ADMITERE LA CURSURILE DE MASTER

Inginerie şi Proiectare Asistată de Calculator pentru Maşini şi Structuri Mecanice

Proba orala / interviul de la examenul de admitere la programul de studii de master

Inginerie şi Proiectare Asistată de Calculator pentru Maşini şi Structuri Mecanice

deşi se finalizează cu o singură notă, este structurată în două parți:

- prima parte este interviul în care candidatul se prezintă, fiind vizate următoarele aspecte: studii absolvite, tematica proiectului de diplomă, loc de muncă, domenii de interes, motivație/determinare pentru a urma acest program de master;
- A doua parte a probei orale constă într-o discuție pe tematica de concurs "*Elemente generale de inginerie mecanică*" al cărui cuprins este prezentat în continuare.

Dupa prezentarea cuprinsului, tematica concursului de admitere este detaliată pe scurt, dar suficient pentru prezentarea la examen.

CUPRINS
ELEMENTE GENERALE DE INGINERIE MECANICĂ

I. Reprezentarea corpurilor şi a sistemelor mecanice Noțiuni de desen tehnic (epura, proiecția ortogonală, vederea, secțiunea, ruptura)

- ***a. Epura***
- ***b. Proiecția ortogonală***
- ***c. Vederea***
- ***d. Secțiunea***
- ***e. Ruptura.***

II. Modelarea sistemelor mecanice (punct material, fir, bară, placă etc)

- ***a. Punctul material***
- ***b. Sistemul de puncte materiale***
- ***c. Continuul material***
- ***d. Corpul solid rigid.***
- ***e. Linia materială***
- ***f. Suprafața materială.***
- ***g. Volumul material.***
- ***h. Corpuri omogene şi izotrope .***
- ***i. Corpuri neomogene***

III. Mecanica corpului nedeformabil

1. Echilibrul punctului material

   a. ***Condiția necesară şi suficientă***
   b. ***Legăturile mecanice: legături fără frecare (ideale) şi legături cu frecare.***
2. **Reducerea sistemelor de vectori alunecători**
3. **Centrul de greutate**
4. **Echilibrul solidului rigid şi al sistemelor de corpuri**
5. **Cinematica punctului material**
   a. ***Traiectoria***
   b. ***Viteza***
   c. ***Accelerația***
6. **Cinematica solidului rigid. Mişcările simple ale rigidului**
   a. ***Relația generala de calcul pentru viteză***
   b. ***Relația generala de calcul pentru accelerație***
   c. ***Mişcarea de translație***
   d. ***Mişcarea de rotație,***
   e. ***Mişcarea elicoidală***
   f. ***Mişcarea plan-paralelă***
7. **Dinamica punctului material**
   a. ***Marimi fizice specifice dinamicii***
   b. ***Forța***
   c. ***Energia mecanică***
   d. ***Lucrul mecanic***
   e. ***Puterea***
   f. ***Impulsul. Teorema impulsului***
   g. ***Momentul cinetic. Teorema momentului cinetic***
   h. ***Teorema variației energiei cinetice***
8. **Dinamica solidului rigid şi a sistemelor de corpuri**
   a. ***Cataterististici inerțiale ale solidelor (masă, centru de masa, moment de inerție, rază de inerție, tensor de inerție)***
   b. ***Impulsul. Teorema impulsului***
   c. ***Momentul cinetic. Teorema momentului cinetic***
   d. ***Energia cinetică. Lucrul mecanic. Teorema variației energiei cinetice***
   e. ***Principiul lui d'Alembert***

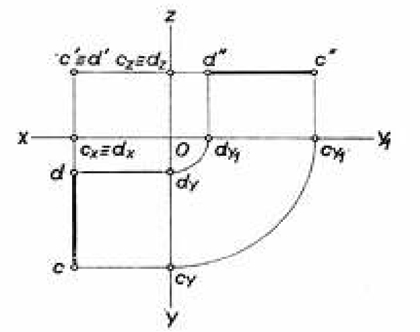
IV. Mecanica corpului deformabil
   a. ***Curba caracteristică a unui material***
   b. ***Legea lui Hooke***
   c. ***Întinderea şi compresiunea***
   d. ***Răsucirea barelor drepte cu secțiune circulară***
   e. ***Încovoierea pură a barelor drepte; încovoiere pură dreaptă; încovoiere cu forță tăietoare***
   f. ***Solicitări compuse***
   g. ***Oboseala***

Tematica concursului de admitere

ELEMENTE GENERALE DE INGINERIE MECANICĂ

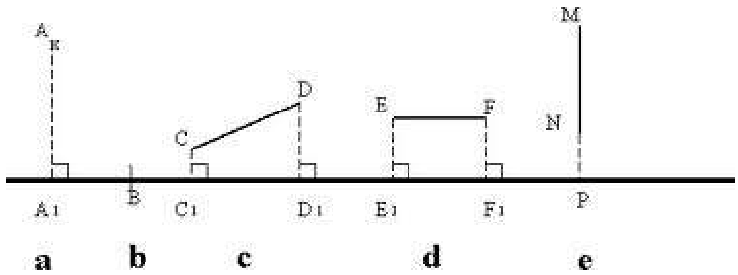
I. Reprezentarea corpurilor şi a sistemelor mecanice Noțiuni de desen tehnic (*epura, proiecția ortogonală, vederea, secțiunea, ruptura*).

a) ***Epura*** Desen liniar care reprezintă în proiecţii diferitele părţi ale unei maşini, ale unei piese etc.



b) ***Proiecția ortogonală*** se obține prin intersecția planului de proiecție cu proiectantele duse perpendicular pe acest plan din diferite puncte ale obiectului. Reprezentarea în proiecție ortogonală a obiectelor în desenul tehnic se bazează pe principiile geometriei descriptive.

În geometria descriptivă obiectele din spațiu se reprezintă prin proiecțiile lor ortogonale pe planele de proiecție, care constituie sistemul de referință, format din două sau trei plane de proiecție perpendiculare între ele.



c) ***Vederea*** este reprezentarea în proiecție ortogonală pe un plan a unei piese nesecționate şi se realizează prin proiectarea în totalitate a elementelor văzute de observatorul uman, conform regulilor geometriei descriptive

d) ***Secțiunea*** este reprezentarea în proiecție ortogonală pe un plan a unei piese, aşa cum ar arăta aceasta dacă ar fi intersectată cu un plan imaginar numit plan de secționare, iar porțiunea din piesă aflată între observatorul uman şi suprafața de secționare ar fi îndepărtată.

e) ***Ruptura*** este reprezentarea unei piese în proiecție ortogonală din care se îndepărtează o anumită parte, separând-o de restul piesei printr-o suprafață neregulată.

