.86)$$

Pentru rezolvarea sistemului obținut se preferă în acest caz procedeul bazat pe regula lui Cramer. Se readuce acest sistem într-o formă matriceală convenabilă:

$$\begin{bmatrix} \sin\alpha_2 & -\sin\alpha_1 \\ -\cos\alpha_2 & \cos\alpha_1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} a^{\tau}_{B2} \\ a^{\tau}_{B1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta a_x \\ \Delta a_y \end{bmatrix} \quad (5.87)$$

Sistemul este asemănător celui de la viteze (rel.5.57), astfel că și determinanții vor avea forme asemănătoare:

$$D_0 = \begin{vmatrix} \sin\alpha_2 & -\sin\alpha_1 \\ -\cos\alpha_2 & \cos\alpha_1 \end{vmatrix} = \sin\alpha_2\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2\sin\alpha_1 = \\ = \sin(\alpha_2 - \alpha_1) = \sin\beta \quad (5.88)$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} \Delta a_x & -\sin\alpha_1 \\ \Delta a_y & \cos\alpha_1 \end{vmatrix} = \Delta a_x\cos\alpha_1 + \Delta a_y\sin\alpha_1 \quad (5.89)$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} \sin\alpha_2 & \Delta a_x \\ -\cos\alpha_2 & \Delta a_y \end{vmatrix} = \Delta a_y\sin\alpha_2 + \Delta a_x\cos\alpha_2 \quad (5.90)$$

Se obțin expresiile necunoscutelor:

$$a^{\tau}_{B1} = \frac{D_2}{D_0} = \frac{\Delta a_y\sin\alpha_2 + \Delta a_x\cos\alpha_2}{\sin\beta} \quad (5.91)$$

$$a^{\tau}_{B2} = \frac{D_1}{D_0} = \frac{\Delta a_x\cos\alpha_1 + \Delta a_y\sin\alpha_1}{\sin\beta} \quad (5.92)$$

și, ținând cont de definițiile acestora din relațiile (5.77) și (5.78), se obține în final:

$$\varepsilon_1 = a^{\tau}_{B1}/l_1 \quad (5.93) \qquad \varepsilon_2 = a^{\tau}_{B2}/l_2 \quad (5.94)$$

Accelerația punctului *B* se calculează pe baza relației (5.69).

$$\bar{a}_B = \bar{a}_1 + \bar{a}_{B1} \quad (5.95) \qquad \mathbf{a}_B = \mathbf{a}_1 + \mathbf{rot}_{\alpha 1}\cdot\mathbf{a}_{B1} \quad (5.96)$$

$$\begin{bmatrix} a_{Bx} \\ a_{By} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{A1x} \\ a_{A1y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1 \\ \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} a^{\nu}_{B1} \\ a^{\tau}_{B1} \end{bmatrix} \quad (5.97)$$

$$\begin{cases} a_{Bx} = a_{A1x} + a^{\nu}_{B1}\cos\alpha_1 - a^{\tau}_{B1}\sin\alpha_1 \\ a_{By} = a_{A1y} + a^{\nu}_{B1}\sin\alpha_1 + a^{\tau}_{B1}\cos\alpha_1 \end{cases} \quad (5.98) \qquad a_B = \sqrt{a^2_{Bx} + a^2_{By}} \quad (5.99)$$

5.4 Algoritmul de calcul

Analiza pozițională			
1	$\Delta x = x_2 - x_1$		
2	$\Delta y = y_2 - y_1$		
3	$d^2 = l_1^2 + l_2^2 - 2 l_1 l_2 \cos\beta$		
4	$\cos\beta = (l_1^2 + l_2^2 - d^2) / 2 l_1 l_2$		
5	$\sin\beta = k \cdot \sqrt{1 - \cos^2\beta}$		
6	$\sin\alpha_1 = [(l_1 - l_2\cos\beta) \cdot \Delta y + l_2 \sin\beta \cdot \Delta x] / d^2$		
7	$\cos\alpha_1 = [(l_1 - l_2\cos\beta) \cdot \Delta x - l_2 \sin\beta \cdot \Delta y] / d^2$		
8	$\sin\alpha_2 = \sin\alpha_1 \cos\beta + \cos\alpha_1 \sin\beta$		
9	$\cos\alpha_2 = \cos\alpha_1 \cos\beta - \sin\alpha_1 \sin\beta$		
10	$x_B = x_1 + l_1 \cos\alpha_1$		
11	$y_B = y_1 + l_1 \sin\alpha_1$		
Analiza vitezelor			
12	$\Delta v_x = v_{2x} - v_{1x}$		
13	$\Delta v_y = v_{2y} - v_{1y}$		
14	$v_{B1} = (\Delta v_x \cos\alpha_2 + \Delta v_y \sin\alpha_2) / \sin\beta$		
15	$v_{B2} = (\Delta v_x \cos\alpha_1 + \Delta v_y \sin\alpha_1) / \sin\beta$		
16	$\omega_1 = v_{B1} / l_1$		
17	$\omega_2 = v_{B2} / l_2$		
18	$v_{Bx} = v_{1x} - v_{B1} \sin\alpha_1$		
19	$v_{By} = v_{1y} + v_{B1} \cos\alpha_1$		
Analiza accelerațiilor			
20	$a_{B1}^{\nu} = -l_1 \omega_1^2$		
21	$a_{B2}^{\nu} = -l_2 \omega_2^2$		
22	$\Delta a_x = a_{2x} - a_{1x} + a_{B2}^{\nu} \cos\alpha_2 - a_{B1}^{\nu} \cos\alpha_1$		
23	$\Delta a_y = a_{2y} - a_{1y} + a_{B2}^{\nu} \sin\alpha_2 - a_{B1}^{\nu} \sin\alpha_1$		
24	$a_{B1}^{\tau} = (\Delta a_x \cos\alpha_2 + \Delta a_y \sin\alpha_2) / \sin\beta$		
25	$a_{B2}^{\tau} = (\Delta a_y \sin\alpha_1 + \Delta a_x \cos\alpha_1) / \sin\beta$		
26	$\varepsilon_1 = a_{B1}^{\tau} / l_1$	27	$\varepsilon_2 = a_{B2}^{\tau} / l_2$
28	$a_{Bx} = a_{A1x} + a_{B1}^{\nu} \cos\alpha_1 - a_{B1}^{\tau} \sin\alpha_1$		
29	$a_{By} = a_{A1y} + a_{B1}^{\nu} \sin\alpha_1 + a_{B1}^{\tau} \cos\alpha_1$		

6 DIADA RTR1

6.1 Analiza pozițională

Date: $\bar{r}_1(x_1, y_1)$, $\bar{r}_2(x_2, y_2)$, $A_2B = l_2$, β, $k_1 = \pm 1$, $k_2 = \pm 1$

Cerute: l_1, α_1, α_2;

Caz particular: $l_2 = 0$

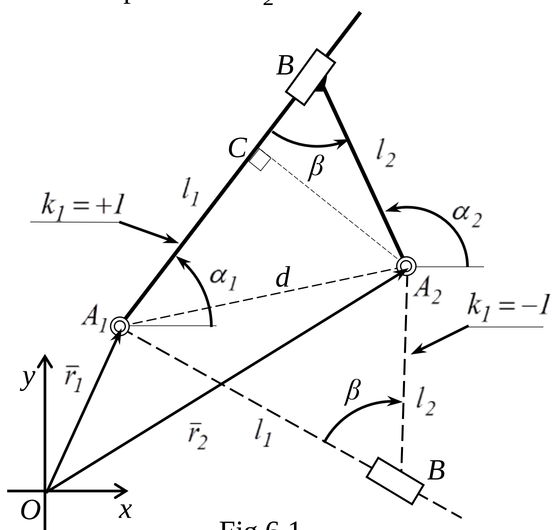


Fig.6.1

Reprezentarea grafică a diadei este prezentată în fig.6.1. Culisa din punctul B execută o translație în lungul elementului A_1B.

Prin indicatorul $k_1 = \pm 1$ se precizează poziția culisei B atunci când se imobilizează articulațiile A_1 și A_2. Unghiul interior β este fix și constitue o dată dimensională a diadei; conform definirii menționată anterior, acesta se măsoară de la elementul A_1B către A_2B și are valori absolute cuprinse în intervalul $(0, \pi)$. În varianta reprezentată cu linie întreruptă în fig.6.1 unghiul β este negativ, ceea ce afectează semnul funcției $\sin\beta$ care intervine în calculul unghiurilor α_1 și α_2. În consecință, pentru departajarea corectă a variantelor, se introduce transformarea:

$$\beta = k_1 \cdot abs(\beta) \tag{6.1}$$

Și în cazul acestui tip de diadă intervine o restricție geometrică. Diada se blochează atunci când centrul articulației A_1 coincide cu punctul C – piciorul perpendicularei dusă din A_2 pe direcția A_1B, respectiv $A_1A_2 = A_2C$ (fig.6.1). Pentru a evita blocarea este necesar ca în timpul mișcării să fie respectată condiția:

$$d \geq \left| l_2 \sin\beta \right| \tag{6.2}$$

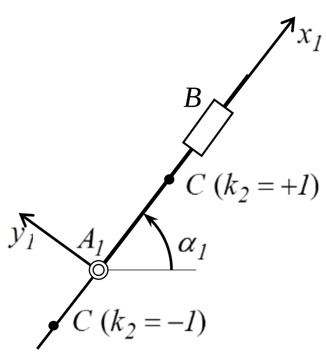


Fig.6.2

Situația în care punctele A_1 și C coincid reprezintă în același timp și poziția critică a diadei, caracterizată prin semnul '=' în relația de mai sus. Față de această poziție pot exista două situații care pot fi departajate print indicatorul k_2. Într-un sistem de coordonate local atașat elementului A_1B (fig.6.2), dacă punctul C are o coordonată pozitivă, se introduce $k_2 = +1$ iar în cazul unei coordonate negative se introduce $k_2 = -1$.

Segmentul A_1C se va calcula cu relația:

$$A_1C = k_2\sqrt{(A_1A_2)^2 - (A_2C)^2} \qquad (6.3)$$

Se introduce vectorul auxiliar $\Delta\bar{r} = \overline{A_1A_2} = \bar{r}_2 - \bar{r}_1$ și se calculează în continuare pătratul distanța d dintre articulațiile A_1 și A_2:

$$\mathbf{\Delta r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 \qquad (6.4) \qquad \begin{bmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x_2\\ y_2\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}x_1\\ y_1\end{bmatrix} \qquad (6.5)$$

$$\begin{cases}\Delta x = x_2 - x_1\\ \Delta y = y_2 - y_1\end{cases} \qquad (6.6) \qquad d^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 \qquad (6.7)$$

Cu notațiile din fig.6.1 se calculează în continuare lungimea l_1:

$$A_1B = A_1C + CB \qquad (6.8) \qquad l_1 = k_2\sqrt{d^2 - (l_2\sin\beta)^2} + l_2\cos\beta \qquad (6.9)$$

Pentru calculul unghiului α_1 este valabilă demonstrația de la diada RRR încheiată prin relațiile :

$$\sin\alpha_1 = \frac{(l_1 - l_2\cos\beta)\cdot\Delta y + l_2\sin\beta\cdot\Delta x}{d^2} \qquad (6.10)$$

$$\cos\alpha_1 = \frac{(l_1 - l_2\cos\beta)\cdot\Delta x - l_2\sin\beta\cdot\Delta y}{d^2} \qquad (6.11)$$

Și în acest caz $\alpha_2 = \alpha_1 + \beta$ astfel că se utilizează relațiile trigonometrice:

$$\begin{cases}\sin\alpha_2 = \sin\alpha_1\cos\beta + \cos\alpha_1\sin\beta\\ \cos\alpha_2 = \cos\alpha_1\cos\beta - \sin\alpha_1\sin\beta\end{cases} \qquad (6.12)$$

Cu aceste unghiuri se pot forma matricele de rotație $\mathbf{rot}_{\alpha 1}$, $\mathbf{rot}_{\alpha 2}$ și $\mathbf{rot}_{\beta}$

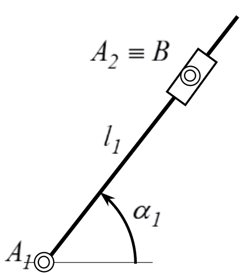


Fig.6.3

Coordonatele punctului B se calculează cu relațiile:

$$\begin{cases}x_B = x_2 + l_2\cos\alpha_2\\ y_B = y_2 + l_2\sin\alpha_2\end{cases} \qquad (6.13)$$

În cazul particular admis pentru această diadă centrele articulației A_2 și culisei B coincid (fig.6.3). În acest caz $l_2 = 0$ și nu există o variantă simetrică. Deși unghiul intern este nedeterminat, pentru a nu afecta algoritmul de calcul se introduce $\beta = 0$. Din relațiile de mai sus rezultă:

$$l_1 = d \qquad \sin\alpha_1 = \Delta y/d \qquad \cos\alpha_1 = \Delta x/d \qquad (6.14)$$

$$\sin\alpha_2 = \sin\alpha_1 \qquad \cos\alpha_2 = \cos\alpha_1 \qquad (6.15)$$

6.2 Analiza vitezelor

Date: $\bar{v}_1(v_{1x}, v_{2x})$, $\bar{v}_2(v_{2x}, v_{2y})$.

Cerute: vitezele unghiulare ω_1 și ω_2.

Din analiza pozițională se cunosc lungimea l_1, unghiurile α_1 și α_2.
Elementele diadei RTR1 se reprezintă detașate în fig.6.4.

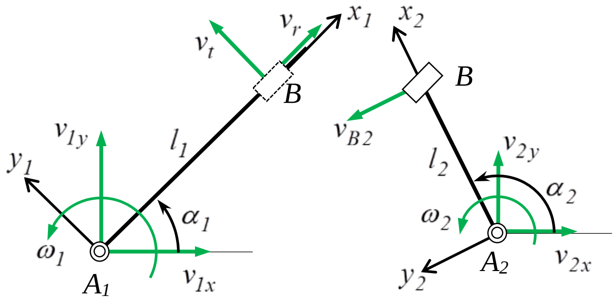


Fig.6.4

Vitezele unghiulare ω_1 și ω_2 sunt derivatele în raport cu timpul ale unghiurilor de poziție α_1 și α_2. Unghiul interior β dintre elementele diadei este constant astfel că derivata lui este nulă. În consecință:

$$\beta = \alpha_2 - \alpha_1 \qquad \dot{\beta} = \dot{\alpha}_2 - \dot{\alpha}_1 \qquad 0 = \omega_2 - \omega_1 \qquad \omega_2 = \omega_1 \tag{6.16}$$

Cu notațiile din fig.6.4, viteza punctului B care aparține ambelor elemente se exprimă prin ecuația vectorială:

$$\bar{v}_B = \bar{v}_1 + \bar{v}_{B1} = \bar{v}_2 + \bar{v}_{B2} \tag{6.17}$$

Partea a doua a acestei ecuații se pune sub forma:

$$\bar{v}_{B1} - \bar{v}_{B2} = \bar{v}_2 - \bar{v}_1 = \Delta\bar{v} \tag{6.18}$$

în care vectorul auxiliar $\Delta\bar{v}$ conține termenii cunoscuți ai ecuației:

$$\Delta\bar{v} = \bar{v}_2 - \bar{v}_1 \qquad \mathbf{\Delta v} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 \tag{6.19}$$

$$\begin{bmatrix} \Delta v_x \\ \Delta v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{2x} \\ v_{2y} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} v_{1x} \\ v_{1y} \end{bmatrix} \quad (6.20) \qquad \begin{cases} \Delta v_x = v_{2x} - v_{1x} \\ \Delta v_y = v_{2y} - v_{1y} \end{cases} \tag{6.21}$$

Prima parte a ecuației (6.18), cea care conține necunoscutele, este:

$$\bar{v}_{B1} - \bar{v}_{B2} = \Delta\bar{v} \qquad \mathbf{v}_{B1} - \mathbf{v}_{B2} = \mathbf{\Delta v} \tag{6.22}$$

Viteza culisei B în raport cu punctul A_1 are o componentă relativă și una de transport; viteza centrului culisei față de punctul A_2 are o singură componentă. În sistemele de referință locale, cu notațiile din fig.6.4, aceste viteze sunt:

$$\bar{v}_{B1} = \bar{v}_r + \bar{v}_t \qquad \mathbf{v}_{B1} = \begin{bmatrix} v_r \\ v_t \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v}_{B2} = \begin{bmatrix} 0 \\ v_{B2} \end{bmatrix} \tag{6.23}$$

Viteza de transport v_t și viteza v_{B2} sunt definite prin relațiile:

$$v_t = l_1\omega_1 \quad (6.24) \qquad v_{B2} = l_2\omega_2 = l_2\omega_1 \tag{6.25}$$

În sistemul de referință fix ecuația (6.22) are forma matriceală:

$$\mathbf{rot}_{\alpha 1}\cdot\mathbf{v}_{B1}-\mathbf{rot}_{\alpha 2}\cdot\mathbf{v}_{B2}=\mathbf{\Delta v} \tag{6.26}$$

$$\begin{bmatrix}\cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1\\ \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}v_r\\ l_1\omega_1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\cos\alpha_2 & -\sin\alpha_2\\ \sin\alpha_2 & \cos\alpha_2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\ l_2\omega_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\Delta v_x\\ \Delta v_y\end{bmatrix} \tag{6.27}$$

Se înmulțește ecuația la stânga cu transpusa matricii de rotație a unghiului α_1:

$$\mathbf{rot}^t_{\alpha 1}\cdot\mathbf{rot}_{\alpha 1}\cdot\mathbf{v}_{B1}-\mathbf{rot}^t_{\alpha 1}\cdot\mathbf{rot}_{\alpha 2}\cdot\mathbf{v}_{B2}=\mathbf{rot}^t_{\alpha 1}\cdot\mathbf{\Delta v} \tag{6.28}$$

Reamintind că $\mathbf{rot}^t_{\alpha 1}\cdot\mathbf{rot}_{\alpha 1}=\mathbf{1}$ și $\mathbf{rot}^t_{\alpha 1}\cdot\mathbf{rot}_{\alpha 2}=\mathbf{rot}_{\beta}$ se obține:

$$\mathbf{v}_{B1}-\mathbf{rot}_{\beta}\cdot\mathbf{v}_{B2}=\mathbf{rot}^t_{\alpha 1}\cdot\mathbf{\Delta v} \tag{6.29}$$

$$\begin{bmatrix}v_r\\ l_1\omega_1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\cos\beta & -\sin\beta\\ \sin\beta & \cos\beta\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\ l_2\omega_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\alpha_1 & \sin\alpha_1\\ -\sin\alpha_1 & \cos\alpha_1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\Delta v_x\\ \Delta v_y\end{bmatrix} \tag{6.30}$$

Ecuațiile scalare provenite din aceasta sunt:

$$\begin{cases} v_r+l_2\omega_1\sin\beta=\Delta v_x\cos\alpha_1+\Delta v_y\sin\alpha_1\\ (l_1-l_2\cos\beta)\,\omega_1=-\Delta v_x\sin\alpha_1+\Delta v_y\cos\alpha_1\end{cases} \tag{6.31}$$

Din cea de a doua ecuație se deduc viteza unghiulară comună a elementelor:

$$\omega_1=\omega_2=\frac{\Delta v_y\cos\alpha_1-\Delta v_x\sin\alpha_1}{l_1-l_2\cos\beta} \tag{6.32}$$

iar din prima ecuație, ținând cont de (6.25), se obține viteza relativă a culisei:

$$v_r=\Delta v_x\cos\alpha_1+\Delta v_y\sin\alpha_1-v_{B2}\sin\beta \tag{6.33}$$

Pentru viteza totală a culisei *B* se utilizează partea a doua a relației (6.17):

$$\bar v_B=\bar v_2+\bar v_{B2} \qquad \mathbf{v}_B=\mathbf{v}_2+\mathbf{rot}_{\alpha 2}\cdot\mathbf{v}_{B2} \tag{6.34}$$

$$\begin{bmatrix}v_{Bx}\\ v_{By}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}v_{2x}\\ v_{2y}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\cos\alpha_2 & -\sin\alpha_2\\ \sin\alpha_2 & \cos\alpha_2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\ v_{B2}\end{bmatrix} \tag{6.35}$$

$$\begin{cases} v_{Bx}=v_{2x}-v_{B2}\sin\alpha_2\\ v_{By}=v_{2y}+v_{B2}\cos\alpha_2\end{cases} \quad (6.36) \qquad v_B=\sqrt{(\Delta v_{Bx})^2+(\Delta v_{By})^2} \quad (6.37)$$

În cazul particular în care centrul articulației A_2 coincide cu centrul culisei *B*:

$$l_2=0 \qquad v_{B2}=l_2\omega_2=0 \qquad \bar v_B=\bar v_2 \tag{6.38}$$

6.3 Analiza accelerațiilor

Date: $\bar a_1(a_{1x},a_{2x})$, $\bar a_2(a_{2x},a_{2y})$.

Cerute: vitezele unghiulare ε_1 și ε_2.

Din analiza pozițională se cunosc α_1, α_2, l_1 iar din analiza vitezelor se cunosc vitezele unghiulare ω_1 și ω_2 precum și viteza relativă v_r.

Pentru rezolvarea diadei RTR1 cele două elemente se reprezintă detașate unul de celălalt în fig.6.5.

Accelerațiile unghiulare ε_1 și ε_2 sunt derivatele în raport cu timpul ale vitezelor unghiulare ω_1 și ω_2. Pe baza relației (6.16) se deduce:

$$\omega_2=\omega_1 \qquad \dot\omega_2=\dot\omega_1 \qquad \varepsilon_2=\varepsilon_1 \tag{6.39}$$

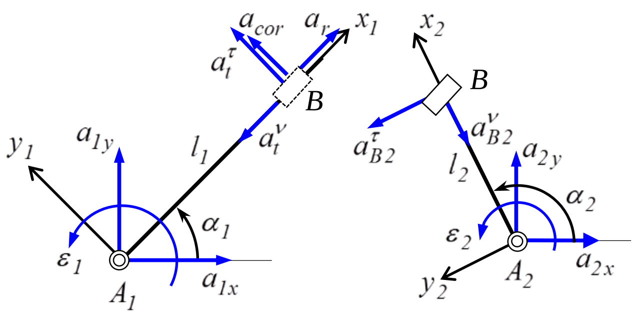


Fig.6.5

Cu notațiile din fig.6.5, accelerația punctului B care aparține ambelor elemente se exprimă prin ecuația vectorială:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_1 + \bar{a}_{B1} = \bar{a}_2 + \bar{a}_{B2} \tag{6.40}$$

Accelerația culisei B în raport cu punctul A_1 se compune din accelerația relativă, cea de transport (normală și tangențială) și accelerația Coriolis. Accelerația centrului culisei față de punctul A_2 are o componentă normală și una tangențială.

$$\bar{a}_{B1} = \bar{a}_r + \bar{a}_t^\nu + \bar{a}_t^\tau + \bar{a}_{cor} \quad (6.41) \qquad \bar{a}_{B2} = \bar{a}_{B2}^\nu + \bar{a}_{B2}^\tau \quad (6.42)$$

Pentru aceste accelerații relațiile de calcul sunt:

$$\begin{cases} a_t^\nu = -l_1\,\omega_1^2 \\ a_t^\tau = l_1\,\varepsilon_1 \end{cases} (6.43) \quad \begin{cases} a_{B2}^\nu = -l_2\,\omega_2^2 \\ a_{B2}^\tau = l_2\,\varepsilon_2 = l_2\varepsilon_1 \end{cases} (6.44) \quad a_{cor} = 2\,\omega_1\,v_r \quad (6.45)$$

Necunoscute sunt accelerația relativă și o accelerație unghiulară care apare în ambele componente tangențiale. Ecuația (6.40) se pune sub forma:

$$\bar{a}_{B1} - \bar{a}_{B2} = \bar{a}_2 - \bar{a}_1 = \Delta\bar{a} \tag{6.46}$$

Se calculează mai întâi accelerația auxiliară:

$$\Delta\bar{a} = \bar{a}_2 - \bar{a}_1 \qquad \mathbf{\Delta a} = \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1 \tag{6.47}$$

$$\begin{bmatrix} \Delta a_x \\ \Delta a_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{2x} \\ a_{2y} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_{1x} \\ a_{1y} \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} \Delta a_x = a_{2x} - a_{1x} \\ \Delta a_y = a_{2y} - a_{1x} \end{cases} \tag{6.48}$$

Ecuația vectorială pentru calculul necunoscutelor menționate este:

$$\bar{a}_{B1} - \bar{a}_{B2} = \Delta\bar{a} \tag{6.49}$$

Cei doi termeni din partea stângă au în sistemele locale formele matriceale:

$$\mathbf{a}_{B1} = \begin{bmatrix} a_t^\nu + a_r \\ a_t^\tau + a_{cor} \end{bmatrix} \quad (6.50) \qquad \mathbf{a}_{B2} = \begin{bmatrix} a_{B2}^\nu \\ a_{B2}^\tau \end{bmatrix} \quad (6.51)$$

În sistemul de referință fix, ecuația vectorială de mai sus ia forma matriceală:

$$\mathbf{rot}_{\alpha 1\cdot} \cdot \mathbf{a}_{B1} - \mathbf{rot}_{\alpha 2} \cdot \mathbf{a}_{B2} = \mathbf{\Delta a} \tag{6.52}$$

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1 \\ \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_t^\nu + a_r \\ a_t^\tau + a_{cor} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \cos\alpha_2 & -\sin\alpha_2 \\ \sin\alpha_2 & \cos\alpha_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{B2}^\nu \\ a_{B2}^\tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta a_x \\ \Delta a_y \end{bmatrix} \tag{6.53}$$

Se înmulțește ecuația la stânga cu transpusa matricii de rotație a unghiului α_1:

$$\mathbf{rot}_{\alpha 1}^t \cdot \mathbf{rot}_{\alpha 1} \cdot \mathbf{a}_{B1} - \mathbf{rot}_{\alpha 1}^t \cdot \mathbf{rot}_{\alpha 2} \cdot \mathbf{a}_{B2} = \mathbf{rot}_{\alpha 1}^t \cdot \mathbf{\Delta a} \tag{6.54}$$

Reamintind că $\mathbf{rot}_{\alpha 1}^t \cdot \mathbf{rot}_{\alpha 1} = \mathbf{1}$ și $\mathbf{rot}_{\alpha 1}^t \cdot \mathbf{rot}_{\alpha 2} = \mathbf{rot}_\beta$ se obține:

$$\mathbf{a}_{B1} - \mathbf{rot}_{\beta} \cdot \mathbf{a}_{B2} = \mathbf{rot}_{\alpha 1}^{t} \cdot \mathbf{\Delta a} \tag{6.55}$$

$$\begin{bmatrix} a_t^{\nu} + a_r \\ l_1\,\varepsilon_1 + a_{cor} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{B2}^{\nu} \\ l_2\,\varepsilon_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha_1 & \sin\alpha_1 \\ -\sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta a_x \\ \Delta a_y \end{bmatrix} \tag{6.56}$$

$$\begin{cases} a_t^{\nu} + a_r - a_{B2}^{\nu}\cos\beta + l_2\,\varepsilon_1 \sin\beta = \Delta a_x \cos\alpha_1 + \Delta a_y \sin\alpha_1 \\ l_1\,\varepsilon_1 + a_{cor} - a_{B2}^{\nu}\sin\beta - l_2\,\varepsilon_1\cos\beta = -\Delta a_x \sin\alpha_1 + \Delta a_y \cos\alpha_1 \end{cases} \tag{6.57}$$

Din ecuația a doua se determină accelerațiile unghiulare:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{1}{l_1 - l_2\cos\beta} \cdot (-\Delta a_x \sin\alpha_1 + \Delta a_y \cos\alpha_1 + a_{B2}^{\nu}\sin\beta - a_{cor}) \tag{6.58}$$

Din prima ecuație se poate calcula accelerația relativă:

$$a_r = \Delta a_x \cos\alpha_1 + \Delta a_y \sin\alpha_1 + a_{B2}^{\nu}\cos\beta - l_2\,\varepsilon_1 \sin\beta - a_t^{\nu} \tag{6.59}$$

