

Universitatea „Politehnica” din București

Facultatea de Ingineria Sistemelor Biotehnice
Catedra de Mecanică

TEZĂ DE DOCTORAT

*Cercetări referitoare la comportarea dinamică
a rotorilor din mașinile și dispozitivele mecanice*

*Researches on the dynamic behavior of rotors in
mechanical machines and devices*

REZUMAT

Doctorand:
ing. Adrian COSTACHE

Conducător științific:
prof. dr. ing. Ion STROE

București
2011

CUPRINS

1	INTRODUCERE	4
1.1	Generalități	4
1.2	Structura lucrării.....	6
2	EVOLUȚIA CERCETĂRILOR PRIVIND COMPORTAREA DINAMICĂ A ROTORILOR	7
2.1	Vibrațiile arborelui principal	7
2.1.1	Studiul vibrațiilor de încovoiere	9
2.1.1.1	Influența elasticității lagărelor	12
2.1.1.2	Influența cuplului giroscopic al discurilor	13
2.1.2	Studiul vibrațiilor de răsucire	14
2.1.3	Studiul influențelor unor factori constructivi	15
2.2	Studiul dinamic al rotorilor flexibili	16
2.2.1	Studiul general	16
2.2.2	Metoda modală	19
2.2.3	Alte metode de studiu ale rotorilor flexibili	24
2.2.3.1	Metoda perturbației	24
2.2.3.2	Metoda elementului finit	25
2.2.3.3	Metoda hibridă a elementului finit și a matricei de transfer	27
2.2.4	Confecționarea arborilor	28
2.3	Concluzii	29
3	MODELAREA ROTORULUI FĂRĂ EFECTE GIROSCOPICE	30
3.1	Turația critică a arborilor cu disc montat central fără amortizare	30
3.2	Turația critică a arborilor cu disc montat central cu amortizare	34
3.3	Concluzii	35
4	MODELAREA ROTORULUI CU EFECTE GIROSCOPICE	36
4.1	Considerații generale	36
4.2	Coordonate generalizate	36
4.3	Energia cinetică a rotorului	39
4.4	Funcția de forță	41
4.5	Determinarea coeficienților de rigiditate	42
4.5.1	Determinarea coeficienților de rigiditate pentru cazul arborelui rezemat la capete	42
4.5.2	Determinarea coeficienților de rigiditate pentru cazul arborelui în consolă	44
4.6	Ecuțiile de mișcare	44
4.7	Concluzii	46
5	VIBRAȚIILE LIBERE ALE ROTORULUI	47
5.1	Ecuțiile de mișcare	47
5.2	Forma complexă a ecuațiilor de mișcare	49
5.3	Diagrama Campbell	50
5.4	Formele proprii	52
5.5	Dependența pulsațiilor proprii de momentele de inerție și de poziția discului pe arbore	54
5.6	Aplicații numerice	56
5.6.1	Cazul arborelui rezemat la capete	56
5.6.2	Cazul arborelui în consolă	60
5.7	Concluzii	63
6	VIBRAȚIILE FORȚATE ALE ROTORULUI DEZECHILIBRAT	64
6.1	Cazul vibrațiilor forțate neamortizate	64
6.1.1	Ecuțiile de mișcare ale rotorului dezechilibrat în cazul vibrațiilor neamortizate	64

6.1.2	Soluții particulare	65
6.1.3	Viteze unghiulare critice	66
6.2	Cazul vibrațiilor forțate amortizate	67
6.2.1	Ecuțiile de mișcare ale rotorului dezechilibrat în cazul vibrațiilor amortizate	67
6.2.2	Soluții particulare	67
6.2.2.1	Dezechilibrul static	67
6.2.2.2	Dezechilibrul de cuplu	68
6.2.3	Aplicații numerice	69
6.2.3.1	Cazul arborelui rezemat la capete	69
6.2.3.2	Cazul arborelui în consolă	82
6.3	Concluzii	107
7	MĂSURĂTORI EXPERIMENTALE	108
7.1	Generalități privind testele experimentale	108
7.2	Instalația experimentală	108
7.3	Lanțul de măsură	110
7.4	Corecția datelor experimentale	111
7.4.1	Corecția de gradul „0”	112
7.4.2	Corecția de gradul „1”	112
7.5	Măsurători	114
7.5.1	Măsurători în aer	114
7.5.2	Măsurători în apă	118
7.6	Determinarea experimentală a excentricității	122
7.7	Determinarea experimentală a coeficientului de amortizare pentru deplasare c	124
7.8	Concluzii	126
8	CONSIDERAȚII FINALE	127
8.1	Concluzii finale	127
8.2	Contribuții originale	128
8.3	Direcții de dezvoltare	129
	BIBLIOGRAFIE	130
	ANEXE	138
Anexa 1	Calculul momentelor de inerție pentru discurile utilizate în experimente	138
Anexa 2	Spectrele de amplitudine pentru viteze și accelerații în aer.....	143
Anexa 3	Spectrele de amplitudine pentru viteze și accelerații în apă.....	167