II. Modelarea sistemelor mecanice (punct material, fir, bară, placă etc)

a) ***Punctul material*** (particulă materială) este punctul geometric căruia i se atribuie masă.

b) ***Sistemul de puncte materiale*** este un sistem de puncte materiale care interacționează între ele.

c) ***Continuul material*** reprezintă modelul unui corp la care se admite (la nivel microscopic) că orice element de volum conține materie (substanță), adică are masă.
d) ***Corpul solid rigid*** (rigidul) reprezintă un continuu material nedeformabil.
După forma şi dimensiunile corpurilor modelele Mecanicii teoretice sunt:
e) ***Linia materială*** care este o linie geometrică având masa distribuită în lungul ei. Acest model se foloseşte pentru corpurile la care două dintre dimensiuni sunt neglijabile în raport cu a treia. Linia materială este reprezentată de bară, când este rigidă, sau de fir, când este flexibilă.
f) ***Suprafața materială*** este o suprafață geometrică cu masa distribuită. Acest model se foloseşte pentru corpurile care au una dintre dimensiuni neglijabilă în raport cu celelalte două. Suprafața materială este reprezentată de placă, atunci când este rigidă, sau de membrană, atunci când este flexibilă.
g) ***Volumul material*** (blocul) este modelul unui corp la care cele trei dimensiuni sunt comparabile între ele ca mărime.
După modul de distribuire a masei corpurile pot fi:
h) ***Corpuri omogene şi izotrope*** când masa este constantă şi uniform distribuită, adică densitatea este aceeaşi în orice punct.
i) ***Corpuri neomogene*** când masa este neuniform distribuită în corp, adică densitatea este o funcție de coordonatele punctului.

III. Mecanica corpului nedeformabil

1. Echilibrul punctului material

Prin **număr de grade de libertate** se înțelege numărul parametrilor independenți, necesari şi suficienți pentru a defini poziția unui punct sau a unui corp la un moment dat.

Un **punct material liber** poate ocupa orice poziție în spațiu, neavând nicio restricție geometrică. Poziția în spațiu pe care o ocupă punctul este dată de forțele care acționează asupra lui.

a. ***Condiția necesară şi suficientă*** ca un punct material liber care se află în repaus să rămână în aceeaşi stare mecanică sub acțiunea unui sistem de forțe concurente, adică să se afle în echilibru, este ca rezultanta $\vec{R}$ a acestor forțe să fie nulă.

Această condiție se scrie sub formă vectorială:

$$\vec{R} = 0$$

Proiectând ecuația pe axele unui sistem de referință cartezian se obțin, în spațiu, trei ecuații scalare:

$$\begin{cases} \sum F_{ix} = 0 \\ \sum F_{iy} = 0 \\ \sum F_{iz} = 0 \end{cases}$$

b. ***Legaturile mecanice***. Un **punct material supus la legături** nu mai poate ocupa orice poziție în spațiu deoarece i se impun anumite restricții geometrice. El este constrâns să rămână pe o suprafață, pe o curbă sau chiar într-un punct fix din spațiu.

Datorită existenței legăturilor, asupra punctului se exercită anumite constrângeri mecanice reprezentate prin forța de legătură care se numeşte şi **reacțiune**, notată pe $\vec{R}'$.

Condiția necesară şi suficientă ca un punct material supus la legături să fie în echilibru este ca rezultanta forțelor direct aplicate şi a forței de legătură să fie nulă, adică:

$$\vec{R} + \vec{R}' = 0$$

Legăturile se clasifică în **legături fără frecare** (ideale) şi **legături cu frecare**.

În cazul legăturilor cu frecare la condiția de echilibru se adaugă condiția:

$$\left|\vec{T}\right| \le \mu \left|\vec{N}\right|$$

unde μ este coeficientul de frecare de alunecare, $\vec{T}$ este forța de frecare, $\vec{N}$ este reacțiunea normală.

2. **<u>Reducerea sistemelor de vectori alunecători</u>**

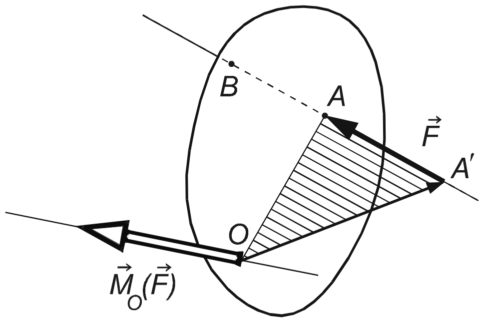
O forță care acționează asupra unui rigid nu mai este vector legat, ca în cazul punctului material, ci este **<u>vector alunecător</u>**, adică poate aluneca pe suportul său fără ca efectul său asupra rigidului să se modifice.

Se definește mărimea vectorială $\vec{M}_O\left(\vec{F}\right)$ ca **<u>momentul forței</u>** $\vec{F}$ **<u>în raport cu punctul O</u>** astfel:

$$\vec{M}_O\left(\vec{F}\right)=\overrightarrow{OA'}\times\vec{F}$$

Momentul unei forțe în raport cu un punct exprimă capacitatea forței de a roti un rigid în jurul unei drepte care trece prin punct și este perpendiculară pe planul determinat de suportul forței și punctul respectiv.

Momentul $\vec{M}_O$ este un vector aplicat în *O*, perpendicular pe planul definit de vectorii $\overrightarrow{OA'}$ și $\vec{F}$ și al cărui sens se determină cu regula burghiului drept.



<u>Teorema de echivalență a două sisteme de vectori alunecători</u>: *dacă două sisteme de vectori alunecători (S') și (S'') au același vector rezultant ($\vec{R}'=\vec{R}''$) și același vector moment rezultant în punctul O ($\vec{M}'=\vec{M}_O''$), atunci cele două sisteme de vectori alunecători sunt echivalente*, adică se pot deduce unul din altul printr-o succesiune de operații elementare de echivalență.

Ansamblul de mărimi vectoriale format din rezultantă și momentul rezultant, ($\vec{R},\vec{M}_O$), poartă numele de **<u>torsor</u>** al sistemului de vectori alunecători în punctul *O* și se notează:

$$\tau_O\begin{cases}\vec{R}=\sum\vec{F}_i\\ \vec{M}_O=\sum\vec{r}_i\times\vec{F}_i\end{cases}.$$

3. **<u>Centrul de greutate</u>**

Centrul de greutate (de masă) pentru un **sistem de puncte materiale** sau **solid rigid** este punctul în care momentul rezultant al forțelor de greutate este egal cu zero. Este punctul de aplicație al forței de greutate a sistemului.

Coordonatele ξ, η și ζ ale centrului de greutate, pentru un sistem de puncte materiale, se obțin cu relațiile:

$$\xi=\frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i};\quad \eta=\frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i};\quad \zeta=\frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}.$$

în care: x_i, y_i, z_i reprezintă coordonatele punctului care are greutatea $G_i=m_i g$.

Pentru coordonatele centrului de greutate (de masă) al mediilor continue se obțin analog relațiile:

$$\xi=\frac{\int_{(D)} x dm}{\int_{(D)} dm};\quad \eta=\frac{\int_{(D)} y dm}{\int_{(D)} dm};\quad \zeta=\frac{\int_{(D)} z dm}{\int_{(D)} dm}.$$

în care: *x*, *y* și *z* reprezintă coordonatele centrului de masă al elementului de masă infinit mic *dm*.

Proprietate: dacă un sistem admite un plan de simetrie, o axă de simetrie sau un centru de simetrie, atunci centrul de masă se află în acel plan de simetrie, pe acea axă sau în acel centru de simetrie.

Pentru un corp compus coordonatele centrului maselor se determină cu relațiile:

$$\xi = \frac{\sum_{i=1}^{p} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{p} m_i}\ ;\ \eta = \frac{\sum_{i=1}^{p} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{p} m_i}\ ;\ \zeta = \frac{\sum_{i=1}^{p} m_i z_i}{\sum_{i=1}^{p} m_i}$$

în care: "*p*" este numărul de corpuri simple care alcătuiesc corpul compus; x_i, y_i, z_i şi m_i reprezintă coordonatele şi repectiv masa corpului simplu indice "*i*" care intră în componența corpului compus.