Accelerația totală a culisei B se poate calcula mai simplu folosind partea a doua a ecuației vectoriale (6.40):

$$\bar{a}_B = \bar{a}_2 + \bar{a}_{B2} \qquad \mathbf{a}_B = \mathbf{a}_2 + \mathbf{rot}_{\alpha 2} \cdot \mathbf{a}_{B2} \tag{6.60}$$

$$\begin{bmatrix} a_{Bx} \\ a_{By} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{2x} \\ a_{2y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\alpha_2 & -\sin\alpha_2 \\ \sin\alpha_2 & \cos\alpha_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{B2}^{\nu} \\ a_{B2}^{\tau} \end{bmatrix} \tag{6.61}$$

Rezultă în final:

$$\begin{cases} a_{Bx} = a_{2x} + a_{B2}^{\nu}\cos\alpha_2 - a_{B2}^{\tau}\sin\alpha_2 \\ a_{By} = a_{2y} + a_{B2}^{\nu}\sin\alpha_2 + a_{B2}^{\tau}\cos\alpha_2 \end{cases} \tag{6.62}$$

$$a_B = \sqrt{a_{Bx}^2 + a_{By}^2} \tag{6.63}$$

6.4 Algoritmul de calcul

Analiza pozițională	
1	$\Delta x = x_2 - x_1$
2	$\Delta y = y_2 - y_1$
3	$d^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$
4	$l_2 = k_2\sqrt{d^2 - (l_1\sin\beta)^2} + l_1\cos\beta$
5	$\sin\alpha_2 = [(l_1\cos\beta - l_2)\cdot\Delta y + l_1\sin\beta\cdot\Delta x]/d^2$
6	$\cos\alpha_2 = [(l_1\cos\beta - l_2)\cdot\Delta x - l_1\sin\beta\cdot\Delta y]/d^2$
7	$\sin\alpha_1 = \sin\alpha_2\cos\beta - \cos\alpha_2\sin\beta$
8	$\cos\alpha_1 = \cos\alpha_2\cos\beta + \sin\alpha_2\sin\beta$
9	$x_B = x_2 + l_2\cos\alpha_2$
10	$y_B = y_2 + l_2\sin\alpha_2$

Analiza vitezelor	
11	$\Delta v_x = v_{2x} - v_{1x}$
12	$\Delta v_y = v_{2y} - v_{1y}$
13	$\omega_1 = (\Delta v_y \cos\alpha_1 - \Delta v_x \sin\alpha_1) / (l_1 - l_2 \cos\beta)$
14	$\omega_2 = \omega_1$
15	$v_{B2} = l_2\, \omega_2$
16	$v_r = \Delta v_x \cos\alpha_1 + \Delta v_y \sin\alpha_1 - v_{B2} \sin\beta$
17	$v_{Bx} = v_{2x} - v_{B2} \sin\alpha_2$
18	$v_{By} = v_{2y} + v_{B2} \cos\alpha_2$
Analiza accelerațiilor	
19	$\Delta a_x = a_{2x} - a_{1x}$
20	$\Delta a_y = a_{2y} - a_{1x}$
21	$a_t^{\nu} = -l_1\, \omega_1^2$
22	$a_{B2}^{\nu} = -l_2\, \omega_2^2$
23	$a_{cor} = 2\, \omega_1\, v_r$
24	$\varepsilon_1 = (-\Delta a_x \sin\alpha_1 + \Delta a_y \cos\alpha_1 + a_{B2}^{\nu} \sin\beta - a_{cor}) / (l_1 - l_2 \cos\beta)$
25	$\varepsilon_2 = \varepsilon_1$
26	$a_{B2}^{\tau} = l_2\, \varepsilon_2$
27	$a_r = \Delta a_x \cos\alpha_1 + \Delta a_y \sin\alpha_1 + a_{B2}^{\nu} \cos\beta - a_{B2}^{\tau} \sin\beta - a_t^{\nu}$
28	$a_{Bx} = a_{2x} + a_{B2}^{\nu} \cos\alpha_2 - a_{B2}^{\tau} \sin\alpha_2$
29	$a_{By} = a_{2y} + a_{B2}^{\nu} \sin\alpha_2 + a_{B2}^{\tau} \cos\alpha_2$

7 DIADA RTR2

7.1 Analiza pozițională

Date: $\bar{r}_1(x_1, y_1)$, $\bar{r}_2(x_2, y_2)$, $A_1B = l_1$, β, $k_1 = \pm 1$, $k_2 = \pm 1$

Cerute: l_2, α_1, α_2;

Caz particular: $l_1 = 0$

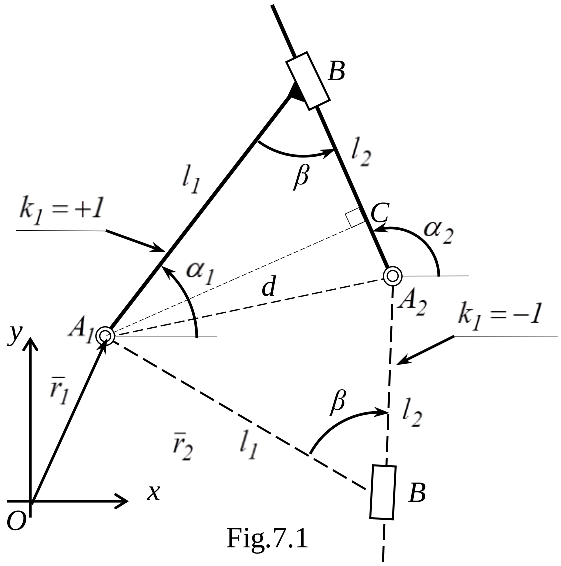


Fig.7.1

Reprezentarea grafică a diadei este prezentată în fig.7.1. Culisa din punctul B execută o translație în lungul elementului A_2B.

Modul de rezolvare pentru această diadă este analog celui de la diada RTR1.

Pentru a diferenția variantele simetrice ale diadei se utilizează indicatorul $k_1 = \pm 1$; unghiul interior se definește prin relația:

$$\beta = k_1 \cdot abs(\beta) \qquad (7.1)$$

Restricția geometrică care se impune în acest caz este:

$$d \geq | \, l_1 \sin\beta \, | \qquad (7.2)$$

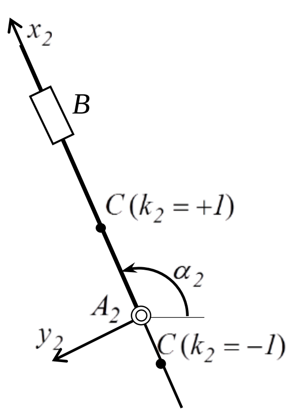


Fig.7.2

Situația în care punctul A_2 coincide cu punctul C – piciorul perpendicularei dusă din A_1 pe direcția A_2B, reprezintă poziția critică a acestei diade definită prin semnul “=” în relația de mai sus.

Ca și la diada RTR1, situarea în raport cu poziția critică este precizată prin indicatorul k_2. Într-un sistem de coordonate local atașat elementului A_2B (fig.7.2), dacă punctul C are o coordonată pozitivă, se introduce $k_2 = +1$ iar în cazul unei coordonate negative se introduce $k_2 = -1$. Segmentul A_2C se va calcula cu relația:

$$A_2C = k_2\sqrt{(A_1A_2)^2 - (A_1C)^2} \qquad (7.3)$$

Se introduce vectorul auxiliar $\Delta\bar{r} = \overline{A_1A_2} = \bar{r}_2 - \bar{r}_1$ și se calculează în continuare pătratul distanța d dintre articulațiile A_1 și A_2:

$$\mathbf{\Delta r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 \qquad (7.4) \qquad\qquad \begin{bmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x_2\\ y_2\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}x_1\\ y_1\end{bmatrix} \qquad (7.5)$$

$$\begin{cases}\Delta x = x_2 - x_1 \\ \Delta y = y_2 - y_1\end{cases} \quad (7.6) \qquad d^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 \quad (7.7)$$

Se determină în continuare lungimea l_2:

$$A_2B = A_2C + CB \quad (7.8) \qquad l_2 = k_2\sqrt{d^2 - (l_1 \sin\beta)^2} + l_1 \cos\beta \quad (7.9)$$

Calcularea unghiurilor α_1 și α_2 se face urmând procedura demonstrată pentru diada RRR. Succesiunea relațiilor finite este următoarea:

$$\sin\alpha_2 = \frac{(l_1\cos\beta - l_2)\cdot\Delta y + l_1\sin\beta\cdot\Delta x}{d^2} \quad (7.10)$$

$$\cos\alpha_2 = \frac{(l_1\cos\beta - l_2)\cdot\Delta x - l_1\sin\beta\cdot\Delta y}{d^2} \quad (7.11)$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 - \beta \qquad \begin{cases}\sin\alpha_1 = \sin\alpha_2\cos\beta - \cos\alpha_2\sin\beta \\ \cos\alpha_1 = \cos\alpha_2\cos\beta + \sin\alpha_2\sin\beta\end{cases} \quad (7.12)$$

Cu aceste unghiuri se pot forma matricele de rotație $\mathbf{rot}_{\alpha 1}$, $\mathbf{rot}_{\alpha 2}$ și $\mathbf{rot}_{\beta}$.

$$\mathbf{rot}_{\alpha 1} = \begin{bmatrix}\cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1 \\ \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1\end{bmatrix} \quad (7.13) \qquad \mathbf{rot}_{\alpha 2} = \begin{bmatrix}\cos\alpha_2 & -\sin\alpha_2 \\ \sin\alpha_2 & \cos\alpha_2\end{bmatrix} \quad (7.14)$$

$$\alpha_1 - \alpha_2 = -\beta \qquad \mathbf{rot}^t_{\alpha 2}\cdot\mathbf{rot}_{\alpha 1} = \begin{bmatrix}\cos\beta & \sin\beta \\ -\sin\beta & \cos\beta\end{bmatrix} = \mathbf{rot}^t_{\beta} \quad (7.15)$$

Coordonatele punctului B se calculează cu relațiile:

$$\begin{cases}x_B = x_1 + l_1\cos\alpha_1 \\ y_B = y_1 + l_1\sin\alpha_1\end{cases} \quad (7.16)$$

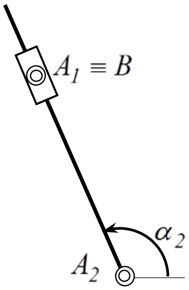


Fig.7.3

În cazul particular admis pentru această diadă centrele articulației A_1 și culisei B coincid (fig.7.3). În acest caz $l_1 = 0$ și nu există o variantă simetrică. Deși unghiul intern este nedeterminat, pentru a nu afecta algoritmul de calcul se introduce $\beta = 0$. Din relațiile de mai sus rezultă:

$$l_2 = d \qquad \sin\alpha_2 = \Delta y/d \qquad \cos\alpha_2 = \Delta x/d \quad (7.17)$$

$$\sin\alpha_1 = \sin\alpha_2 \qquad \cos\alpha_1 = \cos\alpha_2 \quad (7.18)$$

7.2 Analiza vitezelor

Date: $\bar{v}_1(v_{1x}, v_{2x})$, $\bar{v}_2(v_{2x}, v_{2y})$.

Cerute: vitezele unghiulare ω_1 și ω_2.

Din analiza pozițională se cunosc lungimea l_2, unghiurile α_1 și α_2.

Distribuția vitezelor pentru fiecare element este reprezentată în fig.7.4

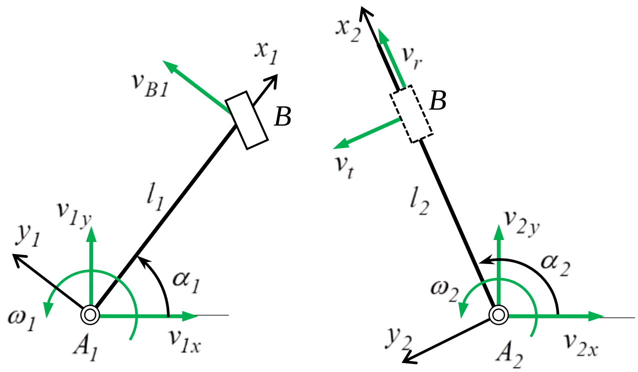


Fig.7.4

Pentru vitezele unghiulare ale elementelor este valabilă și în acest caz relația:

$$\beta = \alpha_2 - \alpha_1 \qquad \dot{\beta} = \dot{\alpha}_2 - \dot{\alpha}_1 \qquad 0 = \omega_2 - \omega_1 \qquad \omega_2 = \omega_1 \tag{7.19}$$

Pentru viteza punctului B relația vectorială este:

$$\bar{v}_B = \bar{v}_1 + \bar{v}_{B1} = \bar{v}_2 + \bar{v}_{B2} \tag{7.20}$$

Partea a doua a acestei ecuații se pune sub forma:

$$\bar{v}_{B1} - \bar{v}_{B2} = \bar{v}_2 - \bar{v}_1 = \Delta\bar{v} \tag{7.21}$$

În această relație intervine vectorul auxiliar:

$$\Delta\bar{v} = \bar{v}_2 - \bar{v}_1 \qquad \mathbf{\Delta v} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 \tag{7.22}$$

$$\begin{bmatrix} \Delta v_x \\ \Delta v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{2x} \\ v_{2y} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} v_{1x} \\ v_{1y} \end{bmatrix} \quad (7.23) \qquad \begin{cases} \Delta v_x = v_{2x} - v_{1x} \\ \Delta v_y = v_{2y} - v_{1y} \end{cases} \quad (7.24)$$

Prima parte a ecuației (7.21), cea care conține necunoscutele, este:

$$\bar{v}_{B1} - \bar{v}_{B2} = \Delta\bar{v} \qquad \mathbf{v}_{B1} - \mathbf{v}_{B2} = \mathbf{\Delta v} \tag{7.25}$$

Viteza culisei B în raport cu punctul A_2 are o componentă relativă și una de transport; viteza centrului culisei față de punctul A_1 are o singură componentă. În sistemele de referință locale, cu notațiile din fig.7.4, aceste viteze sunt:

$$\bar{v}_{B2} = \bar{v}_r + \bar{v}_t \qquad \mathbf{v}_{B2} = \begin{bmatrix} v_r \\ v_t \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v}_{B1} = \begin{bmatrix} 0 \\ v_{B1} \end{bmatrix} \tag{7.26}$$

Viteza v_{B1} și viteza de transport v_t sunt definite prin relațiile:

$$v_{B1} = l_1\omega_1 = l_1\omega_2 \quad (7.27) \qquad v_t = l_2\omega_2 \quad (7.28)$$

În sistemul de referință fix ecuația (7.25) are forma matriceală:

$$\mathbf{rot}_{\alpha 1}\cdot\mathbf{v}_{B1}-\mathbf{rot}_{\alpha 2}\cdot\mathbf{v}_{B2}=\mathbf{\Delta v} \tag{7.29}$$

$$\begin{bmatrix}\cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1\\ \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\ l_1\omega_2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\cos\alpha_2 & -\sin\alpha_2\\ \sin\alpha_2 & \cos\alpha_2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}v_r\\ l_2\omega_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\Delta v_x\\ \Delta v_y\end{bmatrix} \tag{7.30}$$

Se înmulțește ecuația la stânga cu transpusa matricii de rotație a unghiului α_2.

$$\mathbf{rot}^t_{\alpha 2}\cdot\mathbf{rot}_{\alpha 1}\cdot\mathbf{v}_{B1}-\mathbf{rot}^t_{\alpha 2}\cdot\mathbf{rot}_{\alpha 2}\cdot\mathbf{v}_{B2}=\mathbf{rot}^t_{\alpha 2}\cdot\mathbf{\Delta v} \tag{7.31}$$

Reamintind că $\mathbf{rot}^t_{\alpha 2}\cdot\mathbf{rot}_{\alpha 2}=\mathbf{1}$ și $\mathbf{rot}^t_{\alpha 2}\cdot\mathbf{rot}_{\alpha 2}=\mathbf{rot}^t_{\beta}$ se obține:

$$\mathbf{rot}^t_{\beta}\cdot\mathbf{v}_{B1}-\mathbf{v}_{B2}=\mathbf{rot}^t_{\alpha 2}\cdot\mathbf{\Delta v} \tag{7.32}$$

$$\begin{bmatrix}\cos\beta & \sin\beta\\ -\sin\beta & \cos\beta\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\ l_1\omega_2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}v_r\\ l_2\omega_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\alpha_2 & \sin\alpha_2\\ -\sin\alpha_2 & \cos\alpha_2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\Delta v_x\\ \Delta v_y\end{bmatrix} \tag{7.33}$$

Din această relație se obține sistemul de ecuații scalare:

$$\begin{cases} l_1\omega_2\sin\beta-v_r=\Delta v_x\cos\alpha_2+\Delta v_y\sin\alpha_2\\ (l_1\cos\beta-l_2)\,\omega_2=-\Delta v_x\sin\alpha_2+\Delta v_y\cos\alpha_2\end{cases} \tag{7.34}$$

Din cea de a doua ecuație se determină vitezele unghiulare comune:

$$\omega_2=\omega_1=\frac{\Delta v_y\cos\alpha_2-\Delta v_x\sin\alpha_2}{l_1\cos\beta-l_2} \tag{7.35}$$

iar din prima ecuație, ținând cont de (7.27), se obține viteza relativă a culisei:

$$v_r=v_{B1}\sin\beta-\Delta v_x\cos\alpha_2-\Delta v_y\sin\alpha_2 \tag{7.36}$$

Pentru viteza totală a culisei *B* se utilizează prima parte a relației (7.20):

$$\bar{v}_B=\bar{v}_1+\bar{v}_{B1} \qquad \mathbf{v}_B=\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_{B1} \tag{7.37}$$

$$\begin{bmatrix}v_{Bx}\\ v_{By}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}v_{1x}\\ v_{1y}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1\\ \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\ v_{B1}\end{bmatrix} \tag{7.38}$$

$$\begin{cases} v_{Bx}=v_{1x}-v_{B1}\sin\alpha_1\\ v_{By}=v_{1y}+v_{B1}\cos\alpha_1\end{cases} \tag{7.39}$$

$$v_B=\sqrt{(\Delta v_{Bx})^2+(\Delta v_{By})^2} \tag{7.40}$$

În cazul particular în care centrul articulației A_2 coincide cu centrul culisei *B*:

$$l_1=0 \qquad v_{B1}=l_1\omega_1=0 \qquad \bar{v}_B=\bar{v}_1 \tag{7.41}$$

7.3 Analiza accelerațiilor

Date: $\bar{a}_1(a_{1x}, a_{2x})$, $\bar{a}_2(a_{2x}, a_{2y})$.

Cerute: vitezele unghiulare ε_1 și ε_2.

Distribuția accelerațiilor este reprezentată în fig.7.5.

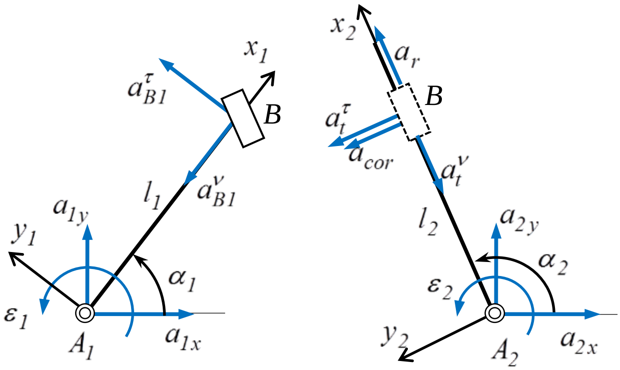


Fig.7.5

Din analiza pozițională se cunosc α_1, α_2, l_2 iar în analiza vitezelor au fost determinate vitezele unghiulare $\omega_1 = \omega_2$ și viteza relativă v_r.

Egalitatea vitezelor unghiulare (rel.7.19) va determina și egalitatea accelerațiilor unghiulare:

$$\omega_2 = \omega_1 \qquad \dot{\omega}_2 = \dot{\omega}_1 \qquad \varepsilon_2 = \varepsilon_1 \tag{7.42}$$

Cu notațiile din fig.7.5, accelerația punctului B care aparține ambelor elemente se exprimă prin ecuația vectorială:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_1 + \bar{a}_{B1} = \bar{a}_2 + \bar{a}_{B2} \tag{7.43}$$

Accelerația culisei B în raport cu punctul A_2 se compune din accelerația relativă, cea de transport (normală și tangențială) și accelerația Coriolis. Accelerația centrului culisei față de punctul A_1 are o componentă normală și una tangențială.

$$\bar{a}_{B1} = \bar{a}_{B1}^{\nu} + \bar{a}_{B1}^{\tau} \quad (7.44) \qquad \bar{a}_{B2} = \bar{a}_r + \bar{a}_t^{\nu} + \bar{a}_t^{\tau} + \bar{a}_{cor} \quad (7.45)$$

Pentru aceste accelerații relațiile de calcul sunt:

$$\begin{cases} a_{B1}^{\nu} = -l_1\,\omega_1^2 \\ a_{B1}^{\tau} = l_1\,\varepsilon_1 = l_1\varepsilon_2 \end{cases} \quad (7.46) \qquad \begin{cases} a_t^{\nu} = -l_2\,\omega_2^2 \\ a_t^{\tau} = l_2\,\varepsilon_2 \end{cases} \quad (7.47) \qquad a_{cor} = 2\,\omega_2\,v_r \quad (7.48)$$

Necunoscute sunt accelerația relativă și o accelerație unghiulară care apare în ambele componente tangențiale. Ecuația (7.43) se pune sub forma:

$$\bar{a}_{B1} - \bar{a}_{B2} = \bar{a}_2 - \bar{a}_1 = \Delta\bar{a} \tag{7.49}$$

Se calculează mai întâi accelerația auxiliară:

$$\Delta\bar{a} = \bar{a}_2 - \bar{a}_1 \qquad \mathbf{\Delta a} = \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1 \tag{7.50}$$

$$\begin{bmatrix} \Delta a_x \\ \Delta a_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{2x} \\ a_{2y} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_{1x} \\ a_{1y} \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} \Delta a_x = a_{2x} - a_{1x} \\ \Delta a_y = a_{2y} - a_{1x} \end{cases} \tag{7.51}$$

Ecuația vectorială pentru calculul necunoscutelor menționate este:

$$\bar{a}_{B1} - \bar{a}_{B2} = \Delta\bar{a} \tag{7.52}$$

Cei doi termeni din partea stângă au în sistemele locale formele matriceale:

$$\mathbf{a}_{B1} = \begin{bmatrix} a_{B1}^{\nu} \\ a_{B1}^{\tau} \end{bmatrix} \quad (6.50) \qquad \mathbf{a}_{B2} = \begin{bmatrix} a_t^{\nu} + a_r \\ a_t^{\tau} + a_{cor} \end{bmatrix} \tag{7.53}$$

În sistemul de referință fix, ecuația vectorială de mai sus ia forma matriceală:

$$\mathbf{rot}_{\alpha 1} \cdot \mathbf{a}_{B1} - \mathbf{rot}_{\alpha 2} \cdot \mathbf{a}_{B2} = \mathbf{\Delta a} \tag{7.54}$$

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1 \\ \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{B1}^{\nu} \\ a_{B1}^{\tau} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \cos\alpha_2 & -\sin\alpha_2 \\ \sin\alpha_2 & \cos\alpha_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_t^{\nu} + a_r \\ a_t^{\tau} + a_{cor} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta a_x \\ \Delta a_y \end{bmatrix} \tag{7.55}$$

Necunoscutele sunt accelerația relativă a_r și accelerația unghiulară ε_2 care apare în relațiile componentelor tangențiale. Se înmulțește la stânga această ecuație cu transpusa matricii de rotație a unghiului α_2:

$$\mathbf{rot}_{\alpha 2}^{t} \cdot \mathbf{rot}_{\alpha 1} \cdot \mathbf{a}_{B1} - \mathbf{rot}_{\alpha 2}^{t} \cdot \mathbf{rot}_{\alpha 2} \cdot \mathbf{a}_{B2} = \mathbf{rot}_{\alpha 2}^{t} \cdot \mathbf{\Delta a} \tag{7.56}$$

Reamintind că $\mathbf{rot}_{\alpha 2}^{t} \cdot \mathbf{rot}_{\alpha 1} = \mathbf{rot}_{\beta}^{t}$ și $\mathbf{rot}_{\alpha 2}^{t} \cdot \mathbf{rot}_{\alpha 2} = \mathbf{1}$ se obține:

$$\mathbf{rot}_{\beta}^{t} \cdot \mathbf{a}_{B1} - \mathbf{a}_{B2} = \mathbf{rot}_{\alpha 2}^{t} \cdot \mathbf{\Delta a} \tag{7.57}$$

$$\begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ -\sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{B1}^{\nu} \\ l_1\varepsilon_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_t^{\nu} + a_r \\ l_2\varepsilon_2 + a_{cor} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha_2 & \sin\alpha_2 \\ -\sin\alpha_2 & \cos\alpha_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta a_x \\ \Delta a_y \end{bmatrix} \tag{7.58}$$

$$\begin{cases} a_{B1}^{\nu}\cos\beta + l_1\varepsilon_2\sin\beta - a_t^{\nu} - a_r = \Delta a_x\cos\alpha_2 + \Delta a_y\sin\alpha_2 \\ -a_{B1}^{\nu}\sin\beta + (l_1\cos\beta - l_2)\varepsilon_2 - a_{cor} = -\Delta a_x\sin\alpha_2 + \Delta a_y\cos\alpha_2 \end{cases} \tag{7.59}$$

Din cea de a doua ecuație se determină accelerațiile unghiulare:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{1}{l_1\cos\beta - l_2} \cdot (-\Delta a_x\sin\alpha_2 + \Delta a_y\cos\alpha_2 + a_{B1}^{\nu}\sin\beta + a_{cor}) \tag{7.60}$$

Din prima ecuație, ținând cont și de (7.46), se determină accelerația relativă:

$$a_r = -\Delta a_x\cos\alpha_2 - \Delta a_y\sin\alpha_2 + a_{B1}^{\nu}\cos\beta + a_{B1}^{\tau}\sin\beta - a_t^{\nu} \tag{7.61}$$

Accelerația totală a culisei *B* se poate calcula folosind prima parte a ecuației vectoriale (7.43):

$$\bar{a}_B = \bar{a}_1 + \bar{a}_{B1} \qquad \mathbf{a}_B = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_{B1} \tag{7.62}$$

$$\begin{bmatrix} a_{Bx} \\ a_{By} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1x} \\ a_{1y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1 \\ \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{B1}^{\nu} \\ a_{B1}^{\tau} \end{bmatrix} \tag{7.63}$$

Rezultă în final:

$$\begin{cases} a_{Bx} = a_{1x} + a_{B1}^{\nu}\cos\alpha_1 - a_{B1}^{\tau}\sin\alpha_1 \\ a_{By} = a_{1y} + a_{B1}^{\nu}\sin\alpha_1 + a_{B1}^{\tau}\cos\alpha_1 \end{cases} \quad (7.64) \qquad a_B = \sqrt{a_{Bx}^2 + a_{By}^2} \quad (7.65$$