1. INTRODUCERE

1.1. Generalități

Solicitările dinamice întâlnite la mașinile și dispozitivele mecanice, se datorează acțiunii corpurilor în mișcare.

Mișcarea rotorilor din mașinile rotative generează vibrații. Analizând aceste vibrații se obțin informații valoroase despre starea mașinii. Starea unei mașini poate fi monitorizată prin efectuarea de măsurători de vibrații efectuate cu scopul de a determina eventuale modificări ale regimului de funcționare, modificări asociate cu apariția unor defecte sau uzuri ale diferitelor componente mecanice.

Fenomenele întâlnite în cazul mașinilor și dispozitivelor mecanice mari, cu rotoți flexibili și lungi, cu etanșări, cu lagăre de alunecare, piedestaluri și carcase relativ elastice, cu turații mari, au impus dezvoltarea și perfecționarea continuă a metodelor de calcul dinamic și de măsurare a vibrațiilor.

Două configurații de rotoți își găsesc o largă aplicabilitate în tehnică:

1. rotoți rezemați la capete (fig. 1.1);
2. rotoți în consolă (fig. 1.2).

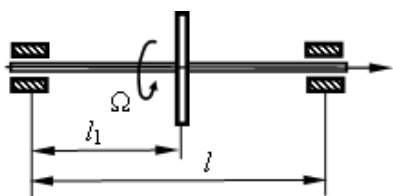


Fig. 1.1 Cazul arborelui rezemat la capete

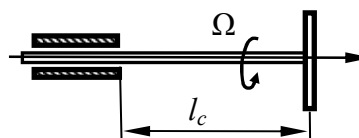


Fig. 1.2 Cazul arborelui prins în consolă

Astfel, prima configurație poate fi întâlnită în cazul turbinelor (fig. 1.3), pompelor și compresoarelor (fig. 1.4).

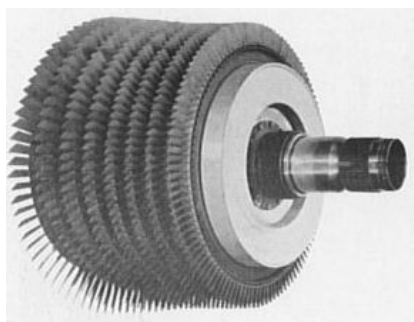


Fig. 1.3 Rotorul unei turbine

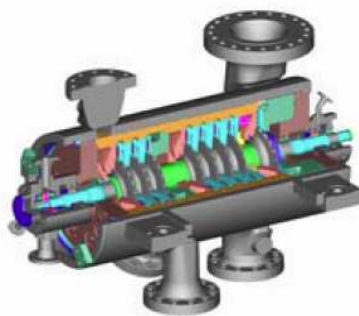


Fig. 1.4 Secțiune printr-un compresor centrifugal



Fig. 1.5 Arborele cu elice al unei nave maritime



Fig. 1.6 Rotorul unui elicopter



Fig. 1.7 Amestecător industrial

Din cea de-a doua configurație fac parte rotorii utilizați la sistemele de propulsie cu elice ale navelor maritime (fig. 1.5) și ale avioanelor, la sistemele portante ale elicopterelor (fig. 1.6), precum și cei aflați în componența amestecătoarelor industriale (fig. 1.7).

Teza își propune analiza vibrațiilor celor două tipuri de rotorii, urmărind unele aspecte relativ puțin tratate în literatură, legate de amortizare.

1.2. Structura lucrării

Lucrarea de față este alcătuită din opt capitole și trei anexe.

În **capitolul 1**, prin cele de mai sus, sunt enunțate succint obiectivele urmărite și este descrisă structura lucrării.

În **capitolul 2** se prezintă, pe scurt, evoluția cercetărilor privind comportarea dinamică a rotorilor. Sunt trecute în revistă câteva aspecte legate de vibrațiile de încovoiere și de cele de răsucire ale arborilor. Tot aici este efectuat un studiu dinamic al rotorilor flexibili, prezentând pe scurt unele metode folosite la calcule, precum metoda modală, metoda perturbației, metoda elementului finit și metoda hibridă.