4. Echilibrul solidului rigid şi al sistemelor de corpuri

Un **solid rigid** este **liber** dacă poate ocupa orice poziție în spațiu, neavând nicio obligație de natură geometrică (de exemplu obligația ca un anumit punct al său să rămână pe o curbă sau pe o suprafață, ca un anumit punct al său să rămână fix în spațiu etc.).

Un **solid rigid liber** în spațiu are 6 grade de libertate.

Condiția necesară şi suficientă ca un solid rigid liber, *acționat de un sistem de forțe să fie în echilibru este*

$$\begin{cases} \vec{R} = 0 \\ \vec{M}_O = 0 \end{cases}$$

Punctul *O* față de care se calculează momentele este arbitrar.

Proiectând pe axe se obțin ecuațiile scalare:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} F_{iz} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} M_{ix} = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} M_{iy} = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} M_{iz} = 0 \end{cases}.$$

Un **solid rigid** este **supus la legături** dacă are restricții geometrice, adică dacă cel puțin un punct al său este obligat să rămână pe o suprafață, pe o curbă sau într-un punct fix.

Numărul de grade de libertate ale unui **solid rigid supus la legături** (în spațiu) este mai mic de 6.

Legăturile solidului rigid pot fi **fără frecare** sau **cu frecare**.

Fiecare tip de legătură se înlocuieşte cu forțe şi momente corespunzătoare.

Condițiile de echilibru pentru un solid rigid supus la legături fără frecare sunt

$$\begin{cases} \vec{R} + \vec{R}' = 0 \\ \vec{M}_O + \vec{M}'_O = 0 \end{cases}$$

care, proiectate pe axe, conduc la sistemul:

$$\begin{cases} R_x + R'_x = 0 \\ R_y + R'_y = 0 \\ R_z + R'_z = 0 \\ M_x + M'_x = 0 \\ M_y + M'_y = 0 \\ M_z + M'_z = 0 \end{cases}.$$

Legăturile fără frecare ale solidului rigid sunt: **reazemul simplu**, **articulația sferică**, **articulația cilindrică**, **încastrarea, prinderea cu fir**.

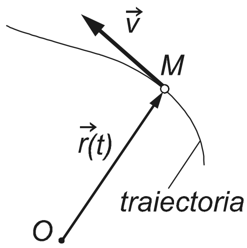
Tipurile de frecare în cazul solidului rigid sunt: frecarea de alunecare, frecarea de rostogolire, frecarea de pivotare, frecarea în articulație.

La ecuațiile de echilibru se adaugă şi condițiile privind forțele de frecare sau momentele de frecare.

Principiul acțiunii şi reacțiunii: La orice acțiune corespunde o reacțiune egală şi contrară.
În cazul **echilibrului sistemelor de corpuri** se pot aplica: **metoda izolării corpurilor**, **teorema solidificării**, **teorema echilibrului părților** şi **principil actiunii şi reacțiunii**.
Etapele rezolvării unei probleme prin metoda izolării corpurilor sunt:
- Se izolează corpurile. Se separă complet unul de celălalt şi se eliberează de legăturile exterioare.
- Se figurează forțele şi momentele cuplurilor date (direct aplicate).
- Se figurează reacțiunile, adică forțele şi momentele cuplurilor introduse de legăturile exterioare.
- Se figurează forțele şi momentele cuplurilor introduse de legăturile interioare (reacțiunile din legăturile interioare). Se are în vedere aplicarea principiului acțiunii şi reacțiunii.
- Pentru fiecare corp în parte se alege câte un sistem de axe şi se scriu ecuațiile de echilibru. Sensurile pozitive ale axelor şi momentelor sunt arbitrare. Punctele față de care se calculează momentele sunt de asemenea arbitrare.
- Se scriu, acolo unde este cazul, condițiile de echilibru pentru forțele de frecare şi momentele de frecare exterioare şi/sau interioare.
- Se rezolvă sistemul de ecuații şi inecuații obținut.

5. Cinematica punctului material

a. ***Traiectoria*** este locul geometric al pozițiilor succesive ale punctului material în mişcare (al vârfului vectorului de poziție $\vec{r}$).



Traiectoria poate fi: o curbă, un arc de curbă, o succesiune de arce de curbă suprapuse.

b. ***Viteza*** se defineşte:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$$

Vectorul viteză este tangent la traiectorie în punctul considerat, iar sensul corespunde sensului de mişcare. Unitatea de măsură pentru viteză în S.I.: m/s.

c. ***Accelerația*** se defineşte:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}$$

Accelerația arată: - **cum variază viteza ca scalar** (creşte, scade, este constantă);
- **cum variază viteza ca direcție** (punctul se deplasează pe o curbă sau pe o dreaptă)

Unitatea de măsură pentru accelerație în S.I. este m/s^2 .

6. Cinematica solidului rigid. Mişcările simple ale rigidului

a. ***Relația generala de calcul pentru viteza*** unui punct al rigidului:

$$\vec{v} = \vec{v}_o + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

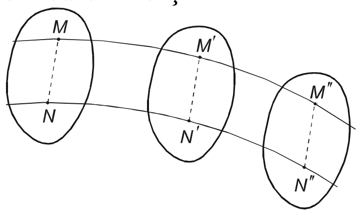
în care: $\vec{v}_o$ este viteza originii sistemului de referință mobil, solidar cu rigidul; $\vec{\omega}$ este un vector care arată dacă axele sistemului de referință mobil îşi modifică orientarea în timpul mişcării; $\vec{r}$ este vectorul de poziție.

b. ***Relația generala de calcul pentru accelerația*** unui punct al rigidului:

$$\vec{a} = \vec{a}_o + \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

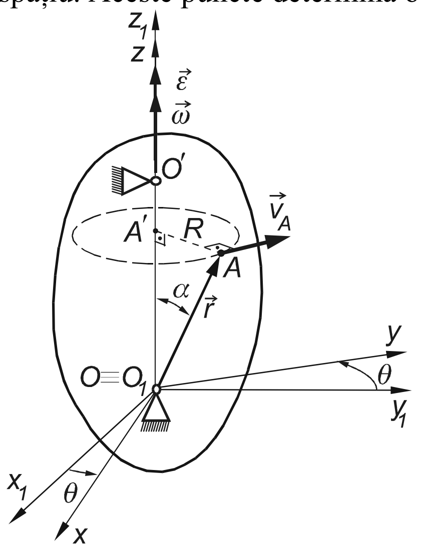
în care $\vec{a}_O$ este accelerația originii sistemului de referință mobil, solidar cu rigidul; $\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}}$

c. ***Mişcarea de translație*** este mişcarea la care o dreaptă oarecare *AB* solidară cu rigidul rămâne în tot timpul mişcării paralelă cu ea însăşi.



Traiectoriile diferitelor puncte ale rigidului (care pot fi drepte sau curbe) sunt identice şi pot fi suprapuse printr-o translație geometrică.

d. ***Miscarea de rotatie.*** Un solid rigid are o **mişcare de rotație**, dacă în timpul mişcării două puncte ale rigidului rămân fixe în spațiu. Aceste puncte determină o dreaptă fixă numită **axă de rotație**.



Corpul are **un singur grad de libertate**: unghiul (parametrul) $\theta = \theta(t)$.

Traiectoriile punctelor sunt **cercuri** situate în plane perpendiculare pe axa de rotație.