7.4 Algoritmul de calcul

	Analiza pozițională
1	$\Delta x = x_2 - x_1$
2	$\Delta y = y_2 - y_1$
3	$d^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$
4	$l_1 = k_2\sqrt{d^2 - (l_2 \sin\beta)^2} + l_2 \cos\beta$
5	$\sin\alpha_1 = [(l_1 - l_2 \cos\beta)\cdot \Delta y + l_2 \sin\beta \cdot \Delta x] / d^2$
6	$\cos\alpha_1 = [(l_1 - l_2 \cos\beta)\cdot \Delta x - l_2 \sin\beta \cdot \Delta y] / d^2$
7	$\sin\alpha_2 = \sin\alpha_1 \cos\beta + \cos\alpha_1 \sin\beta$
8	$\cos\alpha_2 = \cos\alpha_1 \cos\beta - \sin\alpha_1 \sin\beta$
9	$x_B = x_1 + l_1 \cos\alpha_1$
10	$y_B = y_1 + l_1 \sin\alpha_1$
	Analiza vitezelor
11	$\Delta v_x = v_{2x} - v_{1x}$
12	$\Delta v_y = v_{2y} - v_{1y}$
13	$\omega_2 = (\Delta v_y \cos\alpha_2 - \Delta v_x \sin\alpha_2) / (l_1 \cos\beta - l_2)$
14	$\omega_1 = \omega_2$
15	$v_{B2} = l_2\, \omega_2$
16	$v_r = v_{B2} \sin\beta - \Delta v_x \cos\alpha_2 - \Delta v_y \sin\alpha_2$
17	$v_{Bx} = v_{2x} - v_{B2} \sin\alpha_2$
18	$v_{By} = v_{2y} + v_{B2} \cos\alpha_2$
	Analiza accelerațiilor
19	$\Delta a_x = a_{2x} - a_{1x}$
20	$\Delta a_y = a_{2y} - a_{1x}$
21	$a_t^{\nu} = -l_1\, \omega_1^2$
22	$a_{B2}^{\nu} = -l_2\, \omega_2^2$
23	$a_{cor} = 2\,\omega_1\, v_r$
24	$\varepsilon_2 = (-\Delta a_x \sin\alpha_2 + \Delta a_y \cos\alpha_2 + a_{B1}^{\nu} \sin\beta + a_{cor}) / (l_1 \cos\beta - l_2)$
25	$\varepsilon_1 = \varepsilon_2$
26	$a_{B1}^{\tau} = l_1\, \varepsilon_1$
27	$a_r = -\Delta a_x \cos\alpha_2 - \Delta a_y \sin\alpha_2 + a_{B1}^{\nu} \cos\beta + a_{B1}^{\tau} \sin\beta - a_t^{\nu}$
28	$a_{Bx} = a_{1x} + a_{B1}^{\nu} \cos\alpha_1 - a_{B1}^{\tau} \sin\alpha_1$
29	$a_{By} = a_{1y} + a_{B1}^{\nu} \sin\alpha_1 + a_{B1}^{\tau} \cos\alpha_1$

8 DIADA TRR

8.1 Analiza pozițională

Date: $\bar{r}_{01}\,(x_{01}, y_{01})$, $\bar{r}_2(x_2, y_2)$, l_1, l_2, φ_1, γ_1, $k_1 = \pm 1$, $k_2 = \pm 1$

Cerute: $l_{01}, \alpha_1, \alpha_2$;

Caz particular: $l_1 = 0$

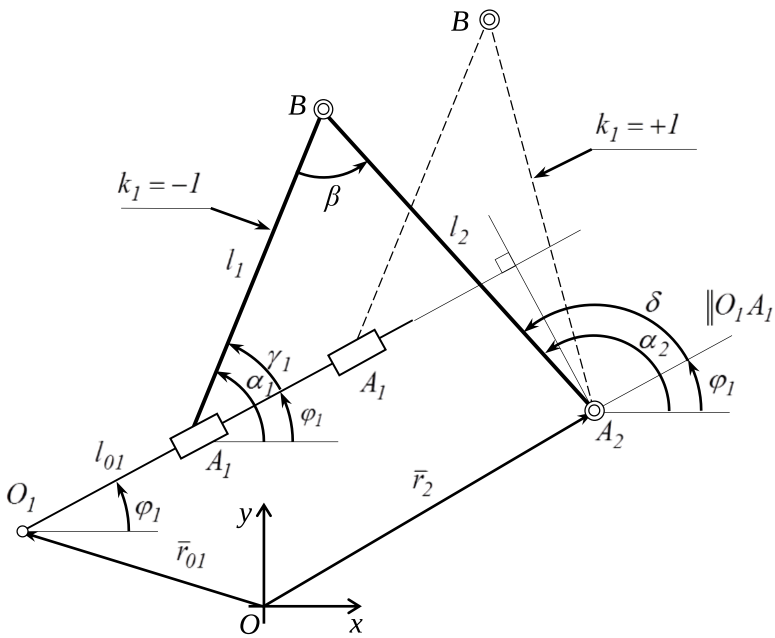


Fig.8.1

Diada TRR este reprezentată grafic în fig.8.1. Culisa din punctul A_1 alunecă pe un suport mobil care poate aparține unui element conducător sau unui element al altei diade. Poziția punctului de referință O_1 și unghiul de pozție φ ale suportului sunt date, necunoscută fiind poziția l_{01} a culisei. Se cunoaște deasemenea unghiul γ_1 pe care elementul A_1B îl face cu suportul. Acest unghi se măsoară între direcțiile pozitive ale suportului și elementului; definirea corectă a acestuia se face prin relația:

$$\gamma_1 = k_2 \cdot abs(\gamma_1) \tag{8.1}$$

în care indicatorul $k_2 = +1$ dacă unghiul este măsurat în sens trigonometric și $k_2 = -1$ dacă este măsurat în sens orar.

Poziția critică a diadei TRR intervine atunci când direcția elementului A_2B este perpendiculară pe suportul de translație al culisei A_1. Departajarea pozițiilor se face prin indicatorul k_1 a cărui valoare se va preciza în continuare.

Se observă că pentru unghiul α_1 și funcțiile sale există relațiile:

$$\alpha_1 = \varphi_1 + \gamma_1 \tag{8.2}$$

$$\begin{cases} \sin\alpha_1 = \sin\varphi_1\cos\gamma_1 + \cos\varphi_1\sin\gamma_1 \\ \cos\alpha_1 = \cos\varphi_1\cos\gamma_1 - \sin\varphi_1\sin\gamma_1 \end{cases} \tag{8.3}$$

Poziția punctului B este dată de ecuația vectorială:

$$\bar{r}_B = \bar{r}_{01} + \overline{O_1A_1} + \overline{A_1B} = \bar{r}_2 + \overline{A_2B} \tag{8.4}$$

Termenii acestei relații se grupează în modul următor:

$$\overline{O_1A_1} + \overline{A_2B} = \bar{r}_2 - \bar{r}_{01} - \overline{A_1B} = \Delta\bar{r} \tag{8.5}$$

Termenii cunoscuți se include în vectorul auxiliar $\Delta\bar{r}$:

$$\Delta\bar{r} = \bar{r}_2 - \bar{r}_{01} - \overline{A_1B} \qquad \mathbf{\Delta r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_{01} - \mathbf{rot}_{\alpha 1} \cdot \mathbf{L}_1 \tag{8.6}$$

La nivel matriceal și scalar acesta devine:

$$\begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_{01} \\ y_{01} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1 \\ \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{8.7}$$

$$\begin{cases} \Delta x = x_2 - x_{01} - l_1\cos\alpha_1 \\ \Delta y = y_2 - y_{01} - l_1\sin\alpha_1 \end{cases} \tag{8.8}$$

Prima parte a ecuației vectoriale (8.5) este:

$$\overline{O_1A_1} - \overline{A_2B} = \Delta\bar{r} \qquad \mathbf{rot}_{\varphi 1} \cdot \mathbf{L}_{01} - \mathbf{rot}_{\alpha 2} \cdot \mathbf{L}_2 = \mathbf{\Delta r} \tag{8.9}$$

cu dezvoltarea matriceal:

$$\begin{bmatrix} \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 \\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} l_{01} \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \cos\alpha_2 & -\sin\alpha_2 \\ \sin\alpha_2 & \cos\alpha_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} l_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} \tag{8.10}$$

Se înmulțește această ecuație matriceală la stânga cu transpusa matricii de rotație a unghiului φ_1. Se observă că prin înmulțirea acesteia cu matricea de rotație a unghiului α_2 se obține matricea de rotație a unghiului auxiliar $\delta = \alpha_2 - \varphi_1$ (fig.8.1).

$$\mathbf{rot}^t_{\varphi 1} \cdot \mathbf{rot}_{\varphi 1} \cdot \mathbf{L}_{01} - \mathbf{rot}^t_{\varphi 1} \cdot \mathbf{rot}_{\alpha 2} \cdot \mathbf{L}_2 = \mathbf{rot}^t_{\varphi 1} \cdot \mathbf{\Delta r} \tag{8.11}$$

Cu precizarea că $\mathbf{rot}^t_{\varphi 1} \cdot \mathbf{rot}_{\varphi 1} = \mathbf{1}$ și $\mathbf{rot}^t_{\varphi 1} \cdot \mathbf{rot}_{\alpha 2} = \mathbf{rot}_{\delta}$, această ecuație devine:

$$\mathbf{L}_{01} - \mathbf{rot}_{\delta} \cdot \mathbf{L}_2 = \mathbf{rot}^t_{\varphi 1} \cdot \mathbf{\Delta r} \tag{8.12}$$

$$\begin{bmatrix} l_{01} \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \cos\delta & -\sin\delta \\ \sin\delta & \cos\delta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} l_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi_1 & \sin\varphi_1 \\ -\sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} \tag{8.13}$$

Prin dezvoltarea acesteie rezultă sistemul de ecuații scalare:

$$\begin{cases} l_{01} - l_2\cos\delta = \Delta x\cos\varphi_1 + \Delta y\sin\varphi_1 \\ \quad -l_2\sin\delta = -\Delta x\sin\varphi_1 + \Delta y\cos\varphi_1 \end{cases} \tag{8.14}$$

ale cărui necunoscute sunt funcțiile trigonometrice ale unghiului δ și lungimea l_{01}.

Din a doua ecuație se determină:

$$\sin\delta = \frac{1}{l_2}(\Delta x\sin\varphi_1 - \Delta y\cos\varphi_1) \tag{8.15}$$

Din fig.8.1 se observă că pentru $\delta = \pi/2$ elementul A_2B este perpendicular pe suportul de translație al culisei A_1; în această situație sensul de continuare a mișcării este nedeterminat ceea ce corespunde poziției critice a diadei. Situarea elementului A_2B de o parte sau de alta a poziției critice se poate preciza printr-un indicator k_1 atașat relației de calcul a funcției $\cos\delta$:

$$\cos\delta = k_1 \cdot \sqrt{1 - (\sin\delta)^2} \tag{8.16}$$

Dacă $\delta < \pi/2$ funcția este pozitivă și se introduce $k_1 = +1$; pentru $\delta > \pi/2$ se va alege $k_1 = -1$.

Din prima ecuație (8.14) se calculează poziția culisei pe suport:

$$l_{01} = \Delta x \cos\varphi_1 + \Delta y \sin\varphi_1 + l_2 \cos\delta \tag{8.17}$$

Unghiul de poziție α_2 și funcțiile sale se determină cu relațiile:

$$\alpha_2 = \varphi_1 + \delta \quad (8.18) \qquad \begin{cases} \sin\alpha_2 = \sin\varphi_1 \cos\delta + \cos\varphi_1 \sin\delta \\ \cos\alpha_2 = \cos\varphi_1 \cos\delta - \sin\varphi_1 \sin\delta \end{cases} \tag{8.19}$$

Pentru poziția articulației B se folosește partea a doua a ecuației (8.4):

$$\bar{r}_B = \bar{r}_2 + \overline{A_2B} \qquad \mathbf{r}_B = \mathbf{r}_2 + \mathbf{rot}_{\alpha 2} \cdot \mathbf{L}_2 \tag{8.20}$$

$$\begin{bmatrix} x_B \\ y_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\alpha_2 & -\sin\alpha_2 \\ \sin\alpha_2 & \cos\alpha_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} l_2 \\ 0 \end{bmatrix} (8.21) \qquad \begin{cases} x_B = x_2 + l_2 \cos\alpha_2 \\ y_B = y_2 + l_2 \sin\alpha_2 \end{cases} \tag{8.22}$$

În cazul particular în care $l_1 = 0$ este evident că unghiul γ_1 este nedeterminat. Pentru a nu afecta calculele se va lua $\gamma_1 = 0$ și astfel va rezulta $\alpha_1 = \varphi_1$.

8.2 Analiza vitezelor

Date: $\bar{v}_{01}(v_{01x}, v_{01y})$, $\bar{v}_2(v_{2x}, v_{2y})$, ω_{01}.

Cerute: vitezele unghiulare ω_1 și ω_2, v_r.

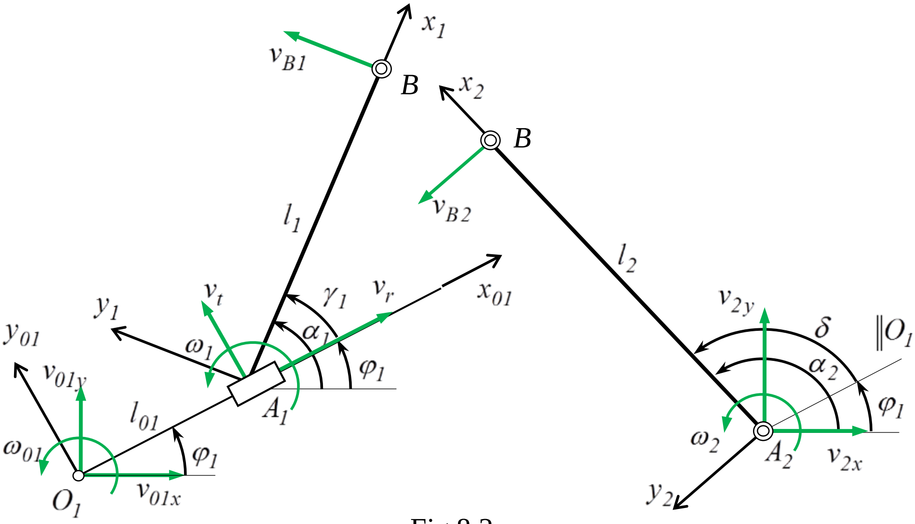


Fig.8.2

Din analiza pozițională se cunosc lungimea l_{01}, unghiurile α_1, α_2 și δ.

Distribuția vitezelor pentru fiecare element este prezentată în fig.8.2.

Din relația între unghiurile vecine culisei din punctul A_1, cu observația că unghiul γ_1 este constant, se determină:

$$\alpha_1 = \varphi_1 + \gamma_1 \qquad \dot{\alpha}_1 = \dot{\varphi}_1 \qquad \omega_1 = \omega_{01} \tag{8.23}$$

Pentru viteza articulației B există relația vectorială:

$$\bar{v}_B = \bar{v}_{01} + \bar{v}_r + \bar{v}_t + \bar{v}_{B1} = \bar{v}_2 + \bar{v}_{B2} \tag{8.24}$$

Pentru mărimile vitezelor din această ecuație există relațiile de calcul:

$$v_t = \omega_{01}\, l_{01} \qquad v_{B1} = \omega_1\, l_1 \qquad v_{B2} = \omega_2\, l_2 \tag{8.25}$$

Necunoscutele ecuației vectoriale sunt viteza relativă v_r a culisei și viteza unghiulară ω_2. Termenii ecuației (8.24) se grupează în modul următor:

$$\bar{v}_r - \bar{v}_{B2} = \Delta\bar{v} \tag{8.26}$$

în care $\Delta\bar{v}$ grupează toti termenii cunoscuți ai ecuației vectoriale.

$$\Delta\bar{v} = \bar{v}_2 - \bar{v}_{01} - \bar{v}_t - \bar{v}_{B1} \tag{8.27}$$

La nivel matriceal aceasta va lua forma:

$$\mathbf{\Delta v} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_{01} - \mathbf{rot}_{\varphi 1} \cdot \mathbf{v}_t - \mathbf{rot}_{\alpha 1} \cdot \mathbf{v}_{B1} \tag{8.28}$$

$$\begin{bmatrix} \Delta v_x \\ \Delta v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{2x} \\ v_{2y} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} v_{01x} \\ v_{01y} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 \\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ v_t \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1 \\ \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ v_{B1} \end{bmatrix} \tag{8.29}$$

Se deduc în continuare ecuațiile scalare:

$$\begin{cases} \Delta v_x = v_{2x} - v_{01x} + v_t \sin\varphi_1 + v_{B1} \sin\alpha_1 \\ \Delta v_y = v_{2y} - v_{01y} - v_t \cos\varphi_1 - v_{B1} \cos\alpha_1 \end{cases} \tag{8.30}$$

Relația matriceală corespuzătoare ecuației (8.26) este:

$$\mathbf{rot}_{\varphi 1} \cdot \mathbf{v}_r - \mathbf{rot}_{\alpha 1} \cdot \mathbf{v}_{B2} = \mathbf{\Delta v} \tag{8.31}$$

$$\begin{bmatrix} \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 \\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_r \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \cos\alpha_2 & -\sin\alpha_2 \\ \sin\alpha_2 & \cos\alpha_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_2\, l_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta v_x \\ \Delta v_y \end{bmatrix} \tag{8.32}$$

Se înmulțește aceasta la stânga cu transpusa matricii de rotație a unghiului φ_1.

$$\mathbf{rot}^t_{\varphi 1} \cdot \mathbf{rot}_{\varphi 1} \cdot \mathbf{v}_r - \mathbf{rot}^t_{\varphi 1} \cdot \mathbf{rot}_{\alpha 2} \cdot \mathbf{v}_{B2} = \mathbf{rot}^t_{\varphi 1} \cdot \mathbf{\Delta v} \tag{8.33}$$

Cu precizarea că $\mathbf{rot}^t_{\varphi 1} \cdot \mathbf{rot}_{\varphi 1} = \mathbf{1}$ și $\mathbf{rot}^t_{\varphi 1} \cdot \mathbf{rot}_{\alpha 2} = \mathbf{rot}_{\delta}$, această ecuație devine:

$$\mathbf{v}_r - \mathbf{rot}_{\delta} \cdot \mathbf{v}_{B2} = \mathbf{rot}^t_{\varphi 1} \cdot \mathbf{\Delta v} \tag{8.34}$$

$$\begin{bmatrix} v_r \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \cos\delta & -\sin\delta \\ \sin\delta & \cos\delta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ v_{B2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi_1 & \sin\varphi_1 \\ -\sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta v_x \\ \Delta v_y \end{bmatrix} \tag{8.35}$$

Se obține sistemul de ecuații scalare:

$$\begin{cases} v_r + v_{B2} \sin\delta = \Delta v_x \cos\varphi_1 + \Delta v_y \sin\varphi_1 \\ \quad -v_{B2} \cos\delta = -\Delta v_x \sin\varphi_1 + \Delta v_y \cos\varphi_1 \end{cases} \tag{8.36}$$

Din cea de a doua ecuație se determină viteza unghiulară:

$$v_{B2} = \frac{\Delta v_x \sin\varphi_1 - \Delta v_y \cos\varphi_1}{\cos\delta} \tag{8.37}$$

$$\omega_2 = \frac{v_{B2}}{l_2} \tag{8.38}$$

iar apoi din prima ecuație viteza relativă a culisei:

$$v_r = \Delta v_x \cos\varphi_1 + \Delta v_y \sin\varphi_1 - v_{B2} \sin\delta \tag{8.39}$$

Viteza articulației *B* se calculează din partea a doua a ecuației (8.24):

$$\bar{v}_B = \bar{v}_2 + \bar{v}_{B2} \qquad \mathbf{v}_B = \mathbf{v}_2 + \mathbf{rot}_{\alpha 2} \cdot \mathbf{v}_{B2} \tag{8.40}$$

$$\begin{bmatrix} v_{Bx} \\ v_{By} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{2x} \\ v_{2y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\alpha_2 & -\sin\alpha_2 \\ \sin\alpha_2 & \cos\alpha_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ v_{B2} \end{bmatrix} \tag{8.41}$$

$$\begin{cases} v_{Bx} = v_{2x} - v_{B2}\sin\alpha_2 \\ v_{By} = v_{2y} + v_{B2}\cos\alpha_2 \end{cases} \quad (8.42) \qquad v_B = \sqrt{v_{Bx}^2 + v_{By}^2} \quad (8.43)$$

Dacă $l_1 = 0$ rezultă că și $v_{B1} = 0$, calculul celorlalte viteze nefiind afectat.

8.3 Analiza accelerațiilor

Date: $\bar{a}_{01}(a_{01x}, a_{01y})$, $\bar{a}_2(a_{2x}, a_{2y})$, ε_{01}.

Cerute: vitezele unghiulare ε_1, ε_2. și accelerația relativă a_r.

Distribuția accelerațiilor pentru fiecare element este prezentată în fig.8.3.

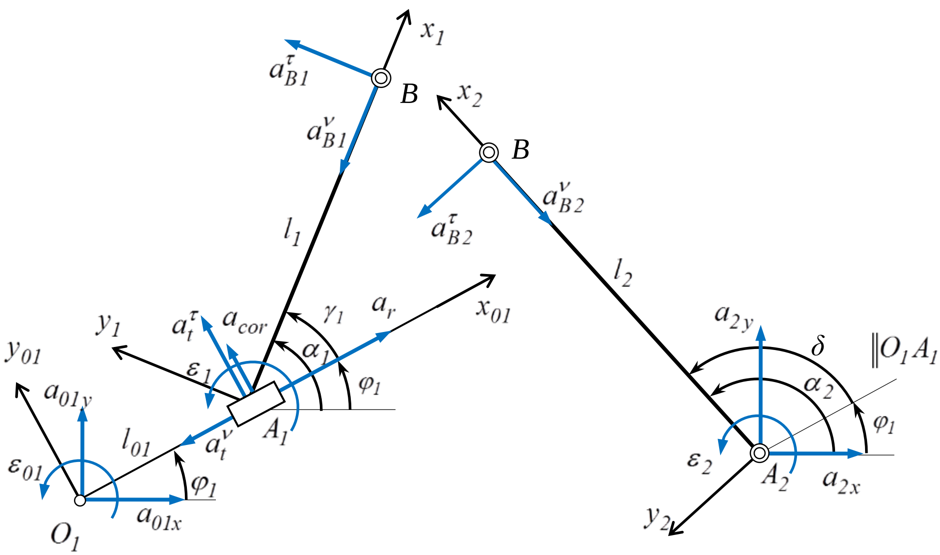


Fig.8.3

Din analiza pozițională se cunosc α_1, α_2, l_{01} iar din analiza vitezelor se cunosc vitezele unghiulare $\omega_1 = \omega_{01}$ și precum și viteza relativă v_r. Egalitatea vitezelor unghiulare (rel.8.23) se regăsește și la accelerațiile unghiulare:

$$\dot{\omega}_1 = \dot{\omega}_{01} \qquad \varepsilon_1 = \varepsilon_{01} \quad (8.44)$$

Se pornește analiza cu ecuația vectorială a accelerației articulației *B*:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_{01} + \bar{a}_r + \bar{a}_t + \bar{a}_{cor} + \bar{a}_{B1} = \bar{a}_2 + \bar{a}_{B2} \quad (8.45)$$

în care, cu notațiile din fig.8.3, există componentele:

$$\bar{a}_t = \bar{a}_t^{\nu} + \bar{a}_t^{\tau} \quad (8.46) \qquad \begin{cases} a_t^{\nu} = -\omega_{01}^2 l_{01} \\ a_t^{\tau} = \varepsilon_{01} l_{01} \end{cases} \quad (8.47)$$

$$\bar{a}_{B1} = \bar{a}_{B1}^{\nu} + \bar{a}_{B1}^{\tau} \quad (8.48) \qquad \begin{cases} a_{B1}^{\nu} = -\,\omega_1^2 l_1 \\ a_{B1}^{\tau} = \varepsilon_1 l_1 \end{cases} \quad (8.49)$$

$$\bar{a}_{B2} = \bar{a}_{B2}^{\nu} + \bar{a}_{B2}^{\tau} \quad (8.50) \qquad \begin{cases} a_{B2}^{\nu} = -\,\omega_2^2 l_2 \\ a_{B2}^{\tau} = \varepsilon_2 l_2 \end{cases} \quad (8.51)$$

La acestea se adaugă relația pentru accelerația Coriolis:

$$a_{cor} = 2\omega_{01} v_r \quad (8.52)$$

Necunoscutele ecuației vectoriale sunt accelerația relativă a_r a culisei pe suportul translației și accelerația unghiulară ε_2.

Se regrupează în mod corespunzător termenii ecuației (8.45):

$$\bar{a}_r - \bar{a}_{B2}^{\tau} = \Delta\bar{a} \tag{8.53}$$

Accelerațiile cunoscute se grupează în relația:

$$\Delta\bar{a} = \bar{a}_2 - \bar{a}_{01} - \bar{a}_t - \bar{a}_{cor} - \bar{a}_{B1} + \bar{a}_{B2}^{\nu} \tag{8.54}$$

Se dezvoltă această relație la nivel matriceal și scalar.

$$\mathbf{\Delta a} = (\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_{01}) - \mathbf{rot}_{\varphi 1} \cdot (\mathbf{a}_t + \mathbf{a}_{cor}) - \mathbf{rot}_{\alpha 1} \cdot \mathbf{a}_{B1} + \mathbf{rot}_{\alpha 2} \cdot \mathbf{a}_{B2}^{\nu} \tag{8.55}$$

$$\begin{gathered}\begin{bmatrix}\Delta\alpha_x \\ \Delta a_y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a_{2x} - a_{01x} \\ a_{2y} - a_{01y}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 \\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}a_t^{\nu} \\ a_t^{\tau} + a_{cor}\end{bmatrix} - \\ - \begin{bmatrix}\cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1 \\ \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}a_{B1}^{\nu} \\ a_{B1}^{\tau}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\cos\alpha_2 & -\sin\alpha_2 \\ \sin\alpha_2 & \cos\alpha_2\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}a_{B2}^{\nu} \\ 0\end{bmatrix}\end{gathered} \tag{8.56}$$

$$\begin{cases}\Delta a_x = a_{2x} - a_{01x} - a_t^{\nu}\cos\varphi_1 + (a_t^{\tau} + a_{cor})\sin\varphi_1 - \\ \qquad - a_{B1}^{\nu}\cos\alpha_1 + a_{B1}^{\tau}\sin\alpha_1 + a_{B2}^{\nu}\cos\alpha_2 \\ \Delta a_y = a_{2y} - a_{01y} - a_t^{\nu}\sin\varphi_1 - (a_t^{\tau} + a_{cor})\cos\varphi_1 - \\ \qquad - a_{B1}^{\nu}\sin\alpha_1 - a_{B1}^{\tau}\cos\alpha_1 + a_{B2}^{\nu}\sin\alpha_2\end{cases} \tag{8.57}$$

Ecuația (8.53) se pune sub formatriceală:

$$\mathbf{rot}_{\varphi 1} \cdot \mathbf{a}_r - \mathbf{rot}_{\alpha 2} \cdot \mathbf{a}_{B2}^{\tau} = \mathbf{\Delta a} \tag{8.58}$$

$$\begin{bmatrix}\cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 \\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}a_r \\ 0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\cos\alpha_2 & -\sin\alpha_2 \\ \sin\alpha_2 & \cos\alpha_2\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}0 \\ a_{B2}^{\tau}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\Delta\alpha_x \\ \Delta a_y\end{bmatrix} \tag{8.59}$$

Se înmulțește această ecuație la stânga cu transpusa matricii de rotație de unghi φ_1:

$$\mathbf{rot}_{\varphi 1}^{t} \cdot \mathbf{rot}_{\varphi 1} \cdot \mathbf{a}_r - \mathbf{rot}_{\varphi 1}^{t} \cdot \mathbf{rot}_{\alpha 2} \cdot \mathbf{a}_{B2}^{\tau} = \mathbf{rot}_{\varphi 1}^{t} \cdot \mathbf{\Delta a} \tag{8.60}$$

Cu precizarea că $\mathbf{rot}_{\varphi 1}^{t} \cdot \mathbf{rot}_{\varphi 1} = \mathbf{1}$ și $\mathbf{rot}_{\varphi 1}^{t} \cdot \mathbf{rot}_{\alpha 2} = \mathbf{rot}_{\delta}$, această ecuație devine:

$$\mathbf{a}_r - \mathbf{rot}_{\delta} \cdot \mathbf{a}_{B2}^{\tau} = \mathbf{rot}_{\varphi 1}^{t} \cdot \mathbf{\Delta a} \tag{8.61}$$

$$\begin{bmatrix}a_r \\ 0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\cos\delta & -\sin\delta \\ \sin\delta & \cos\delta\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}0 \\ a_{B2}^{\tau}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos\varphi_1 & \sin\varphi_1 \\ -\sin\varphi_1 & \cos\varphi_1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}\Delta a_x \\ \Delta a_y\end{bmatrix} \tag{8.62}$$

Se obține sistemul de ecuații scalare:

$$\begin{cases}a_r + a_{B2}^{\tau}\sin\delta = \Delta a_x\cos\varphi_1 + \Delta a_y\sin\varphi_1 \\ -a_{B2}^{\tau}\cos\delta = -\Delta a_x\sin\varphi_1 + \Delta a_y\cos\varphi_1\end{cases} \tag{8.63}$$

Din cea de a doua ecuație se determină accelerația unghiulară:

$$a_{B2}^{\tau} = \frac{\Delta a_x\sin\varphi - \Delta a_y\cos\varphi}{\cos\delta} \quad (8.64) \qquad \varepsilon_2 = \frac{a_{B2}^{\tau}}{l_2} \quad (8.65)$$

iar apoi din prima ecuație accelerația relativă a culisei:

$$a_r = \Delta a_x\cos\varphi_1 + \Delta a_y\sin\varphi_1 - a_{B2}^{\tau}\sin\delta \tag{8.66}$$

Accelerația articulației B se calculează din partea a doua a ecuației (8.45):

$$\bar{a}_B = \bar{a}_2 + \bar{a}_{B2} \qquad \mathbf{a}_B = \mathbf{a}_2 + \mathbf{rot}_{\alpha 2} \cdot \mathbf{a}_{B2} \tag{8.67}$$

$$\begin{bmatrix} a_{Bx} \\ a_{By} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{2x} \\ a_{2y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\alpha_2 & -\sin\alpha_2 \\ \sin\alpha_2 & \cos\alpha_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a^{\nu}_{B2} \\ a^{\tau}_{B2} \end{bmatrix} \tag{8.68}$$

$$\begin{cases} a_{Bx} = a_{2x} + a^{\nu}_{B2}\cos\alpha_2 - a^{\tau}_{B2}\sin\alpha_2 \\ a_{By} = a_{2y} + a^{\nu}_{B2}\sin\alpha_2 + a^{\tau}_{B2}\cos\alpha_2 \end{cases} \quad (8.69) \qquad a_B = \sqrt{a^2_{Bx} + a^2_{By}} \quad (8.70)$$

În cazul particular în care $l_1 = 0$ rezultă că $a^{\nu}_{B1} = 0$ și $a^{\tau}_{B1} = 0$, calculul celorlalte accelerații nefiind afectat.