În **capitolul 3** este descrisă modelarea rotorului rezemat rigid, neglijând efectele giroscopice. Este analizată influența pe care o au geometria rotorului și amortizarea asupra turației critice.

În **capitolul 4** sunt luate în considerare efectele giroscopice asupra rotorului cu arbore deformabil rezemat rigid. Sunt deduse ecuațiile diferențiale ale vibrațiilor rotorului afectat de două tipuri de dezechilibre: static, respectiv de cuplu.

În **capitolul 5** se studiază vibrațiile libere ale rotorului. Se scriu ecuațiile diferențiale ale vibrațiilor, sub formă reală și sub formă complexă. Se determină dependența pulsațiilor proprii de diferite mărimi caracteristice ale arborelui.

În **capitolul 6** se studiază vibrațiile forțate ale rotorului dezechilibrat. Se scriu ecuațiile diferențiale ale vibrațiilor neamortizate, respectiv ale celor amortizate. Se determină vitezele unghiulare critice și se determină influența amortizării asupra oscilațiilor rotorului, cu referire la cele două tipuri de dezechilibre.

Capitolul 7 este dedicat unor cercetări experimentale originale, ce urmăresc determinarea coeficientului de amortizare pentru deplasare laterală, în cazul a doi rotorii în consolă. Sunt descrise instalația experimentală și lanțul de măsură cu componentele sale. Sunt prezentate rezultatele măsurătorilor efectuate în aer și apă. Sunt descrise și aplicate metode de corecție a datelor măsurate.

În **capitolul 8** sunt trecute în revistă principalele concluzii care au rezultat în urma studiului teoretic și experimental realizat, sunt prezentate contribuțiile originale aduse de lucrare și sunt descrise câteva direcții în care pot fi continuate și extinse cercetările de față.

2. EVOLUȚIA CERCETĂRILOR PRIVIND COMPORTAREA DINAMICĂ A ROTORILOR

În acest capitol se prezintă, pe scurt, evoluția cercetărilor privind comportarea dinamică a rotorilor. Sunt trecute în revistă câteva aspecte legate de vibrațiile de încovoiere și de cele de răsucire ale arborilor. Tot aici este efectuat un studiu dinamic al rotorilor flexibili, prezentând pe scurt unele metode folosite la calcule, precum metoda modală, metoda perturbației, metoda elementului finit și metoda hibridă.

2.1. Vibrațiile arborelui principal

Numeroși cercetători au investigat aspectul dinamic al arborelui. Multe modele de simulare bazate pe un sistem dinamic au fost dezvoltate pentru a se stabili modul de predicție al comportării mecanice și termice a unui sistem arbore-rezeme. *H. Li* și *Y. C. Shin* [52], [53] au dezvoltat un program pentru calculator care să genereze soluții pentru viteze mari ale unui sistem integrat termomecanic arbore-rezeme, obținând astfel o bună înțelegere a acestui fenomen. *S. A. Spiweck* și

T. Nickel [97] au propus un algoritm pentru prevenirea catastrofală a cedării arborelui datorită excesului de căldură indus de încărcare.

În sistemele cu turații mari, caracteristicile arborelui sunt influențate semnificativ de mediul înconjurător. S. M. Kim și S. K. Lee [43], [44] consideră ca făcând parte din mediul înconjurător toleranța de asamblare, dimensiunile geometrice, condițiile de răcire și de funcționare dar și deformația termică. Tot ei au prezentat un model detaliat al vibrațiilor arborelui, model ce include efecte neliniare ale contactului unui rulment cu bile (fig.2.1).

Sistemul arbore-rezem este elementul de bază ce intră în componența a numeroase mașini și dispozitive mecanice: mașini-unelte, motoare și turbine. Arborii adesea reprezintă un factor limită pentru performanța mașinii.

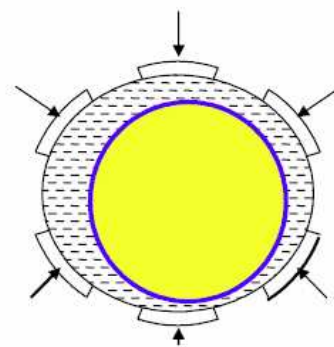
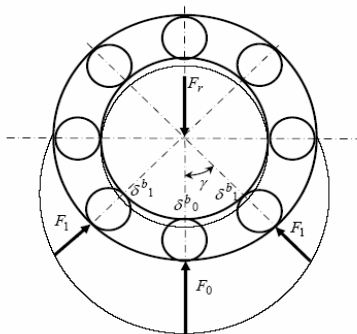


Fig. 2.1 Modelul distribuției încărcării pe bilele de rulment Fig. 2.2 Rotor sprijinit pe lagăr hidrodinamic

A. C. Hagg și G. O. Sankey [33], B. Sternlicht [99], J. W. Lund [56] și alții au dezvoltat teoria lagărelor hidrodinamice (fig.2.2) între anii 1955-1965. T. Yamamoto [125], în 1954, prezintă un studiu al lagărelor de rostogolire.