Vectorul $\vec{\omega}$ **se numeşte viteză unghiulară**, are are ca suport axa de rotație, iar scalarul egal cu derivata parametrului (unghiului) θ: $\omega = \dot{\theta}$.

Viteza unui punct al rigidului aflat în mişcare de rotatie se calculează cu relația:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \text{ sau } |\vec{v}| = |\vec{\omega}| R .$$

Vectorul ε **se numeşte accelerație unghiulară**, are ca suport axa de rotație iar scalarul egal cu derivata a doua a parametrului (unghiului) θ: $\varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\theta}$.

Accelerația unui punct al rigidului aflat în mişcare de rotație se calculează cu relația:

$$\vec{a} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \text{ sau } \vec{a} = \vec{a}^{\tau} + \vec{a}^{\nu}; \ |\vec{a}| = \sqrt{|\vec{a}^{\tau}| + |\vec{a}^{\nu}|} .$$

în care: - $\vec{a}^{\tau}$ se numeşte **accelerație tangențială**, arată cum variază vectorul viteză ca mărime şi are expresia

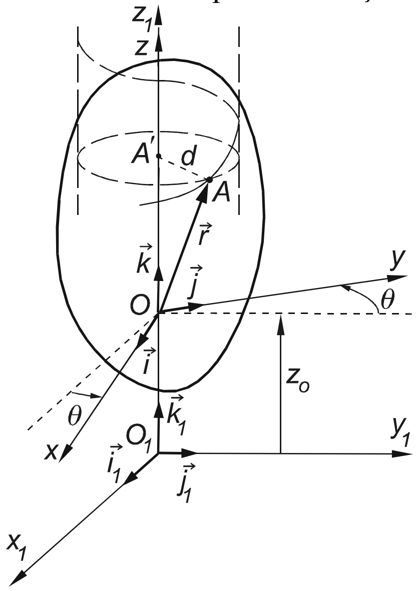
$$\vec{a}^{\tau} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} \text{ sau } |\vec{\varepsilon}| = |\vec{\varepsilon}| R ;$$

- $\vec{a}^{\nu}$ se numeşte **accelerație normală**, arată cum variază vectorul viteză ca direcție şi are expresia

$$\vec{a}^{\nu} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \text{ sau } |\vec{\omega}| = \omega^2 R .$$

Punctele situate pe axa de rotație au viteza şi accelerația egală cu zero.

e. ***<u>Mişcare elicoidală</u>*** Un rigid execută o **<u>mişcare elicoidală</u>** dacă o dreaptă solidară cu el păstrează în timpul mişcării suportul fix. Această dreaptă se numeşte **axa mişcării elicoidale**.



Corpul are **două grade de libertate**: $z_o = z_o(t)$ şi $\theta = \theta(t)$.

Traiectoriile punctelor rigidului sunt curbe înfăşurate pe cilindri.

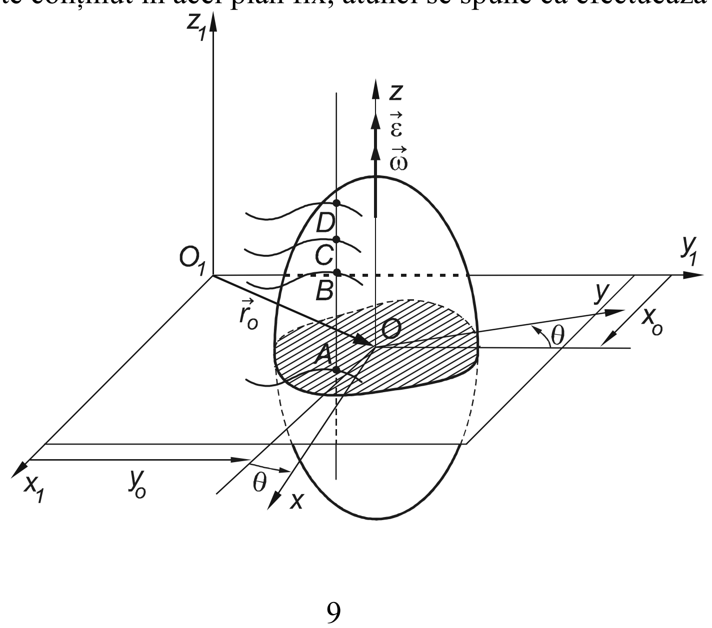
Se poate spune că rigidul se roteşte în jurul axei mişcării elicoidale şi în acelaşi timp înaintează în lungul acestei axe. Intuitiv, se poate considera că mişcarea elicoidală este compusă dintr-o rotaţie şi o translaţie în lungul axei de rotaţie.

Distribuţia de viteze şi distribuţia de acceleraţii se pot obţine prin suprapunerea a două câmpuri de viteze, respectiv de acceleraţii: unul specific unei mişcări de rotaţie în jurul axei mişcării elicoidale, iar celălalt specific unei translaţii în lungul axei mişcării elicoidale.

Punctele situate pe axa mişcării elicoidale au vitezele şi acceleraţiile minime.

f. ***<u>Mişcare plan-paralelă</u>*** Un solid rigid efectuează o **<u>mişcare plan-paralelă</u>** dacă trei puncte necoliniare ale sale (adică un plan al său) sunt conţinute tot timpul mişcării într-un plan fix din spaţiu.

Dacă solidul rigid este conţinut în acel plan fix, atunci se spune că efectuează o **mişcare plană**.



Corpul are **trei grade de libertate**: coordonatele originii sistemului de referință mobil, $x_O = x_O(t)$, $y_O = y_O(t)$ şi unghiul $\theta = \theta(t)$ pe care îl face una dintre axele din planul fix cu poziția ei inițială.

Traiectoriile punctelor rigidului sunt curbe situate în plane paralele cu planul fix. Punctele situate pe o dreaptă perpendiculară pe planul fix descriu traiectorii identice.

Vectorii viteză sunt conținuți în plane paralele cu planul fix.

În orice moment există nişte puncte care au vitezele egale cu zero. Aceste puncte se află pe o dreaptă mobilă, perpendiculară pe planul fix, numită **axă instantanee de rotație**.

Vitezele punctelor rigidului se calculează ca la mişcarea de rotație ca şi când, în acel moment, corpul s-ar roti în jurul axei instantanee de rotatie.

Vectorii accelerație sunr conținuți în plane paralele cu planul fix.

În orice moment există nişte puncte care au accelerațiile egale cu zero. Aceste puncte se află pe o dreaptă (axă) mobilă, diferită de axa instantanee de rotație, perpendiculară pe planul fix.

Accelerațiile punctelor rigidului se calculează ca la mişcarea de rotație ca şi când, în acel moment, corpul s-ar roti în jurul acestei axe mobile ale cărei puncte au accelerațiile egale cu zero.

7. **Dinamica punctului material *Mărimi fizice specifice dinamicii. Teoreme generale.***

a. ***Forța*** este mărimea fizică vectorială, prin care se măsoară acțiunea unui sistem asupra altuia. Unitatea de masură – newton (N).

Datorită principiului acțiunii şi reacțiunii (*orice acțiune a unui sistem 1 asupra altui sistem 2 este însoțită de o reacțiune egală şi de sens opus, adică acțiunea sistemului 2 asupra sistemului 1*) se spune că forța este o masură a interacțiunii dintre două sisteme mecanice.