8.4 Algoritmul de calcul

	Analiza pozițională
1	$\sin\alpha_1 = \sin\varphi_1\cos\gamma_1 + \cos\varphi_1\sin\gamma_1$
2	$\cos\alpha_1 = \cos\varphi_1\cos\gamma_1 - \sin\varphi_1\sin\gamma_1$
3	$\Delta x = x_2 - x_{01} - l_1\cos\alpha_1$
4	$\Delta y = y_2 - y_{01} - l_1\sin\alpha_1$
5	$\sin\alpha_1 = [(l_1 - l_2\cos\beta)\cdot\Delta y + l_2\sin\beta\cdot\Delta x]/d^2$
6	$\cos\alpha_1 = [(l_1 - l_2\cos\beta)\cdot\Delta x - l_2\sin\beta\cdot\Delta y]/d^2$
7	$\sin\delta = (\Delta x\sin\varphi_1 - \Delta y\cos\varphi_1)/l_2$
8	$\cos\delta = k_1\cdot\sqrt{1-(\sin\delta)^2}$
9	$l_{01} = \Delta x\cos\varphi_1 + \Delta y\sin\varphi_1 + l_2\cos\delta$
10	$\sin\alpha_2 = \sin\varphi_1\cos\delta + \cos\varphi_1\sin\delta$
11	$\cos\alpha_2 = \cos\varphi_1\cos\delta - \sin\varphi_1\sin\delta$
12	$x_B = x_2 + l_2\cos\alpha_2$
13	$y_B = y_2 + l_2\sin\alpha_2$

Analiza vitezelor	
14	$\omega_1 = \omega_{01}$
15	$v_t = \omega_{01}\, l_{01}$
16	$v_{B1} = \omega_1\, l_1$
17	$\Delta v_x = v_{2x} - v_{01x} + v_t \sin\varphi_1 + v_{B1}\sin\alpha_1$
18	$\Delta v_y = v_{2y} - v_{01y} - v_t \cos\varphi_1 - v_{B1}\cos\alpha_1$
19	$v_{B2} = (\Delta v_x \sin\varphi_1 - \Delta v_y \cos\varphi_1) / \cos\delta$
20	$\omega_2 = v_{B2} / l_2$
21	$v_r = \Delta v_x \cos\varphi_1 + \Delta v_y \sin\varphi_1 - v_{B2}\sin\delta$
22	$v_{Bx} = v_{2x} - v_{B2}\sin\alpha_2$
23	$v_{By} = v_{2y} + v_{B2}\cos\alpha_2$
Analiza accelerațiilor	
24	$\varepsilon_1 = \varepsilon_{01}$
25	$a_t^{\nu} = -\omega_{01}^2\, l_{01}$
26	$a_t^{\tau} = \varepsilon_{01}\, l_{01}$
27	$a_{cor} = 2\,\omega_{01}\, v_r$
28	$a_{B1}^{\nu} = -\,\omega_1^2\, l_1$
29	$a_{B1}^{\tau} = \varepsilon_1\, l_1$
30	$a_{B2}^{\nu} = -\,\omega_2^2\, l_2$
31	$\Delta a_x = a_{2x} - a_{01x} - a_t^{\nu}\cos\varphi_1 + (a_t^{\tau} + a_{cor})\sin\varphi_1 - a_{B1}^{\nu}\cos\alpha_1 + a_{B1}^{\tau}\sin\alpha_1 + a_{B2}^{\nu}\cos\alpha_2$
32	$\Delta a_y = a_{2y} - a_{01y} - a_t^{\nu}\sin\varphi_1 - (a_t^{\tau} + a_{cor})\cos\varphi_1 - a_{B1}^{\nu}\sin\alpha_1 - a_{B1}^{\tau}\cos\alpha_1 + a_{B2}^{\nu}\sin\alpha_2$
33	$a_{B2}^{\tau} = \Delta a_x \sin\varphi - \Delta a_y \cos\varphi / \cos\delta$
34	$\varepsilon_2 = a_{B2}^{\tau} / l_2$
35	$a_{Bx} = a_{2x} + a_{B2}^{\nu}\cos\alpha_2 - a_{B2}^{\tau}\sin\alpha_2$
36	$a_{By} = a_{2y} + a_{B2}^{\nu}\sin\alpha_2 + a_{B2}^{\tau}\cos\alpha_2$

9 DIADA RRT

9.1 Analiza pozițională

Date: $\bar{r}_1(x_1, y_1)$, $\bar{r}_{02}(x_{02}, y_{02})$, l_1, l_2, φ_2, γ_2, $k_1 = \pm 1$, $k_2 = \pm 1$

Cerute: l_{02}, α_1, α_2;

Caz particular: $l_2 = 0$.

Diada TRR este reprezentată grafic în fig.9.1.

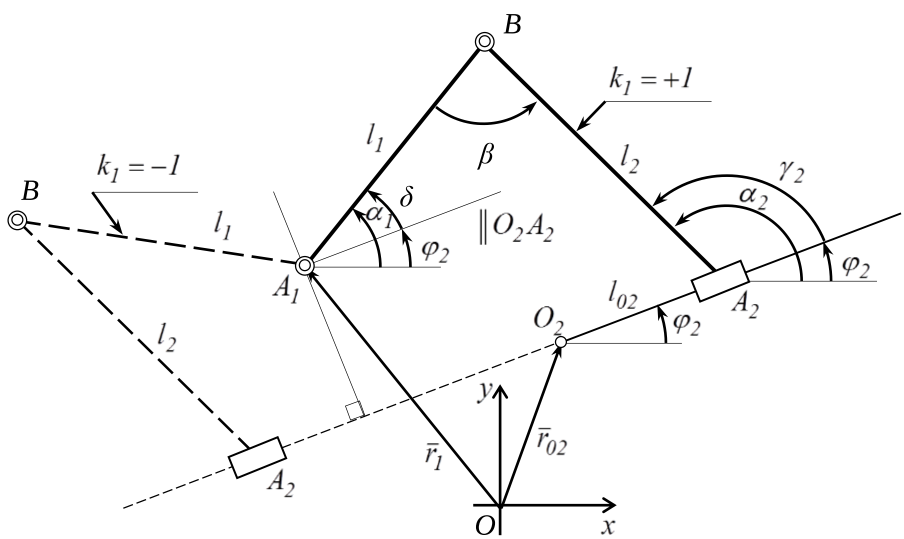


Fig.9.1

Culisa din punctul A_2 alunecă pe un suport mobil care poate aparține unui element conducător sau unui element al altei diade. Poziția punctului de referință O_2 și unghiul de pozție φ_2 ale suportului sunt date, necunoscută fiind poziția l_{02} a culisei. Se cunoaște deasemenea unghiul γ_2 pe care elementul A_2B îl face cu suportul. Acest unghi se măsoară între direcțiile pozitive ale suportului și elementului; definirea corectă a acestuia se face prin relația:

$$\gamma_2 = k_2 \cdot abs(\gamma_2) \tag{9.1}$$

în care indicatorul $k_2 = +1$ dacă unghiul este măsurat în sens trigonometric și $k_2 = -1$ dacă este măsurat în sens orar.

Poziția critică a diadei RRT intervine atunci când direcția elementului A_1B este perpendiculară pe suportul de translație al culisei A_2. Departajarea pozițiilor se face prin indicatorul k_1 a cărui valoare se va preciza în continuare.

Se observă că pentru unghiul α_1 și funcțiile sale există relațiile:

$$\alpha_2 = \varphi_2 + \gamma_2 \tag{9.2}$$

$$\begin{cases} \sin\alpha_2 = \sin\varphi_2 \cos\gamma_2 + \cos\varphi_2 \sin\gamma_2 \\ \cos\alpha_2 = \cos\varphi_2 \cos\gamma_2 - \sin\varphi_2 \sin\gamma_2 \end{cases} \tag{9.3}$$

Poziția punctului B este dată de ecuația vectorială:

$$\bar{r}_B = \bar{r}_1 + \overline{A_1B} = \bar{r}_{02} + \overline{O_2A_2} + \overline{A_2B} \tag{9.4}$$

$$\overline{A_1B} - \overline{O_2A_2} = \bar{r}_{02} - \bar{r}_1 + \overline{A_2B} = \Delta\bar{r} \tag{9.5}$$

Termenii cunoscuți ai acestei ecuații se grupează în vectorul auxiliar:

$$\Delta\bar{r} = \bar{r}_{02} - \bar{r}_1 + \overline{A_2B} \tag{9.6}$$

La nivel matriceal și scalar aceasta devine:

$$\mathbf{\Delta r} = \mathbf{r}_{02} - \mathbf{r}_1 + \mathbf{rot}_{\alpha 2} \cdot \mathbf{L}_2 \tag{9.7}$$

$$\begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{02} - x_1 \\ y_{02} - y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\alpha_2 & -\sin\alpha_2 \\ \sin\alpha_2 & \cos\alpha_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} l_2 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{9.8}$$

$$\begin{cases} \Delta x = x_{02} - x_1 + l_2\cos\alpha_2 \\ \Delta y = y_{02} - y_1 + l_2\sin\alpha_2 \end{cases} \tag{9.9}$$

Prima parte a ecuației vectoriale (9.5), respectiv:

$$\overline{A_1B} - \overline{O_2A_2} = \Delta\bar{r} \tag{9.10}$$

are dezvoltarea matriceală:

$$\mathbf{rot}_{\alpha 1} \cdot \mathbf{L}_1 - \mathbf{rot}_{\varphi 2} \cdot \mathbf{L}_{02} = \mathbf{\Delta r} \tag{9.11}$$

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1 \\ \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \cos\varphi_2 & -\sin\varphi_2 \\ \sin\varphi_2 & \cos\varphi_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} l_{02} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} \tag{9.12}$$

Se înmulțește această ecuație matriceală la stânga cu transpusa matricii de rotație a unghiului φ_2. Prin înmulțirea acesteia cu matricea de rotație a unghiului α_1 se obține matricea de rotație a unghiului auxiliar $\delta = \alpha_1 - \varphi_2$ (fig.9.1):

$$\mathbf{rot}^t_{\varphi 2} \cdot \mathbf{rot}_{\alpha 1} \cdot \mathbf{L}_1 - \mathbf{rot}^t_{\varphi 2} \cdot \mathbf{rot}_{\varphi 2} \cdot \mathbf{L}_{02} = \mathbf{rot}^t_{\varphi 2} \cdot \mathbf{\Delta r} \tag{9.13}$$

Se observă că $\mathbf{rot}^t_{\varphi 2} \cdot \mathbf{rot}_{\alpha 1} = \mathbf{rot}_{\delta}$ și $\mathbf{rot}^t_{\varphi 2} \cdot \mathbf{rot}_{\varphi 2} = \mathbf{1}$. Ecuația de mai sus devine:

$$\mathbf{rot}_{\delta} \cdot \mathbf{L}_1 - \mathbf{L}_{02} = \mathbf{rot}^t_{\varphi 2} \cdot \mathbf{\Delta r} \tag{9.14}$$

$$\begin{bmatrix} \cos\delta & -\sin\delta \\ \sin\delta & \cos\delta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l_{02} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi_2 & \sin\varphi_2 \\ -\sin\varphi_2 & \cos\varphi_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} \tag{9.15}$$

Prin dezvoltarea acesteie rezultă sistemul de ecuații scalare:

$$\begin{cases} l_1\cos\delta - l_{02} = \Delta x\cos\varphi_2 + \Delta y\sin\varphi_2 \\ l_1\sin\delta = -\Delta x\sin\varphi_2 + \Delta y\cos\varphi_2 \end{cases} \tag{9.16}$$

în care sunt necunoscute funcțiile trigonometrice ale unghiului δ și lungimea l_{02}.

Din a doua ecuație se determină:

$$\sin\delta = \frac{1}{l_1}(-\Delta x\sin\varphi_2 + \Delta y\cos\varphi_2) \tag{9.17}$$

Din fig.9.1 se observă că pentru $\delta = \pi/2$ elementul A_1B este perpendicular pe suportul de translație al culisei A_2; în această situație sensul de continuare a mișcării este nedeterminat ceea ce corespunde poziției critice a diadei.

Situarea elementului A_1B de o parte sau de alta a poziției critice se poate preciza printr-un indicator k_1 atașat relației de calcul a funcției $\cos\delta$:

$$\cos\delta = k_1 \cdot \sqrt{1-(\sin\delta)^2} \qquad (9.18)$$

Dacă $\delta < \pi/2$ funcția este pozitivă și se introduce $k_1 = +1$; pentru $\delta > \pi/2$ se va alege $k_1 = -1$. Din prima ecuație (9.16) se calculează poziția culisei pe suport:

$$l_{02} = l_1 \cos\delta - \Delta x \cos\varphi_2 - \Delta y \sin\varphi_2 \qquad (9.19)$$

Unghiul de poziție α_1 și funcțiile sale se determină cu relațiile:

$$\alpha_1 = \varphi_2 + \delta \qquad (9.20) \qquad \begin{cases} \sin\alpha_1 = \sin\varphi_2\cos\delta + \cos\varphi_2\sin\delta \\ \cos\alpha_1 = \cos\varphi_2\cos\delta - \sin\varphi_2\sin\delta \end{cases} \qquad (9.21)$$

Pentru poziția articulației B se folosește partea întâia a ecuației (9.4):

$$\bar{r}_B = \bar{r}_1 + \overline{A_1B} \qquad \mathbf{r}_B = \mathbf{r}_1 + \mathbf{rot}_{\alpha 1} \cdot \mathbf{L}_1 \qquad (9.22)$$

$$\begin{bmatrix} x_B \\ y_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1 \\ \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \end{bmatrix} (9.23) \qquad \begin{cases} x_B = x_1 + l_1\cos\alpha_1 \\ y_B = y_1 + l_1\sin\alpha_1 \end{cases} \qquad (9.24)$$

În cazul particular în care $l_2 = 0$ este evident că unghiul γ este nedeterminat. Pentru a nu afecta calculele se va lua $\gamma_2 = 0$ și astfel va rezulta $\alpha_2 = \varphi$.

9.2 Analiza vitezelor

Date: $\bar{v}_1(v_{1x}, v_{1y})$, $\bar{v}_{02}(v_{02x}, v_{02y})$, ω_{02}.

Cerute: vitezele unghiulare ω_1 și ω_2, v_r.

Din analiza pozițională se cunosc lungimea l_{02}, unghiurile α_1, α_2 și δ.

Distribuția vitezelor pentru fiecare element este prezentată în fig.9.2.

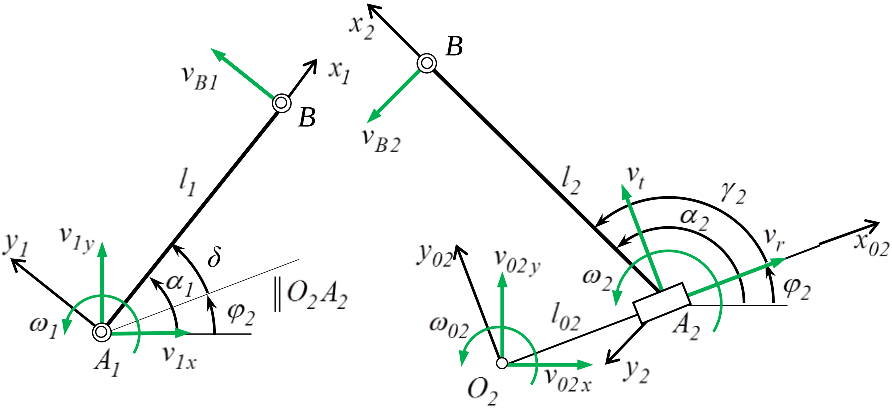


Fig.9.2

Din relația între unghiurile vecine culisei din punctul A_2, cu observația că unghiul γ_2 este constant, se detrmină:

$$\alpha_2 = \varphi_2 + \gamma_2 \qquad \dot{\alpha}_2 = \dot{\varphi}_2 \qquad \omega_2 = \omega_{02} \qquad (9.25)$$

Pentru viteza articulației B există relația vectorială:

$$\bar{v}_B = \bar{v}_1 + \bar{v}_{B1} = \bar{v}_{02} + \bar{v}_r + \bar{v}_t + \bar{v}_{B2} \tag{9.26}$$

care se reordonează sub forma:

$$\bar{v}_{B1} - \bar{v}_r = \bar{v}_{02} - \bar{v}_1 + \bar{v}_t + \bar{v}_{B2} = \Delta\bar{v} \tag{9.27}$$

Pentru mărimile vitezelor din această ecuație există relațiile de calcul:

$$v_t = \omega_{02}\, l_{02} \qquad v_{B1} = \omega_1\, l_1 \qquad v_{B2} = \omega_2\, l_2 \tag{9.28}$$

Termenii cunoscuți ai ecuației (9.27) se grupează în vectorul auxiliar $\Delta\bar{v}$.

$$\Delta\bar{v} = \bar{v}_{02} - \bar{v}_1 + \bar{v}_t + \bar{v}_{B2} \tag{9.29}$$

$$\mathbf{\Delta v} = \mathbf{v}_{02} - \mathbf{v}_1 + \mathbf{rot}_{\varphi 2} \cdot \mathbf{v}_t + \mathbf{rot}_{\alpha 2} \cdot \mathbf{v}_{B2} \tag{9.30}$$

$$\begin{bmatrix} \Delta v_x \\ \Delta v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{02x} - v_{1x} \\ v_{02y} - v_{1y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\varphi_2 & -\sin\varphi_2 \\ \sin\varphi_2 & \cos\varphi_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ v_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\alpha_2 & -\sin\alpha_2 \\ \sin\alpha_2 & \cos\alpha_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ v_{B2} \end{bmatrix} \tag{9.31}$$

$$\begin{cases} \Delta v_x = v_{02x} - v_{1x} - v_t \sin\varphi_2 - v_{B2} \sin\alpha_2 \\ \Delta v_y = v_{02y} - v_{1y} + v_t \cos\varphi_2 + v_{B2} \cos\alpha_2 \end{cases} \tag{9.32}$$

Necunoscutele ecuației vectoriale sunt viteza relativă v_r a culisei și viteza unghiulară ω_1 prin intermediul vitezei v_{B1}. Din ecuația (9.27) se extrage:

$$\bar{v}_{B1} - \bar{v}_r = \Delta\bar{v} \tag{9.33}$$

Relația matriceală corespuzătoare este:

$$\mathbf{rot}_{\alpha 1} \cdot \mathbf{v}_{B1} - \mathbf{rot}_{\varphi 2} \cdot \mathbf{v}_r = \mathbf{\Delta v} \tag{9.34}$$

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1 \\ \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ v_{B1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \cos\varphi_2 & -\sin\varphi_2 \\ \sin\varphi_2 & \cos\varphi_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_r \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta v_x \\ \Delta v_y \end{bmatrix} \tag{9.35}$$

Se înmulțește aceasta la stânga cu transpusa matricii de rotație a unghiului φ_2:

$$\mathbf{rot}^t_{\varphi 2} \cdot \mathbf{rot}_{\alpha 1} \cdot \mathbf{v}_{B1} - \mathbf{rot}^t_{\varphi 2} \cdot \mathbf{rot}_{\varphi 2} \cdot \mathbf{v}_r = \mathbf{rot}^t_{\varphi 2} \cdot \mathbf{\Delta v} \tag{9.36}$$

Reamintind că $\mathbf{rot}^t_{\varphi 2} \cdot \mathbf{rot}_{\alpha 1} = \mathbf{rot}_{\delta}$ și $\mathbf{rot}^t_{\varphi 2} \cdot \mathbf{rot}_{\varphi 2} = \mathbf{1}$, ecuația de mai sus devine:

$$\mathbf{rot}_{\delta} \cdot \mathbf{v}_{B1} - \mathbf{v}_r = \mathbf{rot}^t_{\varphi 2} \cdot \mathbf{\Delta v} \tag{9.37}$$

$$\begin{bmatrix} \cos\delta & -\sin\delta \\ \sin\delta & \cos\delta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ v_{B1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} v_r \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi_2 & \sin\varphi_2 \\ -\sin\varphi_2 & \cos\varphi_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta v_x \\ \Delta v_y \end{bmatrix} \tag{9.38}$$

Se obține sistemul de ecuații scalare:

$$\begin{cases} -v_{B1} \sin\delta - v_r + = \Delta v_x \cos\varphi_2 + \Delta v_y \sin\varphi_2 \\ v_{B1} \cos\delta = -\Delta v_x \sin\varphi_2 + \Delta v_y \cos\varphi_2 \end{cases} \tag{9.39}$$

Din cea de a doua ecuație se determină viteza unghiulară:

$$v_{B1} = \frac{-\Delta v_x \sin\varphi_2 + \Delta v_y \cos\varphi_2}{\cos\delta} \quad (9.40) \qquad \omega_1 = \frac{v_{B1}}{l_1} \quad (9.41)$$

iar apoi din prima ecuație viteza relativă a culisei:

$$v_r = \Delta v_x \cos\varphi_2 + \Delta v_y \sin\varphi_2 + v_{B1} \sin\delta \tag{9.42}$$

Viteza articulației B se calculează din orima parte a ecuației (9.26):

$$\bar{v}_B = \bar{v}_1 + \bar{v}_{B1} \qquad \mathbf{v}_B = \mathbf{v}_1 + \mathbf{rot}_{\alpha 1} \cdot \mathbf{v}_{B1} \tag{9.43}$$

$$\begin{bmatrix} v_{Bx} \\ v_{By} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{1x} \\ v_{1y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1 \\ \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ v_{B1} \end{bmatrix} \tag{9.44}$$

$$\begin{cases} v_{Bx} = v_{1x} - v_{B1}\sin\alpha_1 \\ v_{By} = v_{1y} + v_{B1}\cos\alpha_1 \end{cases} \tag{9.45}$$

$$v_B = \sqrt{v_{Bx}^2 + v_{By}^2} \tag{9.46}$$

În cazul particular în care $l_2 = 0$ rezultă că și $v_{B2} = 0$, calculul celorlalte viteze nefiind afectat.

9.3 Analiza accelerațiilor

Date: $\bar{a}_{02}(a_{02x}, a_{02y})$, $\bar{a}_1(a_{1x}, a_{1y})$, ε_{02}.

Cerute: vitezele unghiulare ε_1, ε_2. și accelerația relativă a_r.

Distribuția accelerațiilor pentru fiecare element este prezentată în fig.9.3.