Arborele principal este elementul de bază ce intră în compunerea unei mașini sau dispozitiv mecanic, iar comportarea sa depinde în mare măsură precizia mașinii. Datorită acestui fapt apare necesitatea studierii lui atât în faza de proiectare cât și în cea de funcționare.

2.1.1. Studiul vibrațiilor de încovoiere

În articolul [63] F. Mirski afirmă că, în cele mai multe cazuri, pentru studiul arborilor principali se fac următoarele ipoteze:

- modelul care se adoptă este cel din figura 2.4, în care masa m_1 poate corespunde unei piese, iar masa m_2 , roții dințate din angrenajul de transmitere a mișcării;
- diametrele porțiunilor l și l_1 sunt diferite; Conform sugestiei lui A. Tondl [111] dacă masa concentrată este de cel puțin patru ori mai mare decât masa arborelui, atunci aceasta din urmă se neglijează;
- în caz contrar, așa cum presupune C. Ispas [38], se arată că masa trebuie luată în considerare prin introducerea unor coeficienți de reducere.

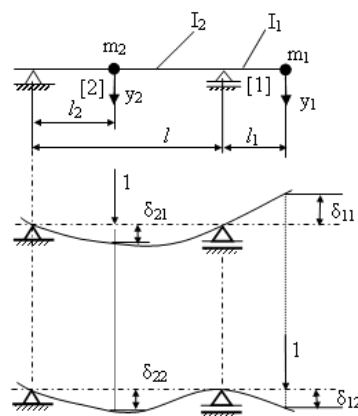


Fig. 2.4 Grindă simplu rezemată cu 2 mase concentrate – deformația

În cazul în care se acceptă acest model, pentru care sistemele elastice sunt similare grinzilor deformabile, metoda ce se recomandă pentru stabilitatea ecuațiilor diferențiale de mișcare este metoda coeficienților de influență, descrisă în unele lucrări ale unor autori precum M. Rădoi și N. F. Rieger [89], [90]. Metoda se bazează pe un sistem de ecuații diferențiale de forma:

$$\begin{cases} m_1 \delta_{11} \ddot{y}_1 + m_2 \delta_{12} \ddot{y}_2 + y_1 = 0 \\ m_1 \delta_{21} \ddot{y}_1 + m_2 \delta_{22} \ddot{y}_2 + y_2 = 0, \end{cases} \quad (2.1)$$

în care δ_{ij} sunt coeficienți de influență. Coeficienți δ_{ij} reprezintă deformația barei în secțiunea i , provocată de acțiunea unei forțe unitare aplicate în secțiunea j (fig.2.4), iar y_1 și y_2 sunt deplasările celor două mase [70], [83].

Dacă se studiază numai vibrațiile libere, ecuațiile diferențiale au forma:

$$y_i = -m_1 \delta_{i1} \ddot{y}_1 - m_2 \delta_{i2} \ddot{y}_2 - \dots - m_k \delta_{ik} \ddot{y}_k - \dots - m_n \delta_{in} \ddot{y}_n \quad (i = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, n). \quad (2.5)$$

În cazul vibrațiilor forțate, mișcarea este descrisă de ecuațiile diferențiale:

$$y_i = -m_1 \delta_{i1} \ddot{y}_1 - m_2 \delta_{i2} \ddot{y}_2 - \dots - m_k \delta_{ik} \ddot{y}_k - \dots - m_n \delta_{in} \ddot{y}_n + \delta_{ik} F_{0k} \sin(\omega t + \varphi_k) \quad (i = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, n). \quad (2.7)$$

2.1.1.1 Influența elasticității lagărelor

În realitate lagărele se deformează, permițând deplasări liniare sau rotații ale arborelui în dreptul lor (fig.2.6). Aceste deplasări duc la modificarea pulsațiilor proprii.