Efectul mecanic al forței asupra unui punct material este evaluat conform principiului fundamental al dinamicii: *efectul acțiunii forței asupra unui punct material liber este schimbarea stării de mişcare a acestuia, masurată printr-o accelerație proportională cu mărimea forței, în sensul şi pe direcția forței. Factorul de proporționalitate este masa punctului material. Expresia matematică a acestui principiu este*

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

Există mai multe tipuri de forțe: forța de greutate, forțe elastice, forțe de frecare, ...

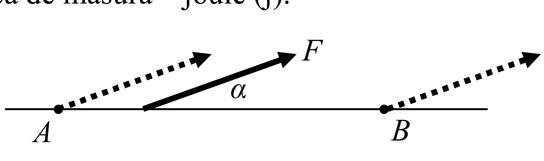
b. ***Energia mecanică*** este o mărime fizică de stare prin care se evaluează capacitatea sistemului mecanic de a-şi modifica starea de mişcare. Unitatea de măsură – joule (j). Se pot distinge

Energie potențială–de poziție: gravitațională $E_{pG} = mgh$, de deformație (elastică) $E_{pE} = \frac{1}{2}kx^2$

Energie cinetică $E = \frac{1}{2}mv^2$

c. ***Lucrul mecanic*** este o mărime fizică de transformare, de proces, care evaluază din punct de vedere mecanic trecerea dintre două stări. Unitatea de masura – joule (j).

Lucrul mecanic efectuat de o forță constantă care îşi deplaseaza punctul de aplicație pe un segment de linie dreaptă este

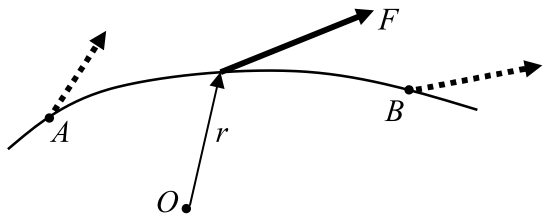


$$L_{AB} = \vec{F} \cdot \vec{AB} = F \cdot AB \cdot \cos\alpha$$

Lucrul mecanic efectuat de o forță elastică care îşi deplasează punctul de aplicație de la punctul A(x_1) la punctul B(x_2) este dat de relația

$$L_{AB} = -\frac{1}{2}k(x_2^2 - x_2^2) = -\frac{k(x_1 + x_2)}{2}(x_2 - x_1) = -F_{med} \cdot \Delta x$$

În general pentru o forță oarecare care îşi deplasează punctul de aplicație pe un segment de curbă oarecare este



$$L_{AB}=\int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_A^B\left(F_x dx+F_y dy+F_z dz\right)$$

Lucrul mecanic poate fi lucru mecanic motor, util (pozitiv), sau lucru mecanic rezistent (negativ).

d. ***Puterea*** este marimea fizică scalară egală cu raportul dintre lucrul mecanic efectuat şi intervalul de timp în care este efectuat. Unitatea de masură – watt (W).

$$P=\frac{L_{AB}}{t_{AB}}$$

Se defineşte puterea instantanee $P=\frac{dL}{dt}$. Puterea poate fi: putere motoare, utilă, sau putere rezistentă.

e. Impulsul. Teorema impulsului

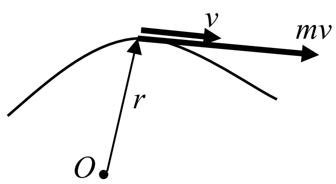
Impulsul unui punct material, numit şi "cantitate de mişcare", este definit ca mărimea vectorială egală cu produsul dintre masa şi viteza punctului material.

$$\vec{H}=m\vec{v}$$

Teorema impulsului: *variația impulsului unui punct material este egală cu suma vectorială a forțelor care acționează asupra acestuia.*

$$\frac{d\vec{H}}{dt}=\sum\vec{F}_i$$

f. Momentul cinetic. Teorema momentului cinetic



Momentul cinetic în raport cu un punct *O* este o mărime fizică vectorială egală cu momentul vectorului impuls în raport cu punctul *O*.

$$\vec{K}_O=\vec{r}\times m\vec{v}$$

Teorema momentului cinetic are enunțul: *Variația momentului cinetic, calculat în raport cu un punct fix O, este egală cu suma vectorială a momentelor forțelor aplicate punctului material, calculate în raport cu acelaşi punct fix O.* Expresia acestei teoreme se scrie

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt}=\sum\vec{M}_O(\vec{F}_i)$$

g. ***Teorema variatiei energiei cinetice*** Teorema variației energiei cinetice, aplicabilă pentru determinarea accelerației punctului material, are enunțul: *variația energiei cinetice a unui punct material este egală cu lucrul mecanic efectuat de forțele care acționează asupra acesuia.*

Expresia teoremei energiei cinetice este

$$dE=dL$$

8. Dinamica solidului rigid şi a sistemelor de corpuri

a. Catateristici inerțiale ale solidelor (masă, centru de masă,* moment de inerție, rază de inerție, tensor de inerție*)

O importanță deosebită în abordarea problemelor de dinamică o are distribuția de masă a sistemului. Prin definiție, *masa este o mărime fundamentală prin care se evaluează proprietățile inerțiale ale sistemului, adică proprietatea corpului de a se opune schimbării stării de mişcare rectilinie şi uniformă. Se poate spune că măsura cantiativă a inerției unei particule materiale este masa.*

Proprietățile inerțiale ale unui sistem mecanic sunt dependente de distribuția de masă în domeniul ocupat de acesta, distribuție care trebuie raportată la un sistem de referință triortogonal.

În cazul sistemelor mecanice modelate (aproximate) ca punct material caracteristicile inerțiale ale acestuia sunt masa *m* ca masă totală a sistemului şi pozitia centrului de masă definit anterior.

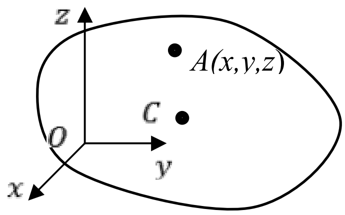
În cazul sistemelor mecanice modelate ca solide evaluarea proprietăților inerțiale se face cu mărimi fizice numite *momente de inerție.* Influența momentelor de inerție în studiul dinamicii sistemelor este evidențiată numai dacă mişcarea sistemului mecanic are o componentă de mişcare de rotație (punctele sistemului au viteze diferite).
Se pot defini: momente de inerție planare, momente de inerție axiale, momente de inerție polare, momente centrifugale (produse de inerție). Pe baza figurii alăturate, unde în punctul *A(x,y,z)* se consideră un element infinitezimal de masă *dm,* relațiile de definiție a acestor momente de inerție sunt:

Momente de inerție planare

$$J_{Oxy} = \int z^2 dm \quad , \quad J_{Oyz} = \int x^2 dm \quad , \quad J_{Oxz} = \int x^2 dm$$

Momente de inerție axiale

$$J_{Ox} = \int (y^2 + z^2) dm \quad , \quad J_{Oy} = \int (x^2 + z^2) dm \quad , \quad J_{Oz} = \int (x^2 + y^2) dm$$



Moment de inerție polar

$$J_O = \int (x^2 + y^2 + z^2) dm = \frac{1}{2}(J_{Ox} + J_{Oy} + J_{Oz})$$

Moment centrifugale

$$J_{Oxy} = \int x\, y\, dm \quad , \quad J_{Oxz} = \int x\, z\, dm \quad , \quad J_{Oyz} = \int y\, z\, dm$$