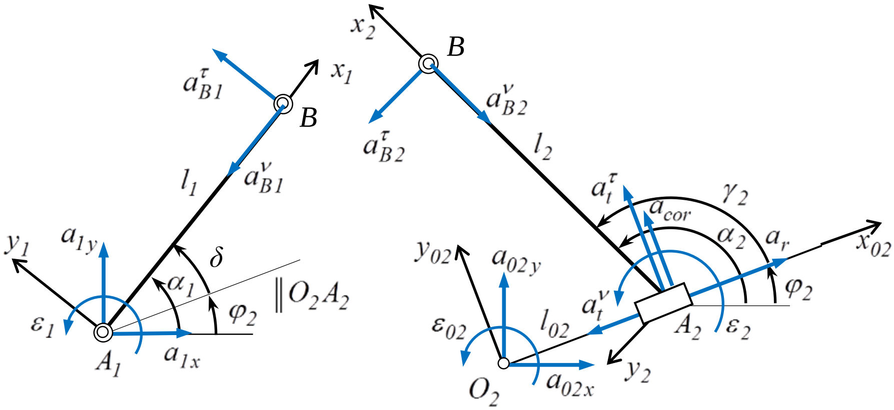


Fig.9.3

Din analiza pozițională se cunosc α_1, α_2, l_{02} iar din analiza vitezelor se cunosc vitezele unghiulare $\omega_2 = \omega_{02}$ și precum și viteza relativă v_r. Egalitatea vitezelor unghiulare (rel.9.25) se regăsește și la accelerațiile unghiulare:

$$\dot{\omega}_2 = \dot{\omega}_{02} \qquad \varepsilon_2 = \varepsilon_{02} \tag{9.47}$$

Se pornește analiza cu ecuația vectorială a accelerației articulației *B*:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_1 + \bar{a}_{B1} = \bar{a}_{02} + \bar{a}_r + \bar{a}_t + \bar{a}_{cor} + \bar{a}_{B2} \tag{9.48}$$

Termenii acesteia se regrupează în modul următor:

$$\bar{a}_{B1}^{\tau} - \bar{a}_r = \bar{a}_{02} - \bar{a}_1 + \bar{a}_t + \bar{a}_{cor} + \bar{a}_{B2} - \bar{a}_{B1}^{\nu} = \Delta\bar{a} \qquad (9.49($$

Cu notațiile din fig.9.3, există componentele:

$$\bar{a}_t = \bar{a}_t^{\nu} + \bar{a}_t^{\tau} \tag{9.50}$$

$$\begin{cases} a_t^{\nu} = -\omega_{02}^2 l_{02} \\ a_t^{\tau} = \varepsilon_{02} l_{02} \end{cases} \tag{9.51}$$

$$\bar{a}_{B1} = \bar{a}_{B1}^{\nu} + \bar{a}_{B1}^{\tau} \tag{9.52}$$

$$\begin{cases} a_{B1}^{\nu} = -\omega_1^2 l_1 \\ a_{B1}^{\tau} = \varepsilon_1 l_1 \end{cases} \tag{9.53}$$

$$\bar{a}_{B2} = \bar{a}_{B2}^{\nu} + \bar{a}_{B2}^{\tau} \tag{9.54}$$

$$\begin{cases} a_{B2}^{\nu} = -\omega_2^2 l_2 \\ a_{B2}^{\tau} = \varepsilon_2 l_2 \end{cases} \tag{9.55}$$

La acestea se adaugă relația pentru accelerația Coriolis:

$$a_{cor} = 2\,\omega_{02}\, v_r \tag{9.56}$$

Se calculează mai întâi accelerația auxiliară $\Delta\bar{a}$.

$$\Delta\bar{a} = \bar{a}_{02} - \bar{a}_1 + \bar{a}_t + \bar{a}_{cor} + \bar{a}_{B2} - \bar{a}^{\nu}_{B1} \tag{9.57}$$

Se dezvoltă această relație la nivel matriceal și scalar.

$$\mathbf{\Delta a} = \mathbf{a}_{02} - \mathbf{a}_1 + \mathbf{rot}_{\varphi 2}\cdot(\mathbf{a}_t + \mathbf{a}_{cor}) + \mathbf{rot}_{\alpha 2}\cdot\mathbf{a}_{B2} - \mathbf{rot}_{\alpha 1}\cdot\mathbf{a}^{\nu}_{B1} \tag{9.58}$$

$$\begin{bmatrix}\Delta a_x\\ \Delta a_y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a_{02x} - a_{1x}\\ a_{02y} - a_{1y}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\cos\varphi_2 & -\sin\varphi_2\\ \sin\varphi_2 & \cos\varphi_2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}a^{\nu}_t\\ a^{\tau}_t + a_{cor}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\cos\alpha_2 & -\sin\alpha_2\\ \sin\alpha_2 & \cos\alpha_2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}a^{\nu}_{B2}\\ a^{\tau}_{B2}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1\\ \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}a^{\nu}_{B1}\\ 0\end{bmatrix} \tag{9.59}$$

$$\begin{cases}\Delta a_x = a_{02x} - a_{1x} + a^{\nu}_t\cos\varphi_2 - (a^{\tau}_t + a_{cor})\sin\varphi_2 + \\ \qquad + a^{\nu}_{B2}\cos\alpha_2 - a^{\tau}_{B2}\sin\alpha_2 - a^{\nu}_{B1}\cos\alpha_1\\ \Delta a_y = a_{02y} - a_{1y} + a^{\nu}_t\sin\varphi_2 + (a^{\tau}_t + a_{cor})\cos\varphi_2 + \\ \qquad + a^{\nu}_{B2}\sin\alpha_2 + a^{\tau}_{B2}\cos\alpha_2 - a^{\nu}_{B1}\sin\alpha_1\end{cases} \tag{9.60}$$

Necunoscutele ecuației vectoriale (9.49) sunt accelerația relativă a_r a culisei pe suportul translației și accelerația unghiulară ε_1 inclusă în relația pentru calculul accelerației tangențiale a^{τ}_{B1}. Pentru determinarea acestora ecuația vectorială este:

$$\bar{a}^{\tau}_{B1} - \bar{a}_r = \Delta\bar{a} \tag{9.61}$$

Se introduce forma matriceală a acesteia:

$$\mathbf{rot}_{\alpha 1}\cdot\mathbf{a}^{\tau}_{B1} - \mathbf{rot}_{\varphi 2}\cdot\mathbf{a}_r = \mathbf{\Delta a} \tag{9.62}$$

$$\begin{bmatrix}\cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1\\ \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\ a^{\tau}_{B1}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\cos\varphi_2 & -\sin\varphi_2\\ \sin\varphi_2 & \cos\varphi_2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}a_r\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\Delta a_x\\ \Delta a_y\end{bmatrix} \tag{9.63}$$

Se înmulțește această ecuație la stânga cu transpusa matricii de rotație de unghi φ_2.

$$\mathbf{rot}^t_{\varphi 2}\cdot\mathbf{rot}_{\alpha 1}\cdot\mathbf{a}^{\tau}_{B1} - \mathbf{rot}^t_{\varphi 2}\cdot\mathbf{rot}_{\varphi 2}\cdot\mathbf{a}_r = \mathbf{rot}^t_{\varphi 2}\cdot\mathbf{\Delta a} \tag{9.64}$$

Reamintind că $\mathbf{rot}^t_{\varphi 2}\cdot\mathbf{rot}_{\alpha 1} = \mathbf{rot}_{\delta}$ și $\mathbf{rot}^t_{\varphi 2}\cdot\mathbf{rot}_{\varphi 2} = \mathbf{1}$, ecuația de mai sus devine:

$$\mathbf{rot}_{\delta}\cdot\mathbf{a}^{\tau}_{B1} - \mathbf{a}_r = \mathbf{rot}^t_{\varphi 2}\cdot\mathbf{\Delta a} \tag{9.65}$$

$$\begin{bmatrix}\cos\delta & -\sin\delta\\ \sin\delta & \cos\delta\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\ a^{\tau}_{B1}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}a_r\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos\varphi_2 & \sin\varphi_2\\ -\sin\varphi_2 & \cos\varphi_2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\Delta a_x\\ \Delta a_y\end{bmatrix} \tag{9.66}$$

Se obține sistemul de ecuații scalare:

$$\begin{cases}-a^{\tau}_{B1}\sin\delta - a_r + = \Delta a_x\cos\varphi_2 + \Delta a_y\sin\varphi_2\\ \qquad a^{\tau}_{B1}\cos\delta = -\Delta a_x\sin\varphi_2 + \Delta a_y\cos\varphi_2\end{cases} \tag{9.67}$$

Din cea de a doua ecuație se determină accelerația unghiulară:

$$a^{\tau}_{B1} = \frac{-\Delta a_x\sin\varphi_2 + \Delta a_y\cos\varphi_2}{\cos\delta} \tag{9.68}$$

$$\varepsilon_1 = \frac{a^{\tau}_{B1}}{l_1} \tag{9.69}$$

iar apoi din prima ecuație accelerația relativă a culisei:

$$a_r = -\Delta a_x \cos\varphi_2 - \Delta a_y \sin\varphi_2 - a_{B1}^{\tau} \sin\delta \tag{9.70}$$

Accelerația articulației B se calculează din prima parte a ecuației (9.48):

$$\bar{a}_B = \bar{a}_1 + \bar{a}_{B1} \qquad \mathbf{a}_B = \mathbf{a}_1 + \mathbf{rot}_{\alpha 1} \cdot \mathbf{a}_{B1} \tag{9.71}$$

$$\begin{bmatrix} a_{Bx} \\ a_{By} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1x} \\ a_{1y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1 \\ \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{B1}^{\nu} \\ a_{B1}^{\tau} \end{bmatrix} \tag{9.72}$$

$$\begin{cases} a_{Bx} = a_{1x} + a_{B1}^{\nu} \cos\alpha_1 - a_{B1}^{\tau} \sin\alpha_1 \\ a_{By} = a_{1y} + a_{B1}^{\nu} \sin\alpha_1 + a_{B1}^{\tau} \cos\alpha_1 \end{cases} \tag{9.73}$$

$$a_B = \sqrt{a_{Bx}^2 + a_{By}^2} \tag{9.74}$$

În cazul particular în care $l_2 = 0$ rezultă că $a_{B2}^{\nu} = 0$ și $a_{B2}^{\tau} = 0$, calculul celorlalte accelerații nefiind afectat.

9.4 Algoritmul de calcul

	Analiza pozițională
1	$\sin\alpha_2 = \sin\varphi_2 \cos\gamma_2 + \cos\varphi_2 \sin\gamma_2$
2	$\cos\alpha_2 = \cos\varphi_2 \cos\gamma_2 - \sin\varphi_2 \sin\gamma_2$
3	$\Delta x = x_{02} - x_1 + l_2 \cos\alpha_2$
4	$\Delta y = y_{02} - y_1 + l_2 \sin\alpha_2$
5	$\sin\delta = (-\Delta x \sin\varphi_2 + \Delta y \cos\varphi_2)/l_1$
6	$\cos\delta = k_1 \cdot \sqrt{1 - (\sin\delta)^2}$
7	$l_{02} = l_1 \cos\delta - \Delta x \cos\varphi_2 - \Delta y \sin\varphi_2$
8	$\sin\alpha_1 = \sin\varphi_2 \cos\delta + \cos\varphi_2 \sin\delta$
9	$\cos\alpha_1 = \cos\varphi_2 \cos\delta - \sin\varphi_2 \sin\delta$
10	$x_B = x_1 + l_1 \cos\alpha_1$
11	$y_B = y_1 + l_1 \sin\alpha_1$
	Analiza vitezelor
12	$\omega_2 = \omega_{02}$
13	$v_t = \omega_{02} l_{02}$
14	$v_{B2} = \omega_2 l_2$
15	$\Delta v_x = v_{02x} - v_{1x} - v_t \sin\varphi_2 - v_{B2} \sin\alpha_2$
16	$\Delta v_y = v_{02y} - v_{1y} + v_t \cos\varphi_2 + v_{B2} \cos\alpha_2$
17	$v_{B1} = (-\Delta v_x \sin\varphi_2 + \Delta v_y \cos\varphi_2)/\cos\delta$
18	$\omega_1 = v_{B1}/l_1$
19	$v_r = \Delta v_x \cos\varphi_2 + \Delta v_y \sin\varphi_2 + v_{B1} \sin\delta$
20	$v_{Bx} = v_{1x} - v_{B1} \sin\alpha_1$
21	$v_{By} = v_{1y} + v_{B1} \cos\alpha_1$

	Analiza accelerațiilor
22	$\varepsilon_2 = \varepsilon_{02}$
23	$a_t^{\nu} = -\omega_{02}^2 l_{02}$
24	$a_t^{\tau} = \varepsilon_{02} l_{02}$
25	$a_{B1}^{\nu} = -\omega_1^2 l_1$
26	$a_{B2}^{\nu} = -\omega_2^2 l_2$
27	$a_{B2}^{\tau} = \varepsilon_2 l_2$
28	$a_{cor} = 2\omega_{02} v_r$
29	$\Delta a_x = a_{02x} - a_{1x} + a_t^{\nu}\cos\varphi_2 - (a_t^{\tau} + a_{cor})\sin\varphi_2 +$ $+ a_{B2}^{\nu}\cos\alpha_2 - a_{B2}^{\tau}\sin\alpha_2 - a_{B1}^{\nu}\cos\alpha_1$
30	$\Delta a_y = a_{02y} - a_{1y} + a_t^{\nu}\sin\varphi_2 + (a_t^{\tau} + a_{cor})\cos\varphi_2 +$ $+ a_{B2}^{\nu}\sin\alpha_2 + a_{B2}^{\tau}\cos\alpha_2 - a_{B1}^{\nu}\sin\alpha_1$
31	$a_{B1}^{\tau} = (-\Delta a_x \sin\varphi_2 + \Delta a_y \cos\varphi_2)/\cos\delta$
32	$\varepsilon_1 = a_{B1}^{\tau}/l_1$
33	$a_r = -\Delta a_x \cos\varphi_2 - \Delta a_y \sin\varphi_2 - a_{B1}^{\tau}\sin\delta$
34	$a_{Bx} = a_{1x} + a_{B1}^{\nu}\cos\alpha_1 - a_{B1}^{\tau}\sin\alpha_1$
35	$a_{By} = a_{1y} + a_{B1}^{\nu}\sin\alpha_1 + a_{B1}^{\tau}\cos\alpha_1$

10 DIADA TRT

10.1 Analiza pozițională

Date: $\bar{r}_{01}(x_{01}, y_{01})$, $\bar{r}_{02}(x_{02}, y_{02})$, l_1, l_2, φ_1, φ_2, γ_1, γ_2, $k_{1,2} = \pm 1$

Cerute: α_1, α_2, l_{01}, l_{02}

Cazuri particulare: $l_1 = 0$, $l_2 = 0$.

Reprezentarea grafică a diadei TRT este dată în fig.10.1.

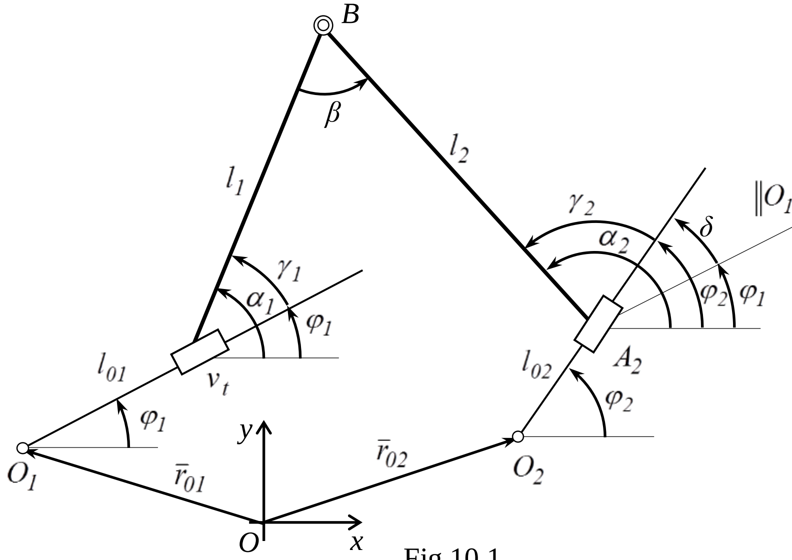


Fig.10.1

Pentru unghiurile făcute de elementele diadei cu suporturile de alunecare ale culiselor respective se introduc relațiile:

$$\gamma_1 = k_1 \cdot abs(\gamma_1) \qquad \gamma_2 = k_2 \cdot abs(\gamma_2) \tag{10.1}$$

în care indicatorii k_1 și k_2 sunt pozitivi sau negativi în funcție de poziționarea acestor elemente față de suporturile respective (se reamintește că unghiurile γ_1 și γ_2 se măsoară fiecare de la suport către elementul respectiv).

Se poate observa că există o nedeterminare a poziției diadei atunci când cele două suporturi sunt paralele, unghiurile lor de poziție sunt egale $(\varphi_2 = \varphi_1)$, situație care va fi pusă în evidență în cele ce urmează.

Unghiurile de poziție ale elementelor se calculează cu relațiile:

$$\alpha_1 = \varphi_1 + \gamma_1 \quad (10.2) \qquad \begin{cases} \sin\alpha_1 = \sin\varphi_1 \cos\gamma_1 + \cos\varphi_1 \sin\gamma_1 \\ \cos\alpha_1 = \cos\varphi_1 \cos\gamma_1 - \sin\varphi_1 \sin\gamma_1 \end{cases} \quad (10.3)$$

$$\alpha_2 = \varphi_2 + \gamma_2 \quad (10.4) \qquad \begin{cases} \sin\alpha_2 = \sin\varphi_2 \cos\gamma_2 + \cos\varphi_2 \sin\gamma_2 \\ \cos\alpha_2 = \cos\varphi_2 \cos\gamma_2 - \sin\varphi_2 \sin\gamma_2 \end{cases} \quad (10.5)$$

Pentru poziția punctului B se alcătuiește ecuația vectorială:

$$\bar{r}_B = \bar{r}_{01} + \overline{O_1A_1} + \overline{A_1B} = \bar{r}_{02} + \overline{O_2A_2} + \overline{A_2B} \tag{10.6}$$

Pentru determinarea lungimilor l_{01} și l_{02} se regrupează termenii acestei ecuații:

$$\overline{O_1A_1} - \overline{O_2A_2} = \Delta\bar{r} \tag{10.7}$$

În termenul $\Delta\bar{r}$ sunt incluși toți termenii cunoscuți ai ecuației vectoriale:

$$\Delta\bar{r} = \bar{r}_{02} - \bar{r}_{01} + \overline{A_2B} - \overline{A_1B} \tag{10.8}$$

Se dezvoltă această relație vectorială la nivel matriceal și scalar:

$$\mathbf{\Delta r} = \mathbf{r}_{02} - \mathbf{r}_{01} + \mathbf{rot}_{\alpha 2} \cdot \mathbf{L}_2 - \mathbf{rot}_{\alpha 1} \cdot \mathbf{L}_1 \tag{10.9}$$

$$\begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{02} - x_{01} \\ y_{02} - y_{01} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\alpha_2 & -\sin\alpha_2 \\ \sin\alpha_2 & \cos\alpha_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} l_2 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1 \\ \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{10.10}$$

$$\begin{cases} \Delta x = x_{02} - x_{01} + l_2\cos\alpha_2 - l_1\cos\alpha_1 \\ \Delta y = y_{02} - y_{01} + l_2\sin\alpha_2 - l_1\sin\alpha_1 \end{cases} \tag{10.11}$$

Forma matriceală e ecuației (10.7) este:

$$\mathbf{rot}_{\varphi 1} \cdot \mathbf{L}_{01} - \mathbf{rot}_{\varphi 2} \cdot \mathbf{L}_{02} = \mathbf{\Delta r} \tag{10.12}$$

$$\begin{bmatrix} \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 \\ \sin\varphi_1 & \cos_{\alpha 1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} l_{01} \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \cos\varphi_2 & -\sin\varphi_2 \\ \sin\varphi_2 & \cos\varphi_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} l_{02} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} \tag{10.13}$$

Se înmulțește această ecuație cu transpusa matricii de rotație a unghiului φ_1. Se introduce unghiul auxiliar $\delta = \varphi_2 - \varphi_1$ (fig.10.1).

$$\begin{cases} \sin\delta = \sin\varphi_2\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2\sin\varphi_1 \\ \cos\delta = \cos\varphi_2\cos\varphi_1 + \sin\varphi_2\sin\varphi_1 \end{cases} \tag{10.14}$$

Utilizând notațiile simbolice ale matricilor de rotație, înmulțirea menționată conduce la următoarele rezultate:

$$\mathbf{rot}^t_{\varphi 1} \cdot \mathbf{rot}_{\varphi 1} = \mathbf{1} \qquad \mathbf{rot}^t_{\varphi 1} \cdot \mathbf{rot}_{\varphi 2} = \mathbf{rot}_{\varphi 2 - \varphi 1} = \mathbf{rot}_{\delta} \tag{10.15}$$

Cu aceste precizări, ecuația (10.13) devine:

$$\mathbf{L}_{01} - \mathbf{rot}_{\delta} \cdot \mathbf{L}_{02} = \mathbf{rot}^t_{\varphi 1} \cdot \mathbf{\Delta r} \tag{10.16}$$

$$\begin{bmatrix} l_{01} \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \cos\delta & -\sin\delta \\ \sin\delta & \cos\delta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} l_{02} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi_1 & \sin\varphi_1 \\ -\sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} \tag{10.17}$$

$$\begin{cases} l_{01} - l_{02}\cos\delta = \Delta x\cos\varphi_1 + \Delta y\sin\varphi_1 \\ \quad -l_{02}\sin\delta = -\Delta x\sin\varphi_1 + \Delta y\cos\varphi_1 \end{cases} \tag{10.18}$$

Din a doua ecuație se determină:

$$l_{02} = \frac{\Delta x\sin\varphi_1 - \Delta y\cos\varphi_1}{\sin\delta} \tag{10.19}$$

iar din prima:

$$l_{01} = \Delta x\cos\varphi_1 + \Delta y\sin\varphi_1 + l_{02}\cos\delta \tag{10.20}$$

Se poate observa că determinarea nu este posibilă dacă unghiul δ este nul.

Poziția punctului B se calculează din prima parte a relației (10.6):

$$\bar{r}_B = \bar{r}_{01} + \overline{O_1A_1} + \overline{A_1B} \tag{10.21}$$

$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_{01} + \mathbf{rot}_{\varphi 1} \cdot \mathbf{L}_{01} + \mathbf{rot}_{\alpha 1} \cdot \mathbf{L}_1 \tag{10.22}$$

$$\begin{bmatrix} x_B \\ y_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{01} \\ y_{01} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 \\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} l_{01} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1 \\ \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (10.23)$$

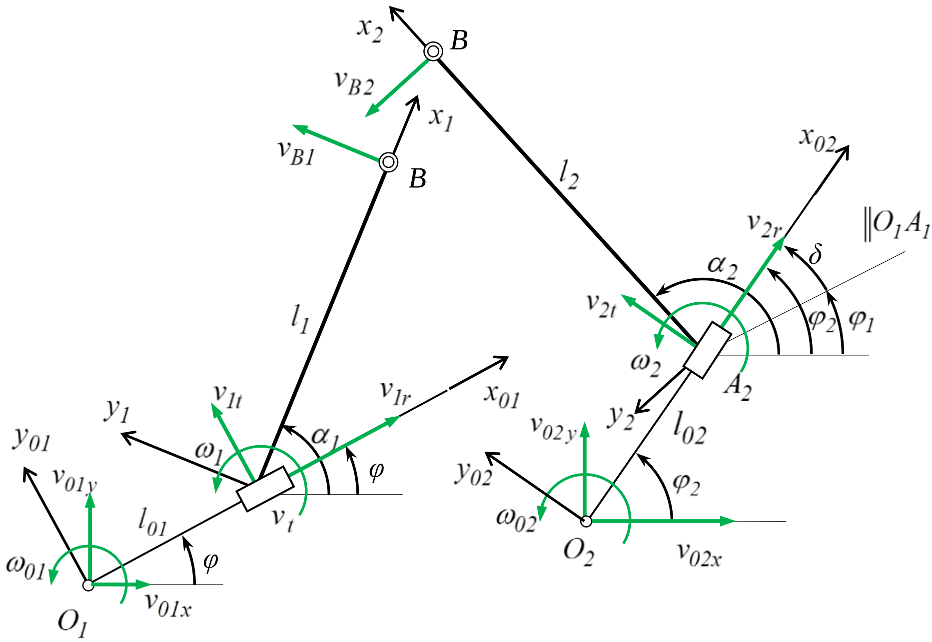
$$\begin{cases} x_B = x_{01} + l_{01}\cos\varphi_1 + l_1\cos\alpha_1 \\ y_B = y_{01} + l_{01}\sin\varphi_1 + l_1\sin\alpha_1 \end{cases} \quad (10.24)$$

10.2 Analiza vitezelor

Date: $\bar{v}_{01}(v_{01x}, v_{01y})$, $\bar{v}_{02}(v_{02x}, v_{02y})$, ω_{01}, ω_{02}.

Cerute: vitezele unghiulare ω_1 și ω_2, v_{r1}, v_{r2}, v_B.

Distribuția vitezelor pentru fiecare element este prezentată în fig.10.2.



Din analiza pozițională se cunosc l_{01}, l_{02}, unghiurile α_1, α_2 și δ.

Cu observația că unghiurile γ_1 și γ_2 sunt constante, se derivează în raport cu timpul relațiile (10.2) și (10.4):

$$\alpha_1 = \varphi_1 + \gamma_1 \qquad \dot{\alpha}_1 = \dot{\varphi}_1 + \dot{\gamma}_1 \qquad \omega_1 = \omega_{01} \quad (10.25)$$

$$\alpha_2 = \varphi_2 + \gamma_2 \qquad \dot{\alpha}_2 = \dot{\varphi}_2 + \dot{\gamma}_2 \qquad \omega_2 = \omega_{02} \quad (10.26)$$

Viteza punctului B aparținând ambelor elemente se poate exprima prin relațiile vectoriale:

$$\bar{v}_B = \bar{v}_{A1} + \bar{v}_{B1} = \bar{v}_{01} + \bar{v}_{1r} + \bar{v}_{1t} + \bar{v}_{B1} \quad (10.27)$$

$$\bar{v}_B = \bar{v}_{A2} + \bar{v}_{B2} = \bar{v}_{02} + \bar{v}_{2r} + \bar{v}_{2t} + \bar{v}_{B2} \quad (10.28)$$

În aceste relații sunt cunoscute următoarele viteze:

$$v_{1t} = \omega_{01} l_{01} \quad (10.29) \qquad v_{B1} = \omega_1 l_1 \quad (10.30)$$

$$v_{2t} = \omega_{02} l_{02} \quad (10.31) \qquad v_{B2} = \omega_2 l_2 \quad (10.32)$$

Sunt necunoscute vitezele relative v_{1r} și v_{2r}. După egalarea expresiilor de mai sus, se regrupează termenii după cum urmează:

$$\bar{v}_{1r} - \bar{v}_{2r} = \Delta\bar{v} \tag{10.33}$$

în care vectorul auxiliar $\Delta\bar{v}$ grupează toți termenii cunoscuți:

$$\Delta\bar{v} = \bar{v}_{02} - \bar{v}_{01} + \bar{v}_{2t} - \bar{v}_{1t} + \bar{v}_{B2} - \bar{v}_{B1} \tag{10.34}$$

$$\mathbf{\Delta v} = \mathbf{v}_{02} - \mathbf{v}_{01} + \mathbf{rot}_{\varphi 2} \cdot \mathbf{v}_{2t} - \mathbf{rot}_{\varphi 1} \cdot \mathbf{v}_{1t} + \mathbf{rot}_{\alpha 2} \cdot \mathbf{v}_{B2} - \mathbf{rot}_{\alpha 1} \cdot \mathbf{v}_{B1} \tag{10.35}$$

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\Delta v_x\\ \Delta v_y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}v_{02x} - v_{01x}\\ v_{02y} - v_{01y}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\cos\varphi_2 & -\sin\varphi_2\\ \sin\varphi_2 & \cos\varphi_2\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}0\\ v_{2t}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1\\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}0\\ v_{1t}\end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix}\cos\alpha_2 & -\sin\alpha_2\\ \sin\alpha_2 & \cos\alpha_2\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}0\\ v_{B2}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1\\ \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}0\\ v_{B1}\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{10.36}$$

Se obțin relațiile scalare:

$$\begin{cases}\Delta v_x = v_{02x} - v_{01x} - v_{2t}\sin\varphi_2 + v_{1t}\sin\varphi_1 - v_{B2}\sin\alpha_2 + v_{B1}\sin\alpha_1\\ \Delta v_y = v_{02y} - v_{01y} + v_{2t}\cos\varphi_2 - v_{1t}\cos\varphi_1 + v_{B2}\cos\alpha_2 - v_{B1}\cos\alpha_1\end{cases} \tag{10.37}$$

Se rezolvă în continuare ecuația vectorială (10.33):

$$\mathbf{rot}_{\varphi 1} \cdot \mathbf{v}_{1r} - \mathbf{rot}_{\varphi 2} \cdot \mathbf{v}_{2r} = \mathbf{\Delta v} \tag{10.38}$$

$$\begin{bmatrix}\cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1\\ \sin\varphi_1 & \cos_{\alpha 1}\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}v_{1r}\\ 0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\cos\varphi_2 & -\sin\varphi_2\\ \sin\varphi_2 & \cos\varphi_2\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}v_{2r}\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\Delta v_x\\ \Delta v_y\end{bmatrix} \tag{10.39}$$

Se înmulțește această ecuație cu transpusa matricii de rotație a unghiului φ_1 și, ținând cont de precizarea din relația (10.14), se obține:

$$\mathbf{v}_{1r} - \mathbf{rot}_{\delta} \cdot \mathbf{v}_{2r} = \mathbf{rot}_{\varphi 1}^{t} \cdot \mathbf{\Delta v} \tag{10.40}$$

$$\begin{bmatrix}v_{1r}\\ 0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\cos\delta & -\sin\delta\\ \sin\delta & \cos\delta\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}v_{2r}\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos\varphi_1 & \sin\varphi_1\\ -\sin\varphi_1 & \cos\varphi_1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}\Delta v_x\\ \Delta v_y\end{bmatrix} \tag{10.41}$$

Din aceasta se obține sistemul de ecuații scalare:

$$\begin{cases}v_{1r} - v_{2r}\cos\delta = \Delta v_x\cos\varphi_1 + \Delta v_y\sin\varphi_1\\ -v_{2r}\sin\delta = -\Delta v_x\sin\varphi_1 + \Delta v_y\cos\varphi_1\end{cases} \tag{10.42}$$

Din a doua ecuație se determină:

$$v_{2r} = \frac{\Delta v_x\sin\varphi_1 - \Delta v_y\cos\varphi_1}{\sin\delta} \tag{10.43}$$

iar din prima:

$$v_{1r} = \Delta v_x\cos\varphi_1 + \Delta v_y\sin\varphi_1 + v_{2r}\cos\delta \tag{10.44}$$

Se poate observa că determinarea nu este posibilă dacă unghiul δ este nul.