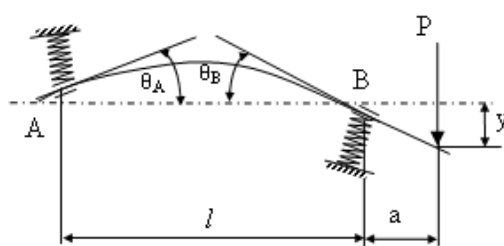


Fig. 2.6 Deformarea lagărelor

Expresia deformației de încovoiere a unui arbore de secțiune constantă este:

$$y = p \left[\frac{l_1^2}{3EI} \left(\frac{l}{l_1} + \frac{l_1}{l_1} \right) + \frac{1}{k_A} \left(\frac{l_1}{l} \right)^2 + \frac{1}{k_B} \left(1 + \frac{l_1}{l} \right)^2 \right]. \quad (2.10)$$

În acest caz, pulsația proprie a sistemului are forma:

$$p = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{1}{m \left[\frac{l_1^2 (l + l_1)}{3EI} + \frac{1}{k_A} \left(\frac{l_1}{l} \right)^2 + \frac{1}{k_B} \left(1 + \frac{l_1}{l} \right)^2 \right]}}; \quad (2.11)$$

2.1.1.2 Influența cuplului giroscopic al discurilor

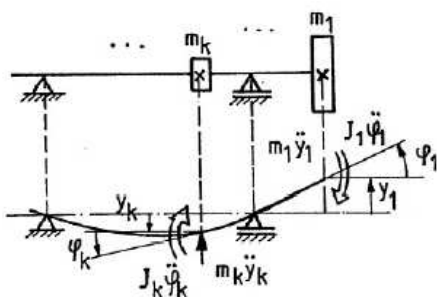


Fig. 2.8 Influența a două discuri asupra arborelui

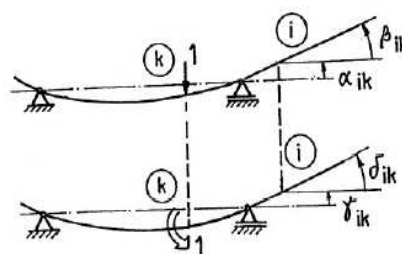


Fig. 2.9 Rolul coeficienților de influență

În cazul anumitor mașini și dispozitive mecanice, discurile așezate pe arbori nu pot fi considerate ca având masă punctiformă, ceea ce face ca în timpul mișcării ele să nu rămână într-un

plan fix. Acest efect are drept consecință apariția unui cuplu de inerție (cuplu giroscopic), care are tendința să îndrepte arborele, ca în figura 2.8.

Ecuțiile diferențiale ale mișcării sunt:

$$\begin{cases} y_i = -\sum_{k=1}^n (m_k \alpha_{ik} \ddot{y}_k + J_k \gamma_{ik} \ddot{\varphi}_k) \\ \varphi_i = -\sum_{k=1}^n (m_k \beta_{ik} \ddot{y}_k + J_k \delta_{ik} \ddot{\varphi}_k) \end{cases} \quad i = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (2.13)$$

2.1.2. Studiul vibrațiilor de răsucire

Intr-o serie de lucrări ale lui *I. Gheghea*, *V. A. Kudinov* și *V. Moraru* [28], [47], [64], se studiază vibrațiile de răsucire ale arborelui principal, modelul elastic luat în considerare fiind cel din figura 2.10, în care elementele care lucrează și la răsucire sunt mecanismele de transmitere.

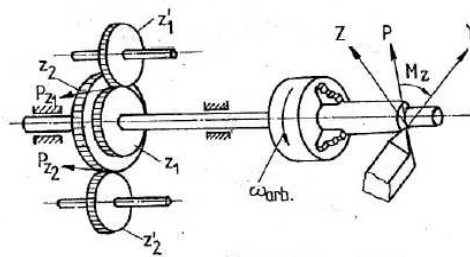


Fig. 2.10 Influența cuțitului de strung asupra mecanismelor de transmitere a mișcării, implicit asupra arborelui.

Modelul din figură este descris de ecuațiile diferențiale:

$$\begin{cases} m\ddot{y} + c\dot{y} + \frac{1}{\delta_{11}} y = \frac{\delta_{12}}{\delta_{11}} P_{z1} \sin(\alpha + \varphi) + P_{z2} \sin(\beta + \varphi) + P \sin \varphi \\ J\ddot{\theta} + c_{\theta}\dot{\theta} + (k_1 - k_2)\theta = \frac{Pd}{2} \cos \gamma, \end{cases} \quad (2.14)$$

care arată că cele două mișcări vibratorii sunt decuplate. Dacă se ține cont de expresiile forțelor de angrenare, care sunt funcții de θ , sistemul devine cuplat static prin termenul drept [47].