Pentru o caracterizare totală din punct de vedere inerțial a sistemului mecanic, din cele 10 mărimi definite anterior sunt suficiente 6. Aceste 6 mărimi sunt aranjate ca şi componente ale unei *„matrice de inerție ”* (matrice asociată tensorului moment de inerție) $[J_O]$, matrice cu care calculele din Dinamică se efectueaza mult mai uşor. Matricea de inerție depinde de punctul în care se calculează, iar expresia acesteia este

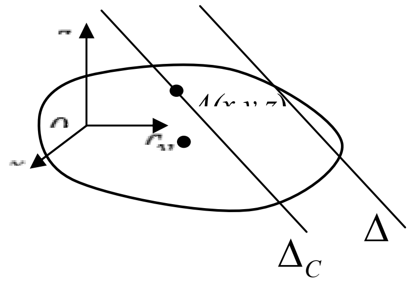
$$[J_O] = \begin{bmatrix} J_{Ox} & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{xy} & J_{Ox} & -J_{yz} \\ -J_{xz} & -J_{yz} & J_{Ox} \end{bmatrix}$$

Momentele de inerție axiale, specifice unei direcții, au valori minime față de axa (dreapta) care trece prin centrul de masă al rigidului. Momentele de inerție axiale sunt legate de proprietatea de simetrie a distribuției de masă.
La schimbarea axelor în raport cu care se calculează momentele de inerție axiale şi centrifugale, păstrând direcția constantă, se aplică relațiile lui Steiner

$$J_\Delta = J_{\Delta_C} + m\, d^2$$

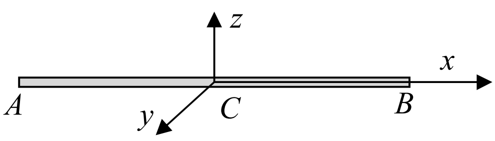
$$J_{X_A Y_A} = J_{X_A Y_A} + m\, X_{AC} Y_{AC}$$

unde *d* este distanța dintre axele Δ_C si Δ, iar X_{AC} si Y_{AC} sunt coordonatele *x* respectiv *y* ale punctului *A* față de un sistem de referință cu originea în *C* (central de masa)



Exemple de momente de inerție

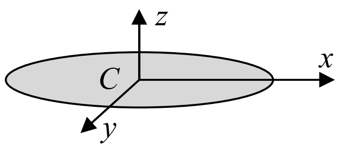
<u>Bară omogenă de masă *m* şi lungime *AB=b*</u>



$$J_{Cy} = J_{Cz} = \frac{m\, l^2}{12} \quad , \quad J_{Cx} = 0$$

$$J_{Cxy} = J_{Cyz} = J_{Cxz} = 0$$

Disc omogen de masă *m* şi rază *R*



$$J_{Cx} = J_{Cy} = \frac{m R^2}{4} \quad , \quad J_{Cz} = \frac{m R^2}{2}$$

$$J_{Cxy} = J_{Cyz} = J_{Cxz} = 0$$

b. Impulsul. Teorema impulsului

Indiferent de tipul de mişcare executată de rigid, dacă $\vec{v}_C$ si $\vec{a}_C$ sunt viteza respectiv accelerația centrului de masă al acestuia, impulsul rigidului $\vec{H}$ este

$$\vec{H} = m\vec{v}_C$$

iar teorema impulsului are expresia

$$\frac{d\vec{H}}{dt} = \sum \vec{F}_i$$

Enunțul acestei teoreme este: *variația impulsului unui rigid este egală cu suma vectorială a forțelor care acționează asupra acelui rigid.*
Teorema impulsului poate avea şi forma

$$m\vec{a}_C = \sum \vec{F}_i$$

numită şi *teorema mişcării centrului de masa*.

c. Momentul cinetic. Teorema momentului cinetic

Momentul cinetic al unui sistem de puncte materiale sau al unui rigid în raport cu un punct fix sau în raport cu centrul de masă al acestuia, notat cu $\vec{K}_C$, este definit ca suma momentelor cinetice ale tuturor particulelor rigidului în raport cu acelasi punct

$$\vec{K}_C = \sum \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i \ .$$

Momentul cinetic al unui rigid este o mărime care depinde de tipul de mişcare efectuată de rigid.
Dacă rigidul efectuează o mişcare de rotatie în jurul unei axe (D) care este şi axă de simetrie, sau dacă rigidul este conținut într-un plan perpendicular pe axa de rotație (D), atunci expresia momentului cinetic este:

$$K_D = J_D\omega$$

în care $\vec{\omega}$ este viteza unghiulară.
Teorema momentului cinetic poate fi aplicată în raport cu un punct fix sau în raport cu centrul de masă.
Teorema momentului cinetic are enunțul: *variația momentului cinetic al unui rigid în raport cu centrul de masă este egală cu suma vectorială a momentelor forțelor aplicate rigidului calculate în raport cu centrul de masă al acestuia.* Expresia acestei teoreme se scrie

$$\frac{d\vec{K}_C}{dt} = \sum \vec{M}_C(\vec{F}_i)$$

Dacă rigidul efectuează o mişcare de rotatie în jurul unei axe (D) care este şi axă de simetrie, sau dacă rigidul este conținut într-un plan perpendicular pe axa de rotație (D), atunci expresia teoremei momentului cinetic este:

$$\frac{dK_D}{dt} = J_D\varepsilon = \sum M_D(\vec{F}_i)$$

$$J_D\varepsilon = \sum M_D(\vec{F}_i)$$

în care $\vec{\varepsilon}$ este acceleratia unghiulară.

d. Energia cinetică. Lucrul mecanic. Teorema variatiei energiei cinetice

Energia cinetica a unui sistem de puncte materiale sau al unui rigid este egală cu suma energiilor cinetice ale tuturor particulelor sistemului.

$$E = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

Expresia energiei cinetice este dependentă de tipul de mişcare efectuată de rigid.
Dacă un rigid de masă *m,* efectuează o mişcare de translaţie, cu viteza centrului de masă $\vec{v}_C$, expresia energiei cinetice este:

$$E = \frac{1}{2} m v_C^2 .$$

Dacă un rigid efectuează o mişcare de rotaţie în jurul unei axe (D) expresia energiei cinetice este:

$$E = \frac{1}{2} J_D \omega^2$$

în care: $\vec{\omega}$ este viteza unghiulară; J_D este momentul de inerţie al rigidului calculat în raport cu axa de rotatie.
Dacă mişcarea efectuată de rigid este una plană, într-un plan normal la dreapta (D) care trece prin centrul de masă, energia cinetica a rigidului se scrie:

$$E = \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} J_D \omega^2$$

Lucrul mecanic elementar efectuat de un sistem de forţe şi cupluri care acţionează asupra unui rigid este:

$$dL = \vec{R} d\vec{r}_O + \vec{M}_O d\vec{\theta}$$

în care: $\vec{R}$ este rezultanta forţelor; $\vec{M}_O$ este momentul rezultant al forţelor şi cuplurilor în raport cu punctul *O*; $d\vec{r}_O$ deplasarea infinitezimală în mişcare de translaţie; $d\vec{\theta}$ deplasarea infinitezimală în mişcare de rotaţie.
Teorema variaţiei energiei cinetice are enunţul: *variaţia energiei cinetice a unui sistem mecanic este egală cu lucrul mecanic efectuat de forţele exterioare şi de forţele interioare.*
Expresia teoremei energiei cinetice este

$$dE = dL_{forteEXT} + dL_{forteINT}$$

În foarte multe cazuri forţele interioare nu efectuează lucru mecanic.