Viteza punctului B se calculează din relația (10.27):

$$\bar{v}_B = \bar{v}_{01} + \bar{v}_{1r} + \bar{v}_{1t} + \bar{v}_{B1} \tag{10.45}$$

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_{01} + \mathbf{rot}_{\varphi 1} \cdot (\mathbf{v}_{1r} + \mathbf{v}_{1t}) + \mathbf{rot}_{\alpha 1} \cdot \mathbf{v}_{B1} \tag{10.46}$$

$$\begin{bmatrix}v_{Bx}\\ v_{By}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}v_{01x}\\ v_{01y}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1\\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}v_{1r}\\ v_{1t}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1\\ \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}0\\ v_{B1}\end{bmatrix} \tag{10.47}$$

$$\begin{cases} v_{Bx} = v_{01x} + v_{1r}\cos\varphi_1 - v_{1t}\sin\varphi_1 - v_{B1}\sin\alpha_1 \\ v_{By} = v_{01y} + v_{1r}\sin\varphi_1 + v_{1t}\cos\varphi_1 + v_{B1}\cos\alpha_1 \end{cases} \tag{10.48}$$

$$v_B = \sqrt{v_{Bx}^2 + v_{By}^2} \tag{10.49}$$

10.3 Analiza accelerațiilor

Date: $\bar{a}_{01}(a_{01x}, a_{01y})$, $\bar{a}_{02}(a_{02x}, a_{02y})$, ε_{01}, ε_{02}.

Cerute: accelerațiile unghiulare ε_1 și ε_2, a_{1r}, a_{2r}, a_B.

Din analiza vitezelor se cunosc vitezele unghiulare ω_1, și ω_2, v_{1r}, v_{2r}.

Distribuția accelerațiilor pentru fiecare element este prezentată în fig.10.3.

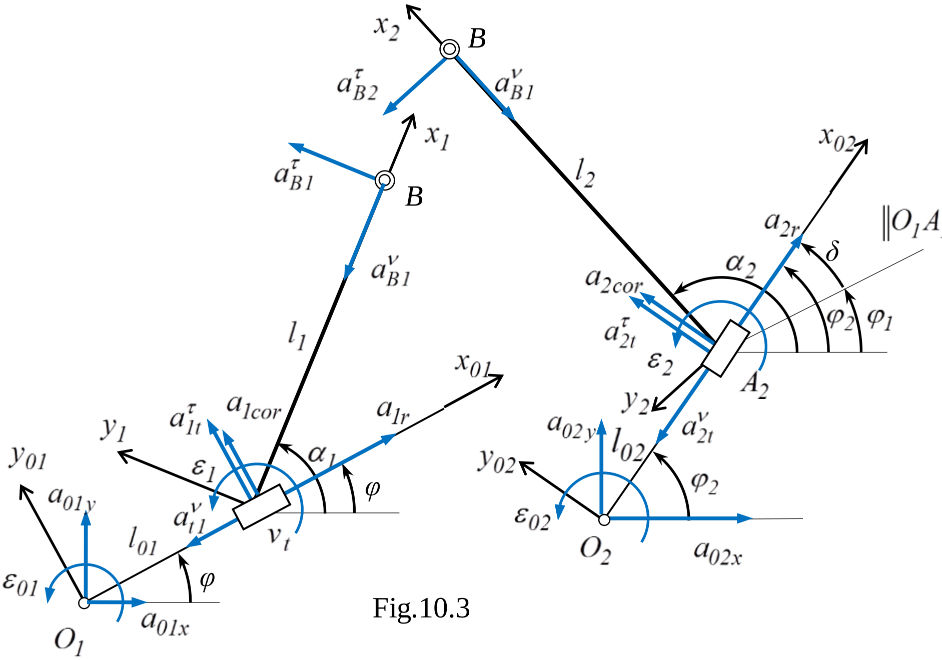


Fig.10.3

Accelerațiile unghiulare ε_1 și ε_2 se obțin derivând în raport cu timpul relațiile (10.24) și (10.25):

$$\omega_1 = \omega_{01} \qquad \dot{\omega}_1 = \dot{\omega}_{01} \qquad \varepsilon_1 = \varepsilon_{01} \tag{10.50}$$

$$\omega_2 = \omega_{02} \qquad \dot{\omega}_2 = \dot{\omega}_{02} \qquad \varepsilon_2 = \varepsilon_{02} \tag{10.51}$$

Accelerația punctului B aparținând ambelor elemente se poate exprima prin relațiile vectoriale:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_{A1} + \bar{a}_{B1} = \bar{a}_{01} + \bar{a}_{1r} + \bar{a}_{1t} + \bar{a}_{1cor} + \bar{a}_{B1} \tag{10.52}$$

$$\bar{a}_B = \bar{a}_{A2} + \bar{a}_{B2} = \bar{a}_{02} + \bar{a}_{2r} + \bar{a}_{2t} + \bar{a}_{2cor} + \bar{a}_{B2} \tag{10.53}$$

În aceste relații:

$$\bar{a}_{1t} = \bar{a}_{1t}^{\nu} + \bar{a}_{1t}^{\tau} \tag{10.54}$$

$$\bar{a}_{B1} = \bar{a}_{B1}^{\nu} + \bar{a}_{B1}^{\tau} \tag{10.55}$$

$$\bar{a}_{2t} = \bar{a}_{2t}^{\nu} + \bar{a}_{2t}^{\tau} \tag{10.56}$$

$$\bar{a}_{B2} = \bar{a}_{B2}^{\nu} + \bar{a}_{B2}^{\tau} \tag{10.57}$$

Pentru componentele cunoscute sunt valabile următoarele relații de calcul:

$$\begin{cases} a_{1t}^{\nu} = -\omega_{01}^{2}\, l_{01} \\ a_{1t}^{\tau} = \varepsilon_{01}\, l_{01} \end{cases} \qquad (10.58) \qquad \begin{cases} a_{B1}^{\nu} = -\omega_{1}^{2}\, l_{1} \\ a_{B1}^{\tau} = \varepsilon_{1}\, l_{1} \end{cases} \qquad (10.59)$$

$$\begin{cases} a_{2t}^{\nu} = -\omega_{02}^{2}\, l_{02} \\ a_{2t}^{\tau} = \varepsilon_{01}\, l_{02} \end{cases} \qquad (10.60) \qquad \begin{cases} a_{B2}^{\nu} = -\omega_{2}^{2}\, l_{2} \\ a_{B2}^{\tau} = \varepsilon_{2}\, l_{2} \end{cases} \qquad (10.61)$$

Pentru accelerațiile Coriolis sunt valabile relațiile:

$$a_{1cor} = \omega_{01} v_{1r} \qquad (10.62) \qquad a_{2cor} = \omega_{02} v_{2r} \qquad (10.63)$$

Sunt necunoscute accelerațiile relative a_{1r} și a_{2r}.

După egalarea expresiilor (10.50) și (10.51), se regrupează termenii după cum urmează:

$$\bar{a}_{1r} - \bar{a}_{2r} = \Delta\bar{a} \qquad (10.64)$$

în care $\Delta\bar{a}$ grupează toți termenii cunoscuți:

$$\Delta\bar{a} = (\bar{a}_{02} - \bar{a}_{01}) + (\bar{a}_{2t} + \bar{a}_{2cor}) - (\bar{a}_{1t} + \bar{a}_{1cor}) + (\bar{a}_{B2} - \bar{a}_{B1}) \qquad (10.65)$$

Dezvoltarea matriceală a acestei relații vectoriale este următoarea:

$$\begin{aligned} \mathbf{\Delta a} = (\mathbf{a}_{02} - \mathbf{a}_{01}) + \mathbf{rot}_{\varphi 2} \cdot (\mathbf{a}_{2t} + \mathbf{a}_{2cor}) - \\ - \mathbf{rot}_{\varphi 1} \cdot (\mathbf{a}_{1t} + \mathbf{a}_{1cor}) + \mathbf{rot}_{\alpha 2} \cdot \mathbf{a}_{B2} - \mathbf{rot}_{\alpha 1} \cdot \mathbf{a}_{B1} \end{aligned} \qquad (10.66)$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \Delta a_x \\ \Delta a_y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_{02x} - a_{01x} \\ a_{02y} - a_{01y} \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} \cos\varphi_2 & -\sin\varphi_2 \\ \sin\varphi_2 & \cos\varphi_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{2t}^{\nu} \\ a_{2t}^{\tau} + a_{2cor} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 \\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{1t}^{\nu} \\ a_{1t}^{\tau} + a_{1cor} \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} \cos\alpha_2 & -\sin\alpha_2 \\ \sin\alpha_2 & \cos\alpha_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{B2}^{\nu} \\ a_{B2}^{\tau} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1 \\ \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{B1}^{\nu} \\ a_{B1}^{\tau} \end{bmatrix} \end{aligned} \qquad (10.67)$$

Rezultă ecuațiile scalare:

$$\begin{aligned} \Delta a_x &= (a_{02x} - a_{01x}) + \\ &+ a_{2t}^{\nu}\cos\varphi_2 - (a_{2t}^{\tau} + a_{2cor})\sin\varphi_2 - a_{1t}^{\nu}\cos\varphi_1 + (a_{1t}^{\tau} + a_{1cor})\sin\varphi_1 + \\ &+ a_{B2}^{\nu}\cos\alpha_2 - a_{B2}^{\tau}\sin\alpha_2 - a_{B1}^{\nu}\cos\alpha_1 + a_{B1}^{\tau}\sin\alpha_1 \end{aligned} \qquad (10.68)$$

$$\begin{aligned} \Delta a_y &= (a_{02y} - a_{01y}) + \\ &+ a_{2t}^{\nu}\sin\varphi_2 + (a_{2t}^{\tau} + a_{2cor})\cos\varphi_2 - a_{1t}^{\nu}\sin\varphi_1 - (a_{1t}^{\tau} + a_{1cor})\cos\varphi_1 + \\ &+ a_{B2}^{\nu}\sin\alpha_2 + a_{B2}^{\tau}\cos\alpha_2 - a_{B1}^{\nu}\sin\alpha_1 - a_{B1}^{\tau}\cos\alpha_1 \end{aligned} \qquad (10.69)$$

Ecuația vectorială (10.64) ia forma matriceală:

$$\mathbf{rot}_{\varphi 1} \cdot \mathbf{a}_{1r} - \mathbf{rot}_{\varphi 2} \cdot \mathbf{a}_{2r} = \mathbf{\Delta a} \qquad (10.70)$$

$$\begin{bmatrix} \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 \\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{1r} \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \cos\varphi_2 & -\sin\varphi_2 \\ \sin\varphi_2 & \cos\varphi_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{2r} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta a_x \\ \Delta a_y \end{bmatrix} \qquad (10.71)$$

Se înmulțește această ecuație cu transpusa matricii de rotație a unghiului φ_1 și, ținând cont de precizarea din relația (10.14), se obține:

$$\mathbf{a}_{1r} - \mathbf{rot}_{\delta} \cdot \mathbf{a}_{2r} = \mathbf{rot}_{\varphi 1}^{t} \cdot \mathbf{\Delta a} \qquad (10.72)$$

$$\begin{bmatrix} a_{1r} \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \cos\delta & -\sin\delta \\ \sin\delta & \cos\delta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{2r} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi_1 & \sin\varphi_1 \\ -\sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta a_x \\ \Delta a_y \end{bmatrix} \tag{10.73}$$

Din aceasta se obține sistemul de ecuații scalare:

$$\begin{cases} a_{1r} - a_{2r}\cos\delta = \Delta a_x \cos\varphi_1 + \Delta a_y \sin\varphi_1 \\ -a_{2r}\sin\delta = -\Delta a_x \sin\varphi_1 + \Delta a_y \cos\varphi_1 \end{cases} \tag{10.74}$$

Din a doua ecuație se determină:

$$a_{2r} = \frac{\Delta a_x \sin\varphi_1 - \Delta a_y \cos\varphi_1}{\sin\delta} \tag{10.75}$$

iar din prima:

$$a_{1r} = \Delta a_x \cos\varphi_1 + \Delta a_y \sin\varphi_1 + a_{r2}\cos\delta \tag{10.76}$$

Se poate observa că determinarea nu este posibilă dacă unghiul δ este nul.

Accelerația punctului B se calculează din relația (10.52):

$$\bar{a}_B = \bar{a}_{01} + \bar{a}_{1r} + \bar{a}_{1t} + \bar{a}_{1cor} + \bar{a}_{B1} \tag{10.77}$$

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_{01} + \mathbf{rot}_{\varphi 1} \cdot (\mathbf{a}_{1r} + \mathbf{a}_{1t} + \mathbf{a}_{1cor}) + \mathbf{rot}_{\alpha 1} \cdot \mathbf{a}_{B1} \tag{10.78}$$

$$\begin{bmatrix} a_{Bx} \\ a_{By} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{01x} \\ a_{01y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 \\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{1t}^{\nu} + a_{1r} \\ a_{1t}^{\tau} + a_{1cor} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1 \\ \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{B1}^{\nu} \\ a_{B1}^{\tau} \end{bmatrix} \tag{10.79}$$

$$\begin{cases} a_{Bx} = a_{01x} + (a_{1t}^{\nu} + a_{1r})\cos\varphi_1 - (a_{1t}^{\tau} + a_{1cor})\sin\varphi_1 + a_{B1}^{\nu}\cos\alpha_1 - a_{B1}^{\tau}\sin\alpha_1 \\ a_{By} = a_{01y} + (a_{1t}^{\nu} + a_{1r})\sin\varphi_1 + (a_{1t}^{\tau} + a_{1cor})\cos\varphi_1 + a_{B1}^{\nu}\sin\alpha_1 + a_{B1}^{\tau}\cos\alpha_1 \end{cases} \tag{10.80}$$

$$a_B = \sqrt{a_{Bx}^2 + a_{By}^2} \tag{10.81}$$

10.4 Algoritmul de calcul

	Analiza pozițională
1	$\sin\alpha_1 = \sin\varphi_1 \cos\gamma_1 + \cos\varphi_1 \sin\gamma_1$
2	$\cos\alpha_1 = \cos\varphi_1 \cos\gamma_1 - \sin\varphi_1 \sin\gamma_1$
3	$\sin\alpha_2 = \sin\varphi_2 \cos\gamma_2 + \cos\varphi_2 \sin\gamma_2$
4	$\cos\alpha_2 = \cos\varphi_2 \cos\gamma_2 - \sin\varphi_2 \sin\gamma_2$
5	$\Delta x = x_{02} - x_{01} + l_2 \cos\alpha_2 - l_1 \cos\alpha_1$
6	$\Delta y = y_{02} - y_{01} + l_2 \sin\alpha_2 - l_1 \sin\alpha_1$
7	$\sin\delta = \sin\varphi_2 \cos\varphi_1 - \cos\varphi_2 \sin\varphi_1$
8	$\cos\delta = \cos\varphi_2 \cos\varphi_1 + \sin\varphi_2 \sin\varphi_1$
9	$l_{02} = (\Delta x \sin\varphi_1 - \Delta y \cos\varphi_1)/\sin\delta$
10	$l_{01} = \Delta x \cos\varphi_1 + \Delta y \sin\varphi_1 + l_{02}\cos\delta$
11	$x_B = x_{01} + l_{01}\cos\varphi_1 + l_1 \cos\alpha_1$
12	$y_B = y_{01} + l_{01}\sin\varphi_1 + l_1 \sin\alpha_1$

Analiza vitezelor			
13	$\omega_1 = \omega_{01}$	14	$\omega_2 = \omega_{02}$
15	$v_{1t} = \omega_{01} l_{01}$		
16	$v_{B1} = \omega_1 l_1$		
17	$v_{2t} = \omega_{02} l_{02}$		
18	$v_{B2} = \omega_2 l_2$		
19	$\Delta v_x = v_{02x} - v_{01x} - v_{2t}\sin\varphi_2 + v_{1t}\sin\varphi_1 - v_{B2}\sin\alpha_2 + v_{B1}\sin\alpha_1$		
20	$\Delta v_y = v_{02y} - v_{01y} + v_{2t}\cos\varphi_2 - v_{1t}\cos\varphi_1 + v_{B2}\cos\alpha_2 - v_{B1}\cos\alpha_1$		
21	$v_{2r} = (\Delta v_x \sin\varphi_1 - \Delta v_y \cos\varphi_1)/\sin\delta$		
22	$v_{1r} = \Delta v_x \cos\varphi_1 + \Delta v_y \sin\varphi_1 + v_{2r}\cos\delta$		
23	$v_{Bx} = v_{01x} + v_{1r}\cos\varphi_1 - v_{1t}\sin\varphi_1 - v_{B1}\sin\alpha_1$		
24	$v_{By} = v_{01y} + v_{1r}\sin\varphi_1 + v_{1t}\cos\varphi_1 + v_{B1}\cos\alpha_1$		
Analiza accelerațiilor			
25	$\varepsilon_1 = \varepsilon_{01}$	26	$\varepsilon_2 = \varepsilon_{02}$
27	$a_{1t}^{\nu} = -\omega_{01}^2 l_{01}$		
28	$a_{1t}^{\tau} = \varepsilon_{01} l_{01}$		
30	$a_{B1}^{\nu} = -\omega_1^2 l_1$		
31	$a_{B1}^{\tau} = \varepsilon_1 l_1$		
32	$a_{2t}^{\nu} = -\omega_{02}^2 l_{02}$		
33	$a_{2t}^{\tau} = \varepsilon_{01} l_{02}$		
34	$a_{B2}^{\nu} = -\omega_2^2 l_2$		
35	$a_{B2}^{\tau} = \varepsilon_2 l_2$		
36	$a_{1cor} = \omega_{01} v_{1r}$		
37	$a_{2cor} = \omega_{02} v_{2r}$		
38	$\Delta a_x = (a_{02x} - a_{01x}) + a_{2t}^{\nu}\cos\varphi_2 - (a_{2t}^{\tau} + a_{2cor})\sin\varphi_2 - a_{1t}^{\nu}\cos\varphi_1 +$ $+ (a_{1t}^{\tau} + a_{1cor})\sin\varphi_1 + a_{B2}^{\nu}\cos\alpha_2 - a_{B2}^{\tau}\sin\alpha_2 - a_{B1}^{\nu}\cos\alpha_1 + a_{B1}^{\tau}\sin\alpha_1$		
39	$\Delta a_y = (a_{02y} - a_{01y}) + a_{2t}^{\nu}\sin\varphi_2 + (a_{2t}^{\tau} + a_{2cor})\cos\varphi_2 - a_{1t}^{\nu}\sin\varphi_1 -$ $- (a_{1t}^{\tau} + a_{1cor})\cos\varphi_1 + a_{B2}^{\nu}\sin\alpha_2 + a_{B2}^{\tau}\cos\alpha_2 - a_{B1}^{\nu}\sin\alpha_1 - a_{B1}^{\tau}\cos\alpha_1$		
40	$a_{2r} = (\Delta a_x \sin\varphi_1 - \Delta a_y \cos\varphi_1)/\sin\delta$		
41	$a_{1r} = \Delta a_x \cos\varphi_1 + \Delta a_y \sin\varphi_1 + a_{r2}\cos\delta$		
42	$a_{Bx} = a_{01x} + (a_{1t}^{\nu} + a_{1r})\cos\varphi_1 - (a_{1t}^{\tau} + a_{1cor})\sin\varphi_1 + a_{B1}^{\nu}\cos\alpha_1 - a_{B1}^{\tau}\sin\alpha_1$		
43	$a_{By} = a_{01y} + (a_{1t}^{\nu} + a_{1r})\sin\varphi_1 + (a_{1t}^{\tau} + a_{1cor})\cos\varphi_1 + a_{B1}^{\nu}\sin\alpha_1 + a_{B1}^{\tau}\cos\alpha_1$		

11 DIADA RTT

11.1 Analiza pozițională

Date: $\bar{r}_1(x_1, y_1)$, $\bar{r}_{02}(x_{02}, y_{02})$, l_1, φ_2, γ_2, β, $k_{1,2} = \pm 1$

Cerute: α_1, α_2, l_2, l_{02}, $\bar{r}_B(x_B, y_B)$

Cazuri particulare: $l_1 = 0$

Reprezentarea grafică a diadei RTT este dată în fig.11.1

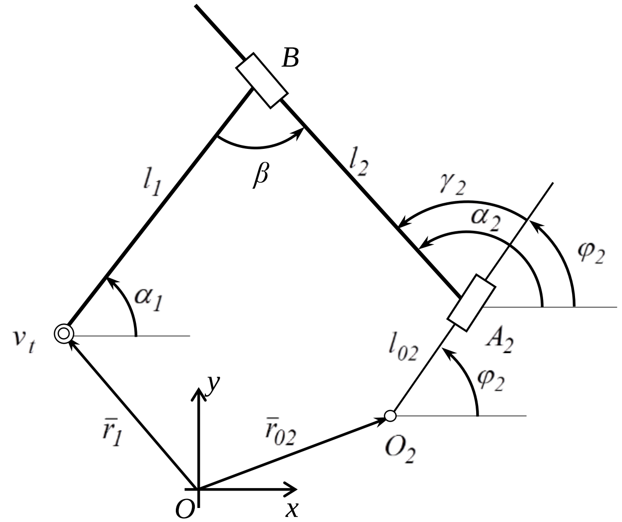


Fig.11.1

Pentru unghiurile fixe ale diadei, respectiv unghiul β dintre elemente și unghiul γ_2 făcut de elementul *2* al diadei cu suportul de alunecare al culisei A_2 se introduc relațiile:

$$\beta = k_1 \cdot abs(\beta) \qquad \gamma_2 = k_2 \cdot abs(\gamma_2) \tag{11.1}$$

în care k_1 și k_2 au valoarea *+1* dacă unghiurile respective sunt pozitive (în sens trigonometric) și *–1* dacă sunt negative (în sens orar). Se observă că diada nu este definită dacă $\gamma_2 = 0$.

Unghiul de poziție al elementului 2 se determină imediat din relațiile:

$$\alpha_2 = \varphi_2 + \gamma_2 \tag{11.2}$$

$$\begin{cases} \sin\alpha_2 = \sin\varphi_2 \cos\gamma_2 + \cos\varphi_2 \sin\gamma_2 \\ \cos\alpha_2 = \cos\varphi_2 \cos\gamma_2 - \sin\varphi_2 \sin\gamma_2 \end{cases} \tag{11.3}$$

Pornind de la relația generală $\beta = \alpha_2 - \alpha_1$ se calculează unghiul de poziție al elementului 1:

$$\alpha_1 = \alpha_2 - \beta \tag{11.4}$$

$$\begin{cases} \sin\alpha_1 = \sin\alpha_2 \cos\beta - \cos\alpha_2 \sin\beta \\ \cos\alpha_1 = \cos\alpha_2 \cos\beta + \sin\alpha_2 \sin\beta \end{cases} \tag{11.5}$$

Celelalte necunoscute ale analizei poziționale sunt lungimile l_2 și l_{02}. Pentru determinarea acestora se pornește de la relația vectorială care definește poziția punctului *B* pe cele două elemente:

$$\bar{r}_B = \bar{r}_1 + \overline{A_1B} = \bar{r}_{02} + \overline{O_2A_2} + \overline{A_2B} \tag{11.6}$$

Termenii cunoscuți din această relație se grupează în vectorul auxiliar $\Delta\bar{r}$:

$$\Delta\bar{r} = \bar{r}_1 - \bar{r}_{02} + \overline{A_1B} \tag{11.7}$$

Se dezvoltă această relație la nivel matriceal și scalar:

$$\mathbf{\Delta r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_{02} + \mathbf{rot}_{\alpha 1} \cdot \mathbf{L}_1 \tag{11.8}$$

$$\begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_{02} \\ y_{02} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1 \\ \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{11.9}$$

$$\begin{cases} \Delta x = x_1 - x_{02} + l_1 \cos\alpha_1 \\ \Delta y = y_1 - y_{02} + l_1 \sin\alpha_1 \end{cases} \tag{11.10}$$

Cu termenii care conțin cele două necunoscute se formează ecuația vectoriala:

$$\overline{O_2A_2} + \overline{A_2B} = \Delta\bar{r} \tag{11.11}$$

cu dezvoltarea matriceală:

$$\mathbf{rot}_{\varphi 2} \cdot \mathbf{L}_{02} + \mathbf{rot}_{\alpha 2} \cdot \mathbf{L}_2 = \mathbf{\Delta r} \tag{11.12}$$

$$\begin{bmatrix} \cos\varphi_2 & -\sin\varphi_2 \\ \sin\varphi_2 & \cos\varphi_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} l_{02} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\alpha_2 & -\sin\alpha_2 \\ \sin\alpha_2 & \cos\alpha_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} l_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} \tag{11.13}$$

Se înmulțește această ecuație cu transpusa matricii de rotație a unghiului φ_2.

$$\mathbf{rot}^t_{\varphi 2} \cdot \mathbf{rot}_{\varphi 2} \cdot \mathbf{L}_{02} + \mathbf{rot}^t_{\varphi 2} \cdot \mathbf{rot}_{\alpha 2} \cdot \mathbf{L}_2 = \mathbf{rot}^t_{\varphi 2} \cdot \mathbf{\Delta r} \tag{11.14}$$

Din relația (11.2) se observă că $\alpha_2 - \varphi_2 = \gamma_2$ (fig.11.1). Utilizând notațiile simbolice ale matricilor de rotație, înmulțirea menționată conduce la următoarele rezultate:

$$\mathbf{rot}^t_{\varphi 2} \cdot \mathbf{rot}_{\varphi 2} = \mathbf{1} \qquad \mathbf{rot}^t_{\varphi 2} \cdot \mathbf{rot}_{\alpha 2} = \mathbf{rot}_{\alpha 2 - \varphi 2} = \mathbf{rot}_{\gamma 2} \tag{11.15}$$

Cu aceste precizări, ecuația (5.355) devine:

$$\mathbf{L}_{02} + \mathbf{rot}_{\gamma 2} \cdot \mathbf{L}_2 = \mathbf{rot}^t_{\varphi 2} \cdot \mathbf{\Delta r} \tag{11.16}$$

$$\begin{bmatrix} l_{02} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\gamma_2 & -\sin\gamma_2 \\ \sin\gamma_2 & \cos\gamma_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} l_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi_2 & \sin\varphi_2 \\ -\sin\varphi_2 & \cos\varphi_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} \tag{11.17}$$

Din aceasta se obține sistemul de ecuații scalare:

$$\begin{cases} l_{02} + l_2 \cos\gamma_2 = \Delta x \cos\varphi_2 + \Delta y \sin\varphi_2 \\ \qquad l_2 \sin\gamma_2 = -\Delta x \sin\varphi_2 + \Delta y \cos\varphi_2 \end{cases} \tag{11.18}$$

Din a doua ecuație se determină:

$$l_2 = \frac{-\Delta x \sin\varphi_2 + \Delta y \cos\varphi_2}{\sin\gamma_2} \tag{11.19}$$

iar din prima:

$$l_{02} = \Delta x \cos\varphi_2 + \Delta y \sin\varphi_2 - l_2 \cos\gamma_2 \tag{11.20}$$

Se poate observa că determinarea nu este posibilă dacă unghiul γ_2 este nul.

Poziția punctului B se calculează din prima parte a relației (11.6):

$$\bar{r}_B = \bar{r}_1 + \overline{A_1B} \tag{11.21}$$

$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_1 + \mathbf{rot}_{\alpha 1} \cdot \mathbf{L}_1 \tag{11.22}$$

$$\begin{bmatrix} x_B \\ y_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1 \\ \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \end{bmatrix} \ (11.23) \quad \begin{cases} x_B = x_1 + l_1 \cos\alpha_1 \\ x_B = x_1 + l_1 \cos\alpha_1 \end{cases} \tag{11.24}$$

11.2 Analiza vitezelor

Date: $\bar{v}_1(v_{1x},v_{1y})$, $\bar{v}_{02}(v_{02x},v_{02y})$, ω_{02}

Cerute: vitezele unghiulare ω_1 și ω_2, v_{2r}, v_{B2r}, $\bar{v}_B(v_{Bx},v_{By})$.

Din analiza pozițională se cunosc l_{02}, l_2, unghiurile α_1, α_2.

Distribuția vitezelor pentru fiecare element este prezentată în fig.11.2.