2.1.3. Studiul influențelor unor factori constructivi

Îmbunătățirea comportării dinamice a arborilor principali constituie o preocupare permanentă a cercetărilor și constructorilor de mașini și dispozitive mecanice. Ea se poate face pe baza studiului influenței diferiților factori constructivi asupra acestei comportări.

2.2. Studiul dinamic al rotorilor flexibili

În cazul mașinilor și dispozitivelor mecanice, prin caracteristicile lor geometrice și cinematice, arborii principali pot fi considerați rotorii flexibili. Ca urmare, comportarea lor dinamică poate fi studiată cu ajutorul metodelor specifice.

2.2.1. Studiul general

În lucrarea [49], *M. Lalanne* presupune că principalele elemente ale unui rotor sunt: arborele flexibil, discul sau discurile montate pe acesta, masele neechilibrate și lagărele, în general hidrodinamice ortotrope. Amortizările sunt introduse în general prin elementele de etanșare sau izolare ale sistemului.

Sistemul de ecuații diferențiale de ordinul al doilea poate fi scris sub forma matriceală [24], [46], [61],

$$[M]\{\ddot{q}\} + ([G] + [C])\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{0\}, \quad (2.33)$$

unde s-au notat:

$[M]$ - matricea de inerție; $[G]$ - matricea cuplajului giroscopic; $[C]$ - matricea de amortizare;
 $[K]$ - matricea de rigiditate.

2.2.2. Metoda modală

Cea mai generală metodă de rezolvare a problemei descrisă de ecuația (2.35), deci de obținere a soluției complete, este **metoda modală** [46], [62]. Această metodă, după cum se arată în lucrările amintite, urmărește decuplarea ecuațiilor și apoi integrarea lor, cu ajutorul valorilor și vectorilor proprii.

Cu ajutorul acestei metode se rezolvă problema de valori proprii în funcție de turația rotorului. S-au trasat diagrame ale frecvențelor proprii în funcție de turație, de tipul celor din figura 2.12, numite diagrame *Campbell* [49], [87], [114]. Acestea pun în evidență, pe de o parte, modurile proprii de precesie directă (reprezentările F_2, F_4, F_6), pe de altă parte cele de precesie inversă (reprezentările F_1, F_3, F_5) ale rotorului, precum și posibilele turații critice date de intersecțiile dintre F_1, \dots, F_6 cu f_1 (frecvența de rotație), respectiv f_2 (jumătatea frecvenței de rotație).

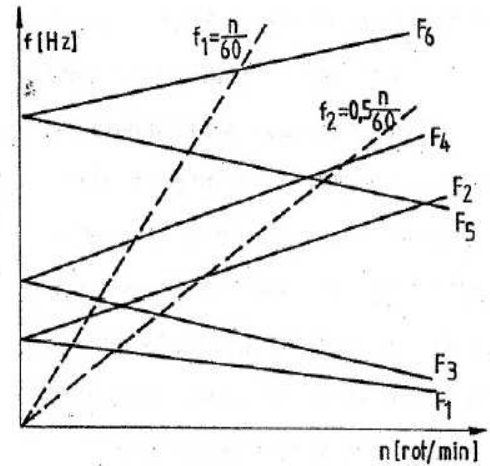


Fig. 2.12 Diagrama Campbell

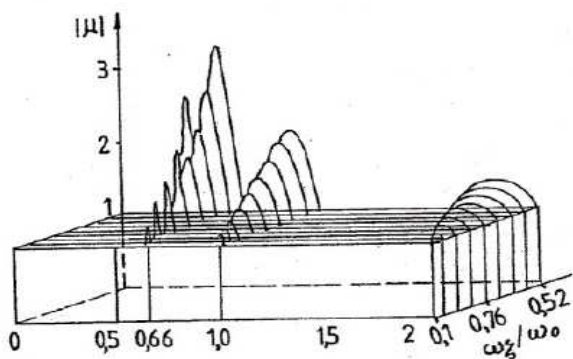


Fig. 2.13 Diagrama de stabilitate

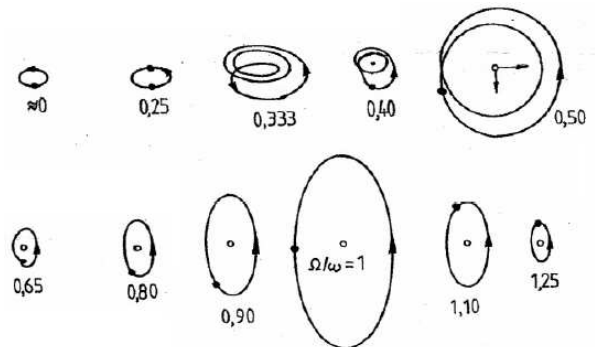


Fig. 2.14 Evidențierea mișcării de precesie și traiectoriile circulare sau eliptice ale axei arborelui.