e. Principiul lui d'Alembert

O altă abordare a dinamicii sistemelor mecanice este bazată pe principiul lui d'Alembert. Pentru o astfel de abordare se introduce noţiunea de forţă de inerţie.
Forţa de inerţie $\vec{F}_{iin}$ este o forţă fictivă, o forţă care nu măsoară o interacţiune. Mărimea forţei de inerţie este proporţională cu acceleraţia, are direcţia acesteia şi sens opus acceleraţiei.
În cazul punctului material forţa de inerţie este

$$\vec{F}_{in} = -m \vec{a}$$

În cazul rigidului, în fiecare punct al acestuia acţionează o forţă de inerţie. Acestea alcătuiesc un sistem de forţe de inerţie care se reduce la un torsor de inerţie σ_{in}. Reducerea sistemului forţelor de inerţie se face, de obicei, în centrul de masă al rigidului.

$$\sigma_{inC} = \begin{cases} \vec{F}_{in} = \int -\vec{a}\, dm = -m \vec{a}_C \\ \vec{M}_{inC} = \int -\vec{r} \times \vec{a}\, dm = -\dfrac{d\vec{K}_C}{dt} \end{cases}$$

unde $\vec{a}_C$ este acceleraţia centrului de masă al solidului, iar $\vec{K}_C$ este momentul cinetic al solidului în raport cu centrul de masă. Dacă sistemul mecanic execută o mişcare plană, într-un plan normal la dreapta (D), care conţine şi centrul de masă, momentul forţelor de inerţie în centrul de masă va fi:

$$\vec{M}_{inC} = -J_D \vec{\varepsilon} .$$

Dacă rigidul efectuează o mişcare de rotaţie în jurul unei axe (D) care este şi axă de simetrie, sau dacă rigidul este conţinut într-un plan perpendicular pe axa de rotaţie (D), atunci momentul rezultant al forţelor de inerţie în raport cu un punct de pe axa de rotaţie:

$$\vec{M}_{in O} = -J_D \vec{\varepsilon}$$

în care: J_D este momentul de inerţie în raport cu axa de rotaţie; $\vec{\varepsilon}$ este acceleratia unghiulară.

Enunţul principiului lui d'Alembert, care este cel mai aplicabil în problemele de dinamică, este următorul: *Pentru un solid rigid, sistemul forţelor exterioare, împreună cu sistemul forţelor de legatură şi sistemul forţelor de inerţie formează un sistem de forţe în echilibru. Expresia acestui enunţ se poate scrie:*

$$\left(\sigma_{forte\,EXT\,C}\right) + \left(\sigma_{forte\,LEG\,in\,C}\right) + \left(\sigma_{in\,C}\right) = 0$$

Dacă se notează generic cu R rezultanta forţelor, şi cu M momentul forţelor, relaţia anterioară se poate scrie

$$\vec{R}_{forte\,EXT} + \vec{R}_{forte\,LEG} + \vec{R}_{forte\,IN} = 0$$

$$\vec{M}_{forte\,EXT\,C} + \vec{M}_{forte\,LEG\,C} + \vec{M}_{forte\,IN\,C} = 0$$

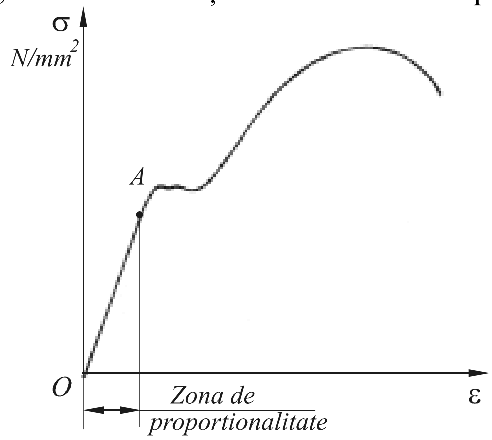
Prin aplicarea principiului lui d'Alembert, rezolvarea unei probleme de dinamică se va face aplicând metodele din Statică.

IV. Mecanica corpului deformabil

a. **Curba caracteristică a unui material** este reprezentarea grafică a dependenţei dintre efortul unitar σ (măsurat pe ordonată) şi lungirea specifică ε (măsurată pe abscisă). Efortul unitar (tensiunea)

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

în care: F este forţa de tracţiune; A este aria secţiunii transversale a epruvetei.



Lungirea specifică (deformaţia specifică)

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

în care: Δl este deformaţia (lungirea); l este lungimea iniţială a epruvetei.

b. ***Legea lui Hooke*** este ecuaţia liniei drepte OA de pe curba caracteristică a materialului şi se scrie

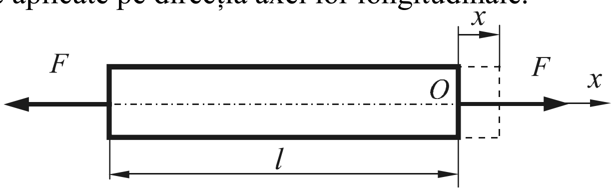
$$\sigma = E\varepsilon$$

în care E este modulul de elasticitate longitudinal (modulul lui Young).

Domeniul în care este valabilă Legea lui Hooke se numeşte **zonă de proporţionalitate.**

c. ***Întinderea şi compresiunea***

Întinderea (tracţiunea) **şi compresiunea**, numite şi solicitări axiale, sunt similare între ele şi se produc în barele încărcate numai cu forţe aplicate pe direcţia axei lor longitudinale.



Dacă forţa axială iese din secţiunea transversală, se face convenţia că este pozitivă, solicitarea este de întindere. Dacă forţa axială intră în secţiunea transversală, se face convenţia că este negativă, solicitarea este compresiune.

Relaţia de calcul pentru efortul unitar este

$$\sigma = \frac{F}{A}.$$

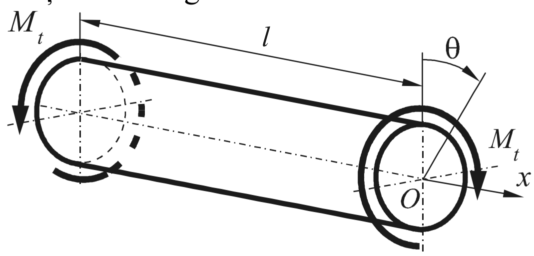
Ţinând seama de legea lui Hooke se obţine expresia **deformaţiei pentru o bară solicitată la întindere sau compresiune**:

$$x = \frac{Fl}{EA}.$$

în care: E este modulul de elasticitate longitudinal în N/m^2; A este aria secţiunii transversale a barei, în m^2; l este lungimea barei în m.

d. ***Răsucirea barelor drepte cu secţiune circulară***

Răsucirea (torsiunea) este produsă de forţele care nu întâlnesc axa barei, respectiv nu sunt paralele cu ea. Cu alte cuvinte secţiunea unei bare este supusă la răsucire pură dacă sistemul forţelor ce acţionează într-o secţiune a barei se reduce, în raport cu centrul de greutate al secţiunii transversale, la un cuplu de forţe al cărui moment M_t are direcţia axei longitudinale a barei.



Relaţia de calcul pentru **efortul unitar tangenţial** este

$$\tau = \frac{M_t}{W_p}$$

în care: M_t este momentul de torsiune; W_p este modulul de rezistenţă polar al secţiunii; $W_p = \frac{\pi d^3}{16}$, d fiind diametrul barei.