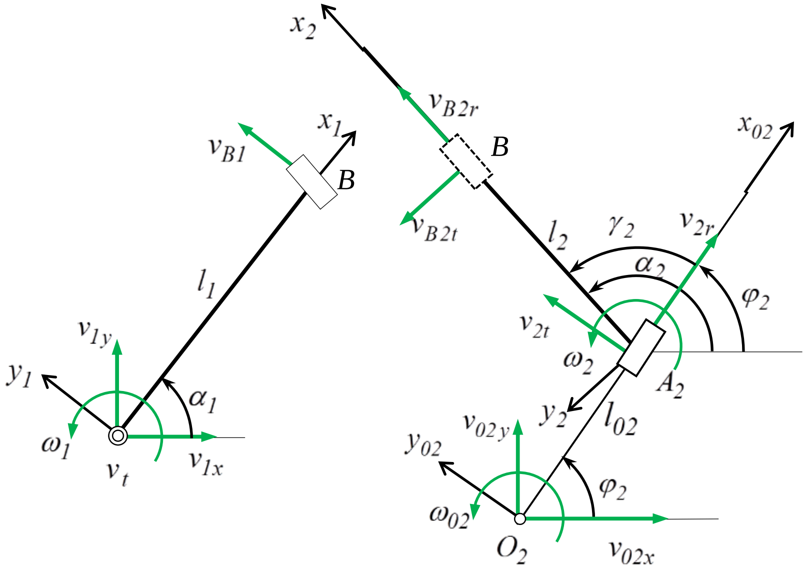


Fig.11.2

Vitezele unghiulare se determină derivând în raport cu timpul relațiile unghiulare (11.2) și (11.4):

$$\alpha_2 = \varphi_2 + \gamma_2 \qquad \dot{\alpha}_2 = \dot{\varphi}_2 + \dot{\gamma}_2 \qquad \omega_2 = \omega_{02} \tag{11.25}$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 - \beta \qquad \dot{\alpha}_1 = \dot{\alpha}_2 - \dot{\beta} \qquad \omega_1 = \omega_2 \tag{11.26}$$

în care unghiurile γ_2 și β sunt constante.

Viteza punctului *B* aparținând ambelor elemente se poate exprima prin relațiile vectoriale:

$$\bar{v}_B = \bar{v}_1 + \bar{v}_{B1} \tag{11.27}$$

$$\bar{v}_B = \bar{v}_{A2} + \bar{v}_{B2} = \bar{v}_{02} + \bar{v}_{2r} + \bar{v}_{2t} + \bar{v}_{B2r} + \bar{v}_{B2t} \tag{11.28}$$

În aceste relații sunt cunoscute următoarele viteze:

$$v_{B1} = \omega_1 l_1 \tag{11.29}$$

$$v_{2t} = \omega_{02}\, l_{02} \quad (11.30) \qquad\qquad v_{B2t} = \omega_2\, l_2 \quad (11.31)$$

Sunt necunoscute vitezele relative v_{2r} și v_{B2r}. După egalarea expresiilor de mai sus, se regrupează termenii după cum urmează:

$$\bar{v}_{2r} + \bar{v}_{B2r} = \Delta\bar{v} \tag{11.32}$$

în care $\Delta\bar{v}$ grupează toți termenii cunoscuți:

$$\Delta\bar{v} = \bar{v}_1 - \bar{v}_{02} - \bar{v}_{2t} + \bar{v}_{B1} - \bar{v}_{B2t} \tag{11.33}$$

$$\mathbf{\Delta v} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_{02} - \mathbf{rot}_{\varphi 2} \cdot \mathbf{v}_{2t} + \mathbf{rot}_{\alpha 1} \cdot \mathbf{v}_{B1} - \mathbf{rot}_{\alpha 2} \cdot \mathbf{v}_{B2t} \tag{11.34}$$

$$\begin{bmatrix} \Delta v_x \\ \Delta v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{1x} - v_{02x} \\ v_{1y} - v_{02y} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \cos\varphi_2 & -\sin\varphi_2 \\ \sin\varphi_2 & \cos\varphi_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ v_{2t} \end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} \cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1 \\ \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ v_{B1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \cos\alpha_2 & -\sin\alpha_2 \\ \sin\alpha_2 & \cos\alpha_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ v_{B2t} \end{bmatrix} \quad (11.35)$$

Se obțin relațiile scalare:

$$\begin{cases} \Delta v_x = v_{1x} - v_{02x} + v_{2t}\sin\varphi_2 - v_{B1}\sin\alpha_1 + v_{B2t}\sin\alpha_2 \\ \Delta v_y = v_{1y} - v_{02y} - v_{2t}\cos\varphi_2 + v_{B1}\cos\alpha_1 - v_{B2t}\cos\alpha_2 \end{cases} \quad (11.36)$$

Vitezele relative necunoscute se determină din ecuația vectorială (11.32). Ecuația matriceală echivalentă este următoarea:

$$\mathbf{rot}_{\varphi 2} \cdot \mathbf{v}_{2r} + \mathbf{rot}_{\alpha 2} \cdot \mathbf{v}_{B2r} = \mathbf{\Delta v} \quad (11.37)$$

$$\begin{bmatrix} \cos\varphi_2 & -\sin\varphi_2 \\ \sin\varphi_2 & \cos\varphi_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_{2r} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\alpha_2 & -\sin\alpha_2 \\ \sin\alpha_2 & \cos\alpha_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_{B2r} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta v_x \\ \Delta v_y \end{bmatrix} \quad (11.38)$$

Se înmulțește această ecuație cu transpusa matricii de rotație a unghiului φ_2.

$$\mathbf{rot}^t_{\varphi 2} \cdot \mathbf{rot}_{\varphi 2} \cdot \mathbf{v}_{2r} + \mathbf{rot}^t_{\varphi 2} \cdot \mathbf{rot}_{\alpha 2} \cdot \mathbf{v}_{B2r} = \mathbf{rot}^t_{\varphi 2} \cdot \mathbf{\Delta v} \quad (11.39)$$

Ținând cont și de relația (11.15) se obține:

$$\begin{bmatrix} v_{2r} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\gamma_2 & -\sin\gamma_2 \\ \sin\gamma_2 & \cos\gamma_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_{B2r} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi_2 & \sin\varphi_2 \\ -\sin\varphi_2 & \cos\varphi_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta v_x \\ \Delta v_y \end{bmatrix} \quad (11.40)$$

$$\begin{cases} v_{2r} + v_{B2r}\cos\gamma_2 = \Delta v_x \cos\varphi_2 + \Delta v_y \sin\varphi_2 \\ v_{B2r}\sin\gamma_2 = -\Delta v_x \sin\varphi_2 + \Delta v_y \cos\varphi_2 \end{cases} \quad (11.41)$$

Din cea de a doua ecuație se determină:

$$v_{B2r} = \frac{-\Delta v_x \sin\varphi_2 + \Delta v_y \cos\varphi_2}{\sin\gamma_2} \quad (11.42)$$

În continuare se determină din prima ecuație:

$$v_{2r} = \Delta v_x \cos\varphi_2 + \Delta v_y \sin\varphi_2 - v_{B2r}\cos\gamma_2 \quad (11.43)$$

Viteza punctului *B* se determină din rel.(11.27) pusă sub forma matriceală:

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_1 + \mathbf{rot}_{\alpha 1} \cdot \mathbf{v}_{B1} \quad (11.44)$$

$$\begin{bmatrix} v_{Bx} \\ v_{By} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{1x} \\ v_{1y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1 \\ \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ v_{B1} \end{bmatrix} \quad (11.45)$$

$$\begin{cases} v_{Bx} = v_{1x} - v_{B1}\sin\alpha_1 \\ v_{By} = v_{1y} + v_{B1}\cos\alpha_1 \end{cases} \quad (11.46) \qquad v_B = \sqrt{v_{Bx}^2 + v_{By}^2} \quad (11.47)$$

11.3 Analiza accelerațiilor

Date: $\bar{a}_1(a_{1x}, a_{1y})$, $\bar{a}_{02}(a_{02x}, a_{02y})$, ε_{02}

Cerute: accelerațiile unghiulare ε_1 și ε_2, a_{2r}, a_{B2r}, $\bar{a}_B(a_{Bx}, a_{By})$.

Din analiza vitezelor se cunosc v_{2r}, v_{B2r}, vitezele unghiulare ω_1, ω_2. Distribuția accelerațiilor pentru fiecare element este prezentată în fig.11.3.

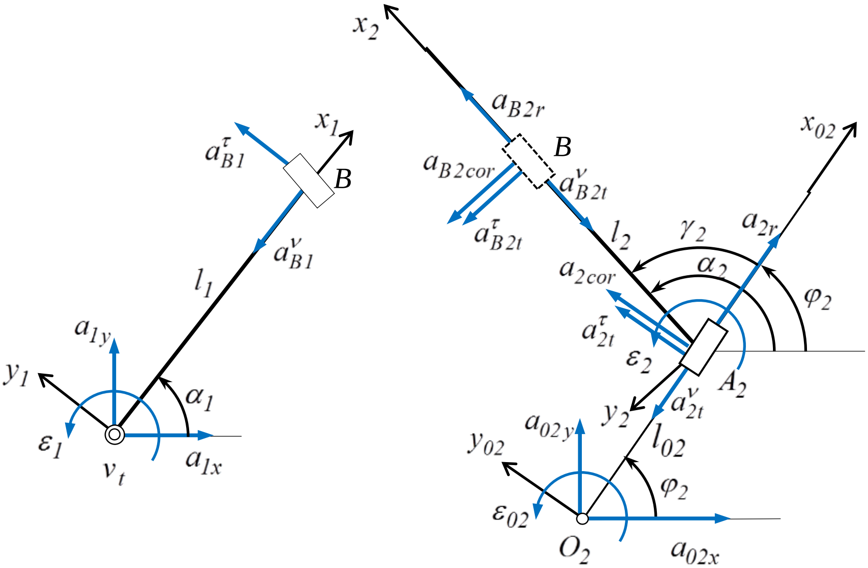


Fig.11.3

Accelerațiile unghiulare se determină derivând în raport cu timpul vitezele unghiulare date de relațiile (11.25) și (11.26):

$$\omega_2 = \omega_{02} \qquad \dot{\omega}_2 = \dot{\omega}_{02} \qquad \varepsilon_2 = \varepsilon_{02} \tag{11.48}$$

$$\omega_1 = \omega_2 \qquad \dot{\omega}_1 = \dot{\omega}_2 \qquad \varepsilon_1 = \varepsilon_2 \tag{11.49}$$

Accelerația centrului culisei B care aparține elementului A_1B se poate exprima prin relația vectorială:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_1 + \bar{a}_{B1} = \bar{a}_1 + \bar{a}_{B1}^{\nu} + \bar{a}_{B1}^{\tau} \tag{11.50}$$

în care $\bar{a}_{B1}$ este accelerația punctului B în raport cu A_1; componentele acesteia sunt determinate de relațiile scalare:

$$a_{B1}^{\nu} = -\omega_1^2 l_1 \quad (11.51) \qquad\qquad a_{B1}^{\tau} = \varepsilon_1 l_1 \quad (11.52)$$

Pentru accelerația culisei B aparținând elementului A_2B relația vectorială este:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_{A2} + \bar{a}_{B2} \tag{11.53}$$

Se detaliază mai întâi accelerația culisei A_2:

$$\bar{a}_{A2} = \bar{a}_{02} + \bar{a}_{2r} + \bar{a}_{2t} + \bar{a}_{2cor} \tag{11.54}$$

în care se cunosc componentele normală și tangențială ale accelerației de transport și accelerația Coriolis:

$$a_{2t}^{\nu} = -\omega_{02}^2 l_{02} \, (11.55) \qquad a_{2t}^{\tau} = \varepsilon_{02} l_{02} \quad (11.56) \qquad a_{2cor} = 2\omega_{02} v_{2r} \quad (11.57)$$

Se detaliază în continuare accelerația culisei B în raport cu A_2:

$$\bar{a}_{B2} = \bar{a}_{B2r} + \bar{a}_{B2t} + \bar{a}_{B2cor} \tag{11.58}$$

în care se cunosc componentele normală și tangențială alrr accelerației de transport și accelerația Coriolis:

$$a_{B2t}^{\nu} = -\omega_2^2 l_2 \ (11.59) \quad a_{B2t}^{\tau} = \varepsilon_2 l_2 \quad (11.60) \quad a_{B2cor} = 2\omega_2 v_{B2r} \ (11.61)$$

Necunoscute sunt accelerațiile relative a_{2r} și a_{B2r}. Pentru determinarea lor se egalează relațiile (11.50) și (11.53) și se izolează acestea:

$$\bar{a}_{2r} + \bar{a}_{B2r} = \Delta\bar{a} \tag{11.62}$$

Termenul auxiliar $\Delta\bar{a}$ include toate accelerațiile cunoscute:

$$\Delta\bar{a} = (\bar{a}_1 - \bar{a}_{02}) + \bar{a}_{B1} - (\bar{a}_{2t} + \bar{a}_{2cor}) - (\bar{a}_{B2t} + \bar{a}_{B2cor}) \tag{11.63}$$

Se dezvoltă această relație vectorială la nivel matriceal și scalar:

$$\mathbf{\Delta a} = (\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_{02}) + \mathbf{rot}_{\alpha 1} \cdot \mathbf{a}_{B1} - \mathbf{rot}_{\varphi 2} \cdot (\mathbf{a}_{2t} + \mathbf{a}_{2cor}) - \mathbf{rot}_{\alpha 2} \cdot (\mathbf{a}_{B2t} + \mathbf{a}_{B2cor}) \tag{11.64}$$

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\Delta a_x \\ \Delta a_y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a_{1x} - a_{01x} \\ a_{1y} - a_{01y}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1 \\ \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}a_{B1}^{\nu} \\ a_{B1}^{\tau}\end{bmatrix} - \\ - \begin{bmatrix}\cos\varphi_2 & -\sin\varphi_2 \\ \sin\varphi_2 & \cos\varphi_2\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}a_{2t}^{\nu} \\ a_{2t}^{\tau} + a_{2cor}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\cos\alpha_2 & -\sin\alpha_2 \\ \sin\alpha_2 & \cos\alpha_2\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}a_{B2}^{\nu} \\ a_{B2}^{\tau} + a_{B2cor}\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{11.65}$$

$$\begin{aligned}\Delta a_x = (a_{1x} - a_{01x}) + (a_{B1}^{\nu} \cos\alpha_1 - a_{B1}^{\tau} \sin\alpha_1) - [a_{2t}^{\nu} \cos\varphi_2 - (a_{2t}^{\tau} + a_{2cor}) \sin\varphi_2] - \\ - [a_{B2}^{\nu} \cos\alpha_2 - (a_{B2}^{\tau} + a_{B2cor}) \sin\alpha_2]\end{aligned} \tag{11.66}$$

$$\begin{aligned}\Delta a_y = (a_{1y} - a_{01y}) + (a_{B1}^{\nu} \sin\alpha_1 + a_{B1}^{\tau} \cos\alpha_1) - [a_{2t}^{\nu} \sin\varphi_2 + (a_{2t}^{\tau} + a_{2cor}) \cos\varphi_2] - \\ - [a_{B2}^{\nu} \sin\alpha_2 + (a_{B2}^{\tau} + a_{B2cor}) \cos\alpha_2]\end{aligned} \tag{11.67}$$

Ecuația vectorială (11.62) se transpune sub forma matriceală:

$$\mathbf{rot}_{\varphi 2} \cdot \mathbf{a}_{2r} + \mathbf{rot}_{\alpha 2} \cdot \mathbf{a}_{B2r} = \mathbf{\Delta a} \tag{11.68}$$

$$\begin{bmatrix}\cos\varphi_2 & -\sin\varphi_2 \\ \sin\varphi_2 & \cos\varphi_2\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}a_{2r} \\ 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\cos\alpha_2 & -\sin\alpha_2 \\ \sin\alpha_2 & \cos\alpha_2\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}a_{B2r} \\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\Delta a_x \\ \Delta a_y\end{bmatrix} \tag{11.69}$$

Se înmulțește această ecuație cu transpusa matricii de rotație a unghiului φ_2.

$$\mathbf{rot}_{\varphi 2}^t \cdot \mathbf{rot}_{\varphi 2} \cdot \mathbf{a}_{2r} + \mathbf{rot}_{\varphi 2}^t \cdot \mathbf{rot}_{\alpha 2} \cdot \mathbf{a}_{B2r} = \mathbf{rot}_{\varphi 2}^t \cdot \mathbf{\Delta v} \tag{11.70}$$

Ținând cont și de relația (11.15) se obține:

$$\mathbf{a}_{2r} + \mathbf{rot}_{\gamma 2} \cdot \mathbf{a}_{B2r} = \mathbf{rot}_{\varphi 2}^t \cdot \mathbf{\Delta v} \tag{11.71}$$

$$\begin{bmatrix}a_{2r} \\ 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\cos\gamma_2 & -\sin\gamma_2 \\ \sin\gamma_2 & \cos\gamma_2\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}a_{B2r} \\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos\varphi_2 & \sin\varphi_2 \\ -\sin\varphi_2 & \cos\varphi_2\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}\Delta v_x \\ \Delta v_y\end{bmatrix} \tag{11.72}$$

$$\begin{cases} a_{2r} + a_{B2r} \cos\gamma_2 = \Delta a_x \cos\varphi_2 + \Delta a_y \sin\varphi_2 \\ a_{B2r} \sin\gamma_2 = -\Delta a_x \sin\varphi_2 + \Delta a_y \cos\varphi_2 \end{cases} \tag{11.73}$$

Din cea de a doua ecuație se determină:

$$a_{B2r} = \frac{-\Delta a_x \sin\varphi_2 + \Delta a_y \cos\varphi_2}{\sin\gamma_2} \tag{11.74}$$

În continuare se determină din prima ecuație:

$$a_{2r} = \Delta a_x \cos\varphi_2 + \Delta a_y \sin\varphi_2 - a_{B2r}\cos\gamma_2 \tag{11.75}$$

Accelerația punctului *B* se poate calcula din relația vectorială (11.50):

$$\bar{a}_B = \bar{a}_1 + \bar{a}_{B1} \tag{11.76}$$

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_1 + \mathbf{rot}_{\alpha 1} \cdot \mathbf{a}_{B1} \tag{11.77}$$

$$\begin{bmatrix} a_{Bx} \\ a_{By} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1x} \\ a_{1y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1 \\ \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{B1}^{\nu} \\ a_{B1}^{\tau} \end{bmatrix} \tag{11.78}$$

$$\begin{cases} a_{Bx} = a_{1x} + a_{B1}^{\nu}\cos\alpha_1 - a_{B1}^{\tau}\sin\alpha_1 \\ a_{By} = a_{1y} + a_{B1}^{\nu}\sin\alpha_1 + a_{B1}^{\tau}\cos\alpha_1 \end{cases} \tag{11.79}$$

$$a_B = \sqrt{a_{Bx}^2 + a_{By}^2} \tag{11.80}$$

11.4 Algoritmul de calcul

	Analiza pozițională
1	$\sin\alpha_2 = \sin\varphi_2\cos\gamma_2 + \cos\varphi_2\sin\gamma_2$
2	$\cos\alpha_2 = \cos\varphi_2\cos\gamma_2 - \sin\varphi_2\sin\gamma_2$
3	$\sin\alpha_1 = \sin\alpha_2\cos\beta - \cos\alpha_2\sin\beta$
4	$\cos\alpha_1 = \cos\alpha_2\cos\beta + \sin\alpha_2\sin\beta$
5	$\Delta x = x_1 - x_{02} + l_1\cos\alpha_1$
6	$\Delta y = y_1 - y_{02} + l_1\sin\alpha_1$
7	$l_2 = (-\Delta x\sin\varphi_2 + \Delta y\cos\varphi_2)/\sin\gamma_2$
8	$l_{02} = \Delta x\cos\varphi_2 + \Delta y\sin\varphi_2 - l_2\cos\gamma_2$
9	$x_B = x_1 + l_1\cos\alpha_1$
10	$x_B = x_1 + l_1\cos\alpha_1$
	Analiza vitezelor
11	$\omega_2 = \omega_{02}$
12	$\omega_1 = \omega_2$
13	$v_{B1} = \omega_1 l_1$
14	$v_{2t} = \omega_{02}\, l_{02}$
15	$v_{B2t} = \omega_2\, l_2$
16	$\Delta v_x = v_{1x} - v_{02x} + v_{2t}\sin\varphi_2 - v_{B1}\sin\alpha_1 + v_{B2t}\sin\alpha_2$
17	$\Delta v_y = v_{1y} - v_{02y} - v_{2t}\cos\varphi_2 + v_{B1}\cos\alpha_1 - v_{B2t}\cos\alpha_2$
18	$v_{B2r} = (-\Delta v_x\sin\varphi_2 + \Delta v_y\cos\varphi_2)/\sin\gamma_2$
19	$v_{2r} = \Delta v_x\cos\varphi_2 + \Delta v_y\sin\varphi_2 - v_{B2r}\cos\gamma_2$
20	$v_{Bx} = v_{1x} - v_{B1}\sin\alpha_1$
21	$v_{By} = v_{1y} + v_{B1}\cos\alpha_1$

	Analiza accelerațiilor
22	$\varepsilon_2 = \varepsilon_{02}$
23	$\varepsilon_1 = \varepsilon_2$
24	$a_{B1}^{\nu} = -\omega_1^2 l_1$
25	$a_{B1}^{\tau} = \varepsilon_1 l_1$
26	$a_{2t}^{\nu} = -\omega_{02}^2 l_{02}$
27	$a_{2t}^{\tau} = \varepsilon_{02} l_{02}$
28	$a_{2cor} = 2\omega_{02} v_{2r}$
29	$a_{B2t}^{\nu} = -\omega_2^2 l_2$
30	$a_{B2t}^{\tau} = \varepsilon_2 l_2$
31	$a_{B2cor} = 2\omega_2 v_{B2r}$
32	$\Delta a_x = (a_{1x} - a_{01x}) + (a_{B1}^{\nu}\cos\alpha_1 - a_{B1}^{\tau}\sin\alpha_1) - [a_{2t}^{\nu}\cos\varphi_2 - (a_{2t}^{\tau} + a_{2cor})\sin\varphi_2] -$ $-[a_{B2}^{\nu}\cos\alpha_2 - (a_{B2}^{\tau} + a_{B2cor})\sin\alpha_2]$
33	$\Delta a_y = (a_{1y} - a_{01y}) + (a_{B1}^{\nu}\sin\alpha_1 + a_{B1}^{\tau}\cos\alpha_1) - [a_{2t}^{\nu}\sin\varphi_2 + (a_{2t}^{\tau} + a_{2cor})\cos\varphi_2] -$ $-[a_{B2}^{\nu}\sin\alpha_2 + (a_{B2}^{\tau} + a_{B2cor})\cos\alpha_2]$
34	$a_{B2r} = (-\Delta a_x \sin\varphi_2 + \Delta a_y \cos\varphi_2)/\sin\gamma_2$
35	$a_{2r} = \Delta a_x \cos\varphi_2 + \Delta a_y \sin\varphi_2 - a_{B2r}\cos\gamma_2$
36	$a_{Bx} = a_{1x} + a_{B1}^{\nu}\cos\alpha_1 - a_{B1}^{\tau}\sin\alpha_1$
37	$a_{By} = a_{1y} + a_{B1}^{\nu}\sin\alpha_1 + a_{B1}^{\tau}\cos\alpha_1$

12 DIADA TTR

12.1 Analiza pozițională

Date: $\bar{r}_{01}(x_{01}, y_{01})$, $\bar{r}_2(x_2, y_2)$, l_2, φ_1, γ_1, β, $k_{1,2} = \pm 1$

Cerute: α_1, α_2, l_1, l_{01}

Caz particular: $l_2 = 0$

Reprezentarea grafică a diadei TTR este dată în fig.12.1

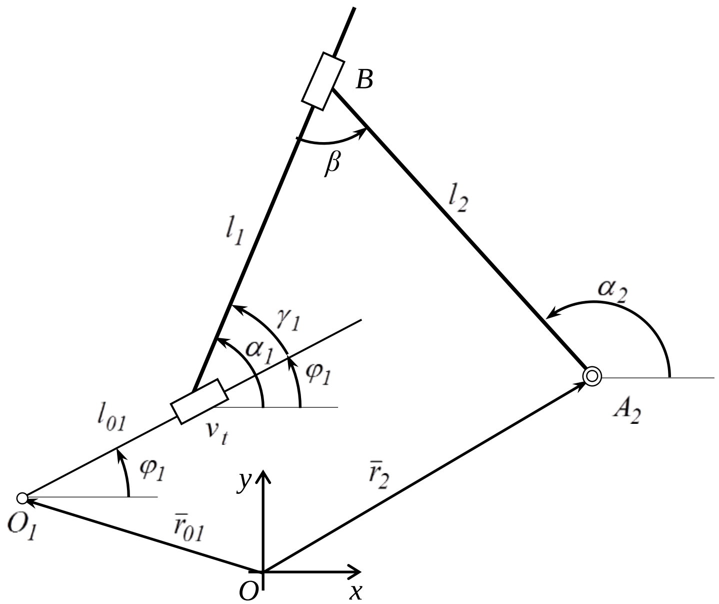


Fig.12.1

Pentru unghiurile fixe ale diadei, respectiv unghiul β dintre elemente și unghiul γ_1 făcut de elementul *1* al diadei cu suportul de alunecare al culisei A_1 se introduc relațiile:

$$\beta = k_1 \cdot abs(\beta) \qquad \gamma_1 = k_2 \cdot abs(\gamma_1) \tag{12.1}$$

în care k_1 și k_2 au valoarea *+1* dacă unghiurile respective sunt pozitive (în sens trigonometric) și *–1* dacă sunt negative (în sens orar). Se observă că diada nu este definită dacă $\gamma_1 = 0$.