Stabilitatea este studiată cu ajutorul teoremei lui *Floquet*, pentru sistemul invariant în timp, dat de ecuația

$$M \Delta u + D \Delta u + S_0 \Delta u = -\Delta S(t) u_0 + p_u; \quad (2.54)$$

S-a obținut diagrama din figura 2.13, în care zonele de instabilitate corespund sistemului neamortizat și valorilor $|\mu| > 1$, unde μ este coeficientul de proporționalitate dintre valorile variabilelor de stare după perioada T și valorile lor inițiale.

Totodată, presupunându-se cunoscută frecvența proprie a rotorului fără defect, sunt studiate diferite tipuri de defecte și influențele lor asupra rigidității arborelui.

Studiul vibrațiilor forțate datorate excentricității sau defectului pune în evidență mișcarea de precesie și traiectoriile circulare sau eliptice ale axei arborelui, ilustrate în figura 2.14, care

corespunde cazului unei amortizări $D = 0,05$ și raportului dintre viteza unghiulară Ω și pulsația proprie ω , $\frac{\Omega}{\omega} = 0, \dots, 1,25$.

Rezultatele studiului prezentat în lucrarea [25] pot constitui o metodă de identificare a defectelor unui arbore.

2.2.3. Alte metode de studiu ale rotorilor flexibili

2.2.3.1 Metodei perturbației

În unele lucrări problema valorilor și vectorilor proprii este rezolvată cu ajutorul *metodei perturbației*.

Pornind de la vibrația liberă a unui sistem cu mai multe grade de libertate descrisă de ecuația matriceală

$$M \ddot{x} + \varepsilon C \dot{x} + K x = 0, \quad (2.55)$$

în care ε este un mic coeficient, K și C pune problema de valori proprii sub forma

$$M U \Omega^2 + \varepsilon C U \Omega + K U = 0, \quad (2.56)$$

în care Ω este matricea diagonală a valorilor proprii, iar U este matricea complexă a vectorilor proprii corespunzători acestor valori proprii.

Considerând că valorile proprii sunt toate distincte și vectorii proprii satisfac condițiile de ortogonalitate cunoscute, se obține un sistem de ecuații algebrice din care rezultă soluțiile perturbate de ordinul superior.

2.2.3.2 Metoda elementului finit

O altă metodă de studiu mult utilizată este *metoda elementului finit*. Ea poate fi utilizată pentru studiul dinamicii sistemelor rotative, ca și pentru monitorizarea și evaluarea vibrațiilor.

O importantă problemă care apare în tehnica modelării arborelui din sistemele rotor-reazem este alegerea tipului de element de arbore utilizat în calcule, respectiv:

- elementele de arbore de tip *Timoshenko*, ce țin cont pe lângă încovoiere și de inerția de rotație a elementului, de deformațiile de forfecare ale acestuia;
- elementele de arbore *Bernoulli-Euler*, care nu țin cont decât de încovoierea elementului.

2.2.3.3 Metodă hibridă a elementului finit și a matricei de transfer

Într-o altă lucrare, *M. Huang* și *A. R. Johnson* [36] propun o *metodă hibridă a elementului finit și a matricei de transfer* pentru analiza vibrațiilor unui sistem rotor-lagăr. Metoda se bazează pe transformarea directă a matricei de inerție și a celei de rigiditate a unui element din metoda elementului finit, într-o matrice de transfer. Pentru obținerea matricei generale a sistemului se utilizează notarea sub formă complexă a variabilelor, după care, prin impunerea condițiilor la limită în matricea generală, se obține o ecuație caracteristică polinomială.

2.2.4. Confecționarea arborilor

În prezent, arborii confecționați din materiale compozite sunt folosiți în special ca arbori de transmisie în domeniul subcritic.

Greutatea unui sistem de arbori de transmisie, determinată de lungimea sa și de puterea transmisă, poate fi diminuată fie folosind materiale compozite fie utilizând rotorul în domeniul supracritic, adică la o turație mai mare decât prima turație critică.