Ţinând seama de legea lui Hooke pentru eforturi unitare tangenţiale se obţine expresia **deformaţiei pentru o bară dreaptă de secţiune circulară solicitată la răsucire**:

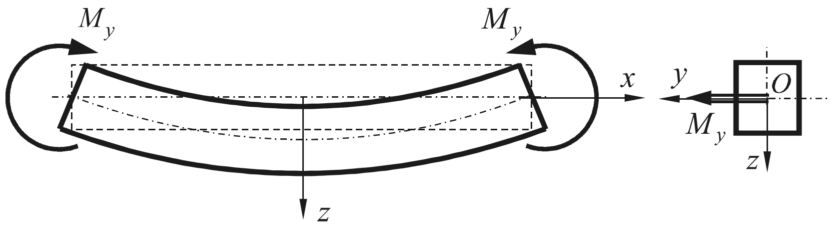
$$\theta = \frac{M_t l}{GI_p},$$

în care: G este modulul de elasticitate transversal în N/m^2; I_p este momentul de inerţie polar al secţiunii transversale în m^4; l este lungimea barei.

e. ***Încovoierea pură a barelor drepte***

O bară este solicitată la **încovoiere** dacă în secțiunea transversală acționează un moment al cărui vector este perpendicular pe axa barei. Altfel spus, sistemul de forțe care actionează într-o secțiune a barei se reduce la un cuplu al cărui moment are direcția unei axe din planul secțiunii transversale.

În general încovoierea este rezultatul acțiunii unor sarcini transversale asupra barelor.



După modul de încărcare a barelor, există:

- **încovoiere pură dreaptă** (pe o direcție) când în secțiunea transversală există o singură componentă a momentului încovoietor M_y sau M_z iar forța tăietoare este nulă. În figură încovoierea este produsă de vectorul moment M_y.
- **încovoiere cu forță tăietoare** (încovoiere simplă) când în secțiunea transversală există simultan o singură componentă a momentului încovoietor M_y sau M_z şi forță tăietoare.
- **încovoiere oblică** (pe două direcții) când în secțiunea transversală apar ambele componente ale vectorului moment M_y sau M_z.

În cazul încovoierii pure, relația care dă **valoarea efortului unitar** în orice poziție a secțiunii este (formula lui Navier):

$$\sigma = \frac{M_y}{W_y}$$

în care: M_y este momentul încovoietor; W_y modulul de rezistență la încovoiere.

Expresia **deformației la încovoiere** depinde de tipul de rezemare a barei.

f. ***Solicitări compuse***

În practică se întâlnesc piese în care solicitările produc simultan eforturi unitare normale şi tangențiale. Un exemplu în acest sens îl constituie arborii solicitați la încovoiere şi răsucire.

Asemenea piese se verifică cu ajutorul expresiilor tensiunilor echivalente.

Prima etapă de calcul este determinarea separată a tensiunilor σ şi τ. Acestea pot rezulta din solicitări simple, fiind calculate cu relațiile cunoscute.

După ce s-au aflat valorile de calcul pentru σ şi τ în punctul considerat al secțiunii, în **a doua etapă de calcul** se aplică una dintre relațiile de verificare ale teoriilor de rezistență.

În general, piesele supuse la solicitări compuse ce dau tensiuni σ şi τ se dimensionează în mod aproximativ la una din solicitări, cea predominantă, apoi se verifică pe baza teoriei de rezistență.

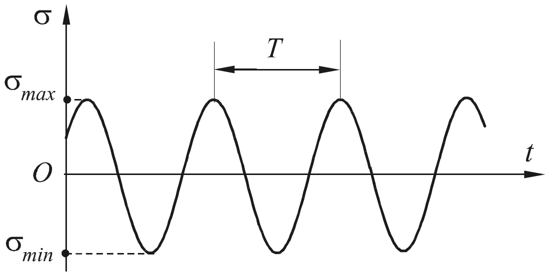
În cazul particular al arborilor de secțiune circulară, solicitati prin moment încovoietor şi moment de răsucire, relațiile de verificare ale teoriilor de rezistență pot fi transformate în relații de dimensionare.

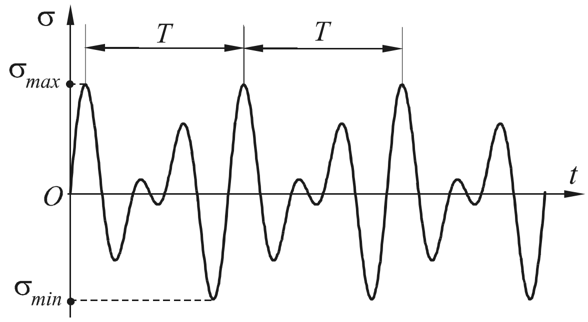
g. ***Oboseala*** este un fenomen care apare atunci când materialele (piesele) sunt supuse la solicitări variabile.

Solicitările variabile, repetate de un număr mare de ori, au efect nefavorabil asupra capacității de rezistență a materialului.

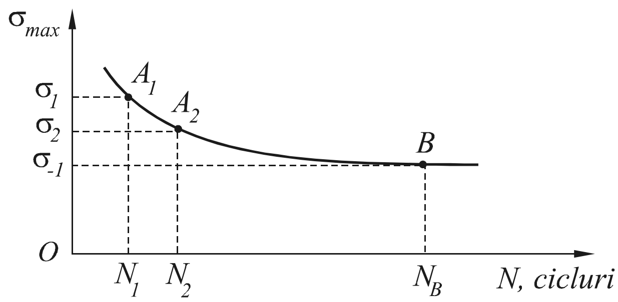
Un material are o infinitate de rezistențe la oboseală, funcție de o serie de factori.

Solicitările variabile pot avea un caracter **determinist** (au loc după legi cunoscute) sau **aleator** (se cunoaşte numai în urma înregistrării ei).
Din categoria solicitărilor deterministe fac parte solicitările periodice.
Solicitările periodice pot fi: **solicitări staționare** (eforturile unitare variază de un număr mare de ori între o limită superioară σ_{max} şi o limită inferioară σ_{min}) sau **solicitări nestaționare** (eforturile unitare variază ca amplitudine în decursul unei perioade).
Variația efortului unitar, pornind de la o valoare oarecare şi până se ajunge din nou la aceeaşi valoare şi acelaşi sens de variație formează un ciclu de solicitări variabile.





Ciclurile de solicitări variabile pot fi: **cicluri simetrice** ($\sigma_{max} = -\sigma_{min}$) sau **cicluri asimetrice** ($\sigma_{max} \neq -\sigma_{min}$).
De asemenea ciclurile de solicitări variabile pot fi: **alternante** (efortul unitar îşi schimbă semnul) sau **ondulante** (efortul unitar rămâne tot timpul la acelaşi semn).
Fenomenul de micşorare a caracteristicilor de rezistență sub efectul solicitărilor variabile se numeşte **oboseala materialului**.
Caracteristica mecanică a materialului la solicitări variabile este **rezistența la oboseală**.
Pe baza rezultatelor experimentale se trasează, pentru un material, curba de durabilitate sau curba lui Wöhler.



Pe această curbă se poate determina rezistența la oboseală care este cea mai mare valoare a efortului unitar maxim al ciclurilor pe care epruveta le suportă un timp nedefinit fără a se rupe.
Rezistența la oboseală prin ciclu simetric de încovoiere se notează σ_{-1}.