Unghiul de poziție al elementului 1 se determină imediat din relațiile:

$$\alpha_1 = \varphi_1 + \gamma_1 \tag{12.2}$$

$$\begin{cases} \sin\alpha_1 = \sin\varphi_1 \cos\gamma_1 + \cos\varphi_1 \sin\gamma_1 \\ \cos\alpha_1 = \cos\varphi_1 \cos\gamma_1 - \sin\varphi_1 \sin\gamma_1 \end{cases} \tag{12.3}$$

Pornind de la relația generală $\beta = \alpha_2 - \alpha_1$ se calculează unghiul de poziție al elementului 2:

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \beta \tag{12.4}$$

$$\begin{cases} \sin\alpha_2 = \sin\alpha_1 \cos\beta + \cos\alpha_1 \sin\beta \\ \cos\alpha_2 = \cos\alpha_1 \cos\beta - \sin\alpha_1 \sin\beta \end{cases} \tag{12.5}$$

Celelalte necunoscute ale analizei poziționale sunt lungimile l_1 și l_{01}. Pentru determinarea acestora se pornește de la relația vectorială care definește poziția punctului B pe cele două elemente:

$$\bar{r}_B = \bar{r}_{01} + \overline{O_1A_1} + \overline{A_1B} = \bar{r}_2 + \overline{A_2B} \tag{12.6}$$

Termenii cunoscuți din această relație se grupează în vectorul auxiliar $\Delta\bar{r}$:

$$\Delta\bar{r} = \bar{r}_2 - \bar{r}_{01} + \overline{A_2B} \tag{12.7}$$

Se dezvoltă această relație la nivel matriceal și scalar:

$$\mathbf{\Delta r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_{01} + \mathbf{rot}_{\alpha 2} \cdot \mathbf{L}_2 \tag{12.8}$$

$$\begin{bmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x_2\\ y_2\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}x_{01}\\ y_{01}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\cos\alpha_2 & -\sin\alpha_2\\ \sin\alpha_2 & \cos\alpha_2\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}l_2\\ 0\end{bmatrix} \tag{12.9}$$

$$\begin{cases}\Delta x = x_2 - x_{01} + l_2\cos\alpha_2\\ \Delta y = y_2 - y_{01} + l_2\sin\alpha_2\end{cases} \tag{12.10}$$

Cu termenii care conțin cele două necunoscute se formează ecuația:

$$\overline{O_1A_1} + \overline{A_1B} = \Delta\bar{r} \tag{12.11}$$

$$\mathbf{rot}_{\varphi 1} \cdot \mathbf{L}_{01} + \mathbf{rot}_{\alpha 1} \cdot \mathbf{L}_1 = \mathbf{\Delta r} \tag{12.12}$$

$$\begin{bmatrix}\cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1\\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}l_{01}\\ 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1\\ \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}l_1\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{bmatrix} \tag{12.13}$$

Se înmulțește această ecuație cu transpusa matricii de rotație a unghiului φ_1.

$$\mathbf{rot}^t_{\varphi 1} \cdot \mathbf{rot}_{\varphi 1} \cdot \mathbf{L}_{01} + \mathbf{rot}^t_{\varphi 1} \cdot \mathbf{rot}_{\alpha 1} \cdot \mathbf{L}_1 = \mathbf{rot}^t_{\varphi 1} \cdot \mathbf{\Delta r} \tag{12.14}$$

Din relația (12.2) se observă că $\alpha_1 - \varphi_1 = \gamma_1$ (fig.12.1). Utilizând notațiile simbolice ale matricilor de rotație, înmulțirea menționată conduce la următoarele rezultate:

$$\mathbf{rot}^t_{\varphi 1} \cdot \mathbf{rot}_{\varphi 1} = \mathbf{1} \qquad \mathbf{rot}^t_{\varphi 1} \cdot \mathbf{rot}_{\alpha 1} = \mathbf{rot}_{\alpha 1 - \varphi 1} = \mathbf{rot}_{\gamma 1} \tag{12.15}$$

Cu aceste precizări, ecuația (12.14) devine:

$$\mathbf{L}_{01} + \mathbf{rot}_{\gamma 1} \cdot \mathbf{L}_1 = \mathbf{rot}^t_{\varphi 1} \cdot \mathbf{\Delta r} \tag{12.16}$$

$$\begin{bmatrix}l_{01}\\ 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\cos\gamma_1 & -\sin\gamma_1\\ \sin\gamma_1 & \cos\gamma_1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}l_1\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos\varphi_1 & \sin\varphi_1\\ -\sin\varphi_1 & \cos\varphi_1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{bmatrix} \tag{12.17}$$

Din aceasta se obține sistemul de ecuații scalare:

$$\begin{cases}l_{01} + l_1\cos\gamma_1 = \Delta x\cos\varphi_1 + \Delta y\sin\varphi_1\\ \quad l_1\sin\gamma_1 = -\Delta x\sin\varphi_1 + \Delta y\cos\varphi_1\end{cases} \tag{12.18}$$

Din aceste ecuații se determină:

$$l_1 = \frac{-\Delta x\sin\varphi_1 + \Delta y\cos\varphi_1}{\sin\gamma_1} \tag{12.19}$$

$$l_{01} = \Delta x\cos\varphi_1 + \Delta y\sin\varphi_1 - l_1\cos\gamma_1 \tag{12.20}$$

Se poate observa că determinarea nu este posibilă dacă unghiul γ_1 este nul.

Poziția punctului B se calculează din a doua parte a relației (12.6):

$$\bar{r}_B = \bar{r}_2 + \overline{A_2B} \quad (12.21) \qquad\qquad r_B = r_2 + R_{\alpha 2} \cdot L_2 \quad (12.22)$$

$$\begin{bmatrix} x_B \\ y_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\alpha_2 & -\sin\alpha_2 \\ \sin\alpha_2 & \cos\alpha_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} l_2 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{12.23}$$

$$\begin{cases} x_B = x_2 + l_2 \cos\alpha_2 \\ y_B = y_2 + l_2 \sin\alpha_2 \end{cases} \tag{12.24}$$

12.2 Analiza vitezelor

Date: $\bar{v}_{01}(v_{01x}, v_{01y})$, $\bar{v}_2(v_{2x}, v_{2y})$, ω_{01}

Cerute: vitezele unghiulare ω_1 și ω_2, v_{1r}, v_{B1r}, $\bar{v}_B(v_{Bx}, v_{By})$.

Din analiza pozițională se cunosc l_{01}, l_1, unghiurile α_1, α_2
Distribuția vitezelor pentru fiecare element este prezentată în fig.12.2.

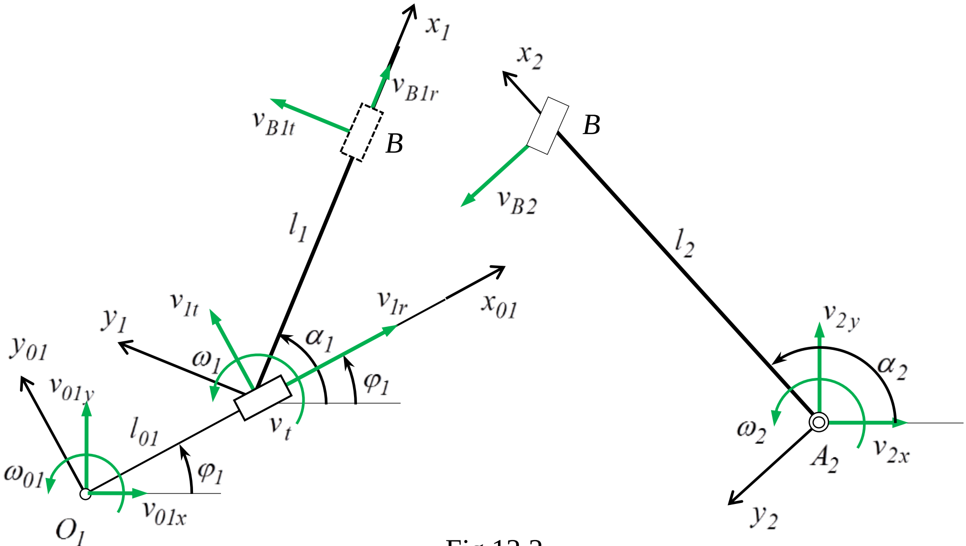


Fig.12.2

Vitezele unghiulare se determină derivând în raport cu timpul relațiile unghiulare (12.2) și (12.4):

$$\alpha_1 = \varphi_1 + \gamma_1 \qquad \dot{\alpha}_1 = \dot{\varphi}_1 + \dot{\gamma}_1 \qquad \omega_1 = \omega_{01} \tag{12.25}$$

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \beta \qquad \dot{\alpha}_2 = \dot{\alpha}_1 + \dot{\beta} \qquad \omega_2 = \omega_1 \tag{12.26}$$

în care unghiurile γ_1 și β sunt constante.

Viteza culisei B în mișcare pe elementul 1 se poate exprima prin relația:

$$\bar{v}_B = \bar{v}_1 + \bar{v}_{B1} \tag{12.27}$$

Viteza absolută $\bar{v}_1$ a culisei A_1 și viteza culisei B față de A_1 au expresiile:

$$\bar{v}_1 = \bar{v}_{01} + \bar{v}_{1r} + \bar{v}_{1t} \quad (12.28) \qquad \bar{v}_{B1} = \bar{v}_{B1r} + \bar{v}_{B1t} \quad (12.29)$$

Viteza absolută a centrului culisei B aparținând elementului 2 este:

$$\bar{v}_B = \bar{v}_2 + \bar{v}_{B2} \tag{12.30}$$

Vitezele cunoscute au relațiile de calcul:

$$v_{1t} = \omega_{01} l_{01} \quad (12.31) \qquad v_{B1t} = \omega_1 l_1 \quad (12.32) \qquad v_{B2} = \omega_2 l_2 \quad (12.33)$$

Sunt necunoscute vitezele relative v_{1r} și v_{B1r}. Pentru determinarea acestora se egalează expresiile (12.27) și (12.30) de mai sus și se regrupează termenii după cum urmează:

$$\bar{v}_{1r} + \bar{v}_{B1r} = \Delta\bar{v} \tag{12.34}$$

în care $\Delta\bar{v}$ include toți termenii cunoscuți:

$$\Delta\bar{v} = \bar{v}_2 - \bar{v}_{01} - \bar{v}_{1t} - \bar{v}_{B1t} + \bar{v}_{B2} \tag{12.35}$$

Forma matriceală și scalară a acestei relații este:

$$\mathbf{\Delta v} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_{01} - \mathbf{rot}_{\varphi 1} \cdot v_{1t} - \mathbf{rot}_{\alpha 1} \cdot \mathbf{v}_{B1t} + \mathbf{rot}_{\alpha 2} \cdot \mathbf{v}_{B2} \tag{12.36}$$

$$\begin{gathered}\begin{bmatrix}\Delta v_x\\ \Delta v_y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}v_{2x} - v_{01x}\\ v_{2y} - v_{01y}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1\\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}0\\ v_{1t}\end{bmatrix} - \\ - \begin{bmatrix}\cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1\\ \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}0\\ v_{B1t}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\cos\alpha_2 & -\sin\alpha_2\\ \sin\alpha_2 & \cos\alpha_2\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}0\\ v_{B2}\end{bmatrix}\end{gathered} \tag{12.37}$$

$$\begin{cases}\Delta v_x = v_{2x} - v_{01x} + v_{1t}\sin\varphi_1 + v_{B1t}\sin\alpha_1 - v_{B2t}\sin\alpha_2\\ \Delta v_y = v_{2y} - v_{01y} - v_{1t}\cos\varphi_1 - v_{B1t}\cos\alpha_1 + v_{B2t}\cos\alpha_2\end{cases} \tag{12.38}$$

Ecuația vectorială (12.34) are forma matriceală:

$$\mathbf{rot}_{\varphi 1} \cdot \mathbf{v}_{1r} + \mathbf{rot}_{\alpha 1} \cdot \mathbf{v}_{B1r} = \mathbf{\Delta v} \tag{12.39}$$

$$\begin{bmatrix}\cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1\\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}v_{1r}\\ 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1\\ \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}v_{B1r}\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\Delta v_x\\ \Delta v_y\end{bmatrix} \tag{12.40}$$

Se înmulțește această ecuație cu transpusa matricii de rotație a unghiului φ_1.

$$\mathbf{rot}^t_{\varphi 1} \cdot \mathbf{rot}_{\varphi 1} \cdot \mathbf{v}_{1r} + \mathbf{rot}^t_{\varphi 1} \cdot \mathbf{rot}_{\alpha 1} \cdot \mathbf{v}_{B1r} = \mathbf{rot}^t_{\varphi 1} \cdot \mathbf{\Delta v} \tag{12.41}$$

Ținând cont și de relația (12.15) se obține:

$$\mathbf{v}_{1r} + \mathbf{rot}_{\gamma 1} \cdot \mathbf{v}_{B1r} = \mathbf{rot}^t_{\varphi 1} \cdot \mathbf{\Delta v} \tag{12.42}$$

$$\begin{bmatrix}v_{1r}\\ 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\cos\gamma_1 & -\sin\gamma_1\\ \sin\gamma_1 & \cos\gamma_1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}v_{B1r}\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos\varphi_1 & \sin\varphi_1\\ -\sin\varphi_1 & \cos\varphi_1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}\Delta v_x\\ \Delta v_y\end{bmatrix} \tag{12.43}$$

$$\begin{cases}v_{1r} + v_{B1r}\cos\gamma_1 = \Delta v_x\cos\varphi_1 + \Delta v_y\sin\varphi_1\\ \quad v_{B1r}\sin\gamma_1 = -\Delta v_x\sin\varphi_1 + \Delta v_y\cos\varphi_1\end{cases} \tag{12.44}$$

Din cea de a doua ecuație se determină:

$$v_{B1r} = \frac{-\Delta v_x\sin\varphi_1 + \Delta v_y\cos\varphi_1}{\sin\gamma_1} \tag{12.45}$$

În continuare se determină din prima ecuație:

$$v_{1r} = \Delta v_x\cos\varphi_1 + \Delta v_y\sin\varphi_1 - v_{B1r}\cos\gamma_1 \tag{12.46}$$

Viteza punctului *B* se determină din rel.(12.30) pusă sub forma matriceală:

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_2 + \mathbf{rot}_{\alpha 2} \cdot \mathbf{v}_{B2} \tag{12.47}$$

$$\begin{bmatrix}v_{Bx}\\ v_{By}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}v_{2x}\\ v_{2y}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\cos\alpha_2 & -\sin\alpha_2\\ \sin\alpha_2 & \cos\alpha_2\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}0\\ v_{B2}\end{bmatrix} \tag{12.48}$$

$$\begin{cases}v_{Bx} = v_{2x} - v_{B2}\sin\alpha_2\\ v_{By} = v_{2y} + v_{B2}\cos\alpha_2\end{cases} \quad (12.49) \qquad v_B = \sqrt{v_{Bx}^2 + v_{By}^2} \quad (12.50)$$

12.3 Analiza accelerațiilor

Date: $\bar{a}_{01}(a_{01x}, a_{01y})$, $\bar{a}_2(a_{2x}, a_{2y})$, ε_{01}

Cerute: accelerațiile unghiulare ε_1 și ε_2, a_{1r}, a_{B1r}, $\bar{a}_B(a_{Bx}, a_{By})$.

Din analiza vitezelor se cunosc v_{1r}, v_{B1r}, vitezele unghiulare ω_1, ω_2.
Distribuția accelerațiilor pentru fiecare element este prezentată în fig.12.3.

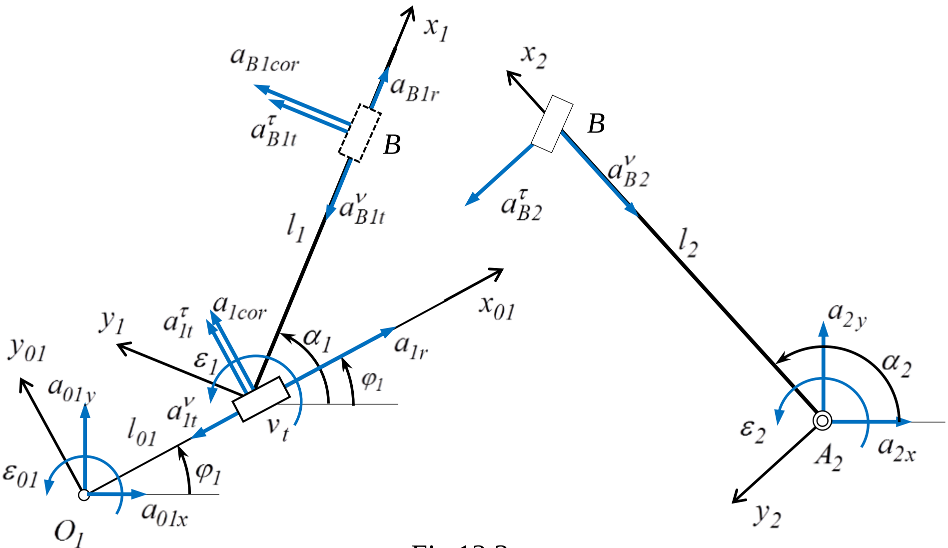


Fig.12.3

Accelerațiile unghiulare se determină derivând în raport cu timpul vitezele unghiulare date de relațiile (12.25) și (12.26):

$$\omega_1 = \omega_{01} \qquad \dot{\omega}_1 = \dot{\omega}_{01} \qquad \varepsilon_1 = \varepsilon_{01} \tag{12.51}$$

$$\omega_2 = \omega_1 \qquad \dot{\omega}_2 = \dot{\omega}_1 \qquad \varepsilon_2 = \varepsilon_1 \tag{12.52}$$

Accelerația culisei *B* în mișcare pe elementul *1* se poate exprima prin relația:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_1 + \bar{a}_{B1} \tag{12.53}$$

Accelerația absolută $\bar{a}_1$ a culisei A_1 și accelerația culisei *B* față de A_1 au expresiile:

$$\bar{a}_1 = \bar{a}_{01} + \bar{a}_{1r} + \bar{a}_{1t} + \bar{a}_{1cor} \quad (12.54) \qquad \bar{a}_{1t} = \bar{a}^{\nu}_{1t} + \bar{a}^{\tau}_{1t} \quad (12.55)$$

$$\bar{a}_{B1} = \bar{a}_{B1r} + \bar{a}_{B1t} + \bar{a}_{B1cor} \quad (12.56) \qquad \bar{a}_{B1t} = \bar{a}^{\nu}_{B1t} + \bar{a}^{\tau}_{B1t} \quad (12.57)$$

Accelerațiile cunoscute din aceste expresii au relațiile de calcul:

$$a^{\nu}_{1t} = -\omega^2_{01} l_{01} \; (12.58) \qquad a^{\tau}_{1t} = \varepsilon_{01} l_{01} \; (12.59) \qquad a_{1cor} = 2\omega_{01} v_{1r} \; (12.60)$$

$$a^{\nu}_{B1t} = -\omega^2_1 l_1 \; (12.61) \qquad a^{\tau}_{B1t} = \varepsilon_1 l_1 \; (12.62) \qquad a_{B1cor} = 2\omega_1 v_{B1r} \; (12.63)$$

Accelerația absolută a centrului culisei *B* aparținând elementului *2* este:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_2 + \bar{a}_{B2} \quad (12.64) \qquad \bar{a}_{B2} = \bar{a}^{\nu}_{B2} + \bar{a}^{\tau}_{B2} \quad (12.65)$$

Accelerațiile cunoscute din această expresie au relațiile de calcul:

$$a^{\nu}_{B2} = -\omega^2_2 l_2 \quad (12.66) \qquad a^{\tau}_{B2} = \varepsilon_2 l_2 \quad (12.67)$$

Se egalează accelerațiile punctului *B* din (12.53) și (12. 64) și se izolează cele două necunoscute, respectiv accelerațiile relative a_{1r} și a_{B1r}.

$$\bar{a}_{1r} + \bar{a}_{B1r} = \Delta\bar{a} \tag{12.68}$$

Termenul auxiliar $\Delta\bar{a}$ include toate accelerațiile cunoscute:

$$\Delta\bar{a} = (\bar{a}_2 - \bar{a}_{01}) - (\bar{a}_{1t} + \bar{a}_{1cor}) - (\bar{a}_{B1t} + \bar{a}_{B1cor}) + \bar{a}_{B2} \tag{12.69}$$

$$\mathbf{\Delta a} = (\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_{01}) - \mathbf{rot}_{\varphi 1} \cdot (\mathbf{a}_{1t} + \mathbf{a}_{1cor}) - \mathbf{rot}_{\alpha 1} \cdot (\mathbf{a}_{B1t} + \mathbf{a}_{B1cor}) + \mathbf{rot}_{\alpha 2} \cdot \mathbf{a}_{B2} \tag{12.70}$$

$$\begin{bmatrix} \Delta a_x \\ \Delta a_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{2x} - a_{01x} \\ a_{2y} - a_{01y} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 \\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{1t}^{\nu} \\ a_{1t}^{\tau} + a_{1cor} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1 \\ \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{B1t}^{\nu} \\ a_{B1t}^{\tau} + a_{B1cor} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\alpha_2 & -\sin\alpha_2 \\ \sin\alpha_2 & \cos\alpha_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{B2}^{\nu} \\ a_{B2}^{\tau} \end{bmatrix} \tag{12.71}$$

$$\begin{aligned} \Delta a_x = {} & (a_{2x} - a_{01x}) - [a_{1t}^{\nu}\cos\varphi_1 - (a_{1t}^{\tau} + a_{1cor})\sin\varphi_1] - \\ & - [a_{B1t}^{\nu}\cos\alpha_1 - (a_{B1t}^{\tau} + a_{B1cor})\sin\alpha_1] + (a_{B2}^{\nu}\cos\alpha_2 - a_{B2}^{\tau}\sin\alpha_2) \end{aligned} \tag{12.72}$$

$$\begin{aligned} \Delta a_y = {} & (a_{2y} - a_{01y}) - [a_{1t}^{\nu}\sin\varphi_1 + (a_{1t}^{\tau} + a_{1cor})\cos\varphi_1] - \\ & - [a_{B1t}^{\nu}\sin\alpha_1 + (a_{B1t}^{\tau} + a_{B1cor})\cos\alpha_1] + (a_{B2}^{\nu}\sin\alpha_2 + a_{B2}^{\tau}\cos\alpha_2) \end{aligned} \tag{12.73}$$

Ecuația vectorială (12.68) se transpune sub forma matriceală:

$$\mathbf{rot}_{\varphi 1} \cdot \mathbf{a}_{1r} + \mathbf{rot}_{\alpha 1} \cdot \mathbf{a}_{B1r} = \mathbf{\Delta a} \tag{12.74}$$

$$\begin{bmatrix} \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 \\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{1r} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1 \\ \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{B1r} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta a_x \\ \Delta a_y \end{bmatrix} \tag{12.75}$$

Se înmulțește această ecuație cu transpusa matricii de rotație a unghiului φ_1.

$$\mathbf{rot}_{\varphi 1}^{t} \cdot \mathbf{rot}_{\varphi 1} \cdot \mathbf{a}_{1r} + \mathbf{rot}_{\varphi 1}^{t} \cdot \mathbf{rot}_{\alpha 1} \cdot \mathbf{a}_{B1r} = \mathbf{rot}_{\varphi 1}^{t} \cdot \mathbf{\Delta a} \tag{12.76}$$

Ținând cont și de relația (12.15) se obține:

$$\mathbf{a}_{1r} + \mathbf{rot}_{\gamma 1} \cdot \mathbf{a}_{B1r} = \mathbf{rot}_{\varphi 1}^{t} \cdot \mathbf{\Delta a} \tag{12.77}$$

$$\begin{bmatrix} a_{1r} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\gamma_1 & -\sin\gamma_1 \\ \sin\gamma_1 & \cos\gamma_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{B1r} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi_1 & \sin\varphi_1 \\ -\sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta a_x \\ \Delta a_y \end{bmatrix} \tag{12.78}$$

$$\begin{cases} a_{1r} + a_{B1r}\cos\gamma_1 = \Delta a_x \cos\varphi_1 + \Delta a_y \sin\varphi_1 \\ a_{B1r}\sin\gamma_1 = -\Delta a_x \sin\varphi_1 + \Delta a_y \cos\varphi_1 \end{cases} \tag{12.79}$$

Din cea de a doua ecuație se determină:

$$a_{B1r} = \frac{-\Delta a_x \sin\varphi_1 + \Delta a_y \cos\varphi_1}{\sin\gamma_1} \tag{12.80}$$

În continuare se determină din prima ecuație:

$$a_{1r} = \Delta a_x \cos\varphi_1 + \Delta a_y \sin\varphi_1 - a_{B1r}\cos\gamma_1 \tag{12.81}$$

Accelerația punctului *B* se poate calcula din relația vectorială (12.64):

$$\bar{a}_B = \bar{a}_2 + \bar{a}_{B2} \tag{12.82}$$

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_2 + \mathbf{rot}_{\alpha 2} \cdot \mathbf{a}_{B2} \tag{12.83}$$

$$\begin{bmatrix} a_{Bx} \\ a_{By} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{2x} \\ a_{2y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\alpha_2 & -\sin\alpha_2 \\ \sin\alpha_2 & \cos\alpha_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{B2}^{\nu} \\ a_{B2}^{\tau} \end{bmatrix} \tag{12.84}$$

$$\begin{cases} a_{Bx} = a_{2x} + a^{\nu}_{B2}\cos\alpha_2 - a^{\tau}_{B2}\sin\alpha_2 \\ a_{By} = a_{2y} + a^{\nu}_{B2}\sin\alpha_2 + a^{\tau}_{B2}\cos\alpha_2 \end{cases} \quad (12.85) \qquad a_B = \sqrt{a^2_{Bx} + a^2_{By}} \quad (12.86)$$

12.4 Algoritmul de calcul

	Analiza pozițională
1	$\sin\alpha_1 = \sin\varphi_1\cos\gamma_1 + \cos\varphi_1\sin\gamma_1$
2	$\cos\alpha_1 = \cos\varphi_1\cos\gamma_1 - \sin\varphi_1\sin\gamma_1$
3	$\sin\alpha_2 = \sin\alpha_1\cos\beta + \cos\alpha_1\sin\beta$
4	$\cos\alpha_2 = \cos\alpha_1\cos\beta - \sin\alpha_1\sin\beta$
5	$\Delta x = x_2 - x_{01} + l_2\cos\alpha_2$
6	$\Delta y = y_2 - y_{01} + l_2\sin\alpha_2$
7	$l_1 = (-\Delta x\sin\varphi_1 + \Delta y\cos\varphi_1)/\sin\gamma_1$
8	$l_{01} = \Delta x\cos\varphi_1 + \Delta y\sin\varphi_1 - l_1\cos\gamma_1$
9	$x_B = x_2 + l_2\cos\alpha_2$
10	$y_B = y_2 + l_2\sin\alpha_2$
	Analiza vitezelor
11	$\omega_1 = \omega_{01}$
12	$\omega_2 = \omega_1$
13	$v_{1t} = \omega_{01}\, l_{01}$
14	$v_{B1t} = \omega_1\, l_1$
15	$v_{B2} = \omega_2\, l_2$
16	$\Delta v_x = v_{2x} - v_{01x} + v_{1t}\sin\varphi_1 + v_{B1t}\sin\alpha_1 - v_{B2t}\sin\alpha_2$
17	$\Delta v_y = v_{2y} - v_{01y} - v_{1t}\cos\varphi_1 - v_{B1t}\cos\alpha_1 + v_{B2t}\cos\alpha_2$
18	$v_{B1r} = (-\Delta v_x\sin\varphi_1 + \Delta v_y\cos\varphi_1)/\sin\gamma_1$
19	$v_{1r} = \Delta v_x\cos\varphi_1 + \Delta v_y\sin\varphi_1 - v_{B1r}\cos\gamma_1$
20	$v_{Bx} = v_{2x} - v_{B2}\sin\alpha_2$
21	$v_{By} = v_{2y} + v_{B2}\cos\alpha_2$
	Analiza accelerațiilor
22	$\varepsilon_1 = \varepsilon_{01}$
23	$\varepsilon_2 = \varepsilon_1$
24	$a^{\nu}_{1t} = -\omega^2_{01}\, l_{01}$
25	$a^{\tau}_{1t} = \varepsilon_{01}\, l_{01}$
26	$a_{1cor} = 2\omega_{01}\, v_{1r}$
27	$a^{\nu}_{B1t} = -\omega^2_1\, l_1$
28	$a^{\tau}_{B1t} = \varepsilon_1\, l_1$

29	$a_{B1cor} = 2\omega_1 v_{B1r}$
30	$a_{B2}^{\nu} = -\omega_2^2 l_2$
31	$a_{B2}^{\tau} = \varepsilon_2 l_2$
32	$\Delta a_x = (a_{2x} - a_{01x}) - [a_{1t}^{\nu}\cos\varphi_1 - (a_{1t}^{\tau} + a_{1cor})\sin\varphi_1] -$ $- [a_{B1t}^{\nu}\cos\alpha_1 - (a_{B1t}^{\tau} + a_{B1cor})\sin\alpha_1] + (a_{B2}^{\nu}\cos\alpha_2 - a_{B2}^{\tau}\sin\alpha_2)$
33	$\Delta a_y = (a_{2y} - a_{01y}) - [a_{1t}^{\nu}\sin\varphi_1 + (a_{1t}^{\tau} + a_{1cor})\cos\varphi_1] -$ $- [a_{B1t}^{\nu}\sin\alpha_1 + (a_{B1t}^{\tau} + a_{B1cor})\cos\alpha_1] + (a_{B2}^{\nu}\sin\alpha_2 + a_{B2}^{\tau}\cos\alpha_2)$
34	$a_{B1r} = (-\Delta a_x \sin\varphi_1 + \Delta a_y \cos\varphi_1) / \sin\gamma_1$
35	$a_{1r} = \Delta a_x \cos\varphi_1 + \Delta a_y \sin\varphi_1 - a_{B1r}\cos\gamma_1$
36	$a_{Bx} = a_{2x} + a_{B2}^{\nu}\cos\alpha_2 - a_{B2}^{\tau}\sin\alpha_2$
37	$a_{By} = a_{2y} + a_{B2}^{\nu}\sin\alpha_2 + a_{B2}^{\tau}\cos\alpha_2$