2.3. Concluzii

În consecință, se poate observa multitudinea și varietatea metodelor folosite la studiul vibrațiilor rotorilor.

Dintre numeroasele concluzii ce se desprind în urma acestor cercetări, trebuie menționate următoarele:

- atunci când arborii sunt rezemați pe lagăre nu prea rigide, la prima frecvență de rezonanță aceștia posedă oscilații de legănare (rulmenții se deformează în sensuri diferite, în timp ce arborele rămâne aproape rectiliniu), ceea ce face ca săgeata să se datoreze deformației elastice a rulmenților și nu a arborilor;
- există un optim al distanței între lagăre pentru care rigiditatea arborelui are valoare maximă.
- determinarea coeficientului de amortizare atât pentru axul în sine cât și pentru lagăre sau elementele de transmitere a mișcării, reprezintă o problemă complicată, pentru a cărei rezolvare se folosesc în prezent numai metode aproximative.

3. MODELAREA ROTORULUI FĂRĂ EFECTE GIROSCOPICE

În acest capitol este descrisă modelarea rotorului rezemat rigid, neglijând efectele giroscopice. Este analizată influența pe care o au geometria rotorului și amortizarea asupra turației critice.

3.1. Turația critică a arborilor cu disc montat excentric fără amotizare

Dacă rotorul este realizat dintr-un arbore cu un singur disc (fig. 3.1), soluția ecuației diferențiale liniare este o expresie simplă a stabilității la limita corespunzătoare frecvenței perturbatoare. Limitele inferioară și superioară, sunt găsite pentru frecvența perturbatoare ca fiind expresiile a două frecvențe critice pentru un sistem fără amortizare.

Centrul de masă C al discului poate coincide cu centrul de masă al arborelui O sau poate avea o deplasare radială $OC = e_c$, [46].

Sistemul de ecuații diferențial este:

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega_1^2 x = e_c \omega^2 \cos \omega t \\ \ddot{y} + \omega_1^2 y = e_c \omega^2 \cos \omega t. \end{cases} \quad (3.12)$$

Soluțiile particulare (permanente) sunt de forma:

$$x = A \cos \omega t, \quad y = B \sin \omega t. \quad (3.13)$$

Traectoria punctului O este un cerc cu centrul în O_1 , de rază

$$R_O = \frac{e_c \omega^2}{|\omega_1^2 - \omega^2|}. \quad (3.15.b)$$

Traectoria punctului C este un cerc cu centrul în O_1 , de rază:

$$R_C = \frac{e_c \omega_1^2}{|\omega_1^2 - \omega^2|}. \quad (3.16.b)$$

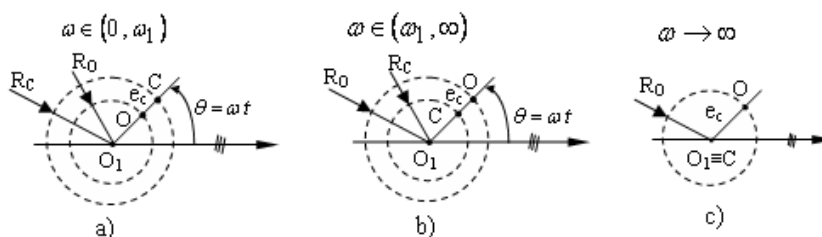


Fig. 3.2

Se analizează în continuare ce se întâmplă pentru diferite valori ale vitezei unghiulare (fig. 3.2).

3.2. Turația critică a arborilor cu disc montat excentric cu amortizare

Sistemul de ecuațiile diferențiale este:

$$\begin{cases} \ddot{x} + 2\alpha \dot{x} + \omega_1^2 x = e_c \omega^2 \cos \omega t \\ \ddot{y} + 2\alpha \dot{y} + \omega_1^2 y = e_c \omega^2 \sin \omega t, \end{cases} \quad (3.19)$$

Procedând ca în cazul anterior se găsește:

$$R_O = \frac{e_c \omega^2}{\sqrt{(\omega_1^2 - \omega^2)^2 - 4\alpha^2 \omega^2}}; \quad (3.20.a)$$

și respectiv:

$$R_C = \frac{e_c \sqrt{\omega_1^4 + 4\alpha^2 \omega^2}}{\sqrt{(\omega_1^2 - \omega^2)^2 - 4\alpha^2 \omega^2}}; \quad (3.20.b)$$

pentru razele cercurilor descrise de punctul O , respectiv de centrul maselor, C .

Se analizează în continuare ce se întâmplă pentru diferite valori ale vitezei unghiulare (fig. 3.3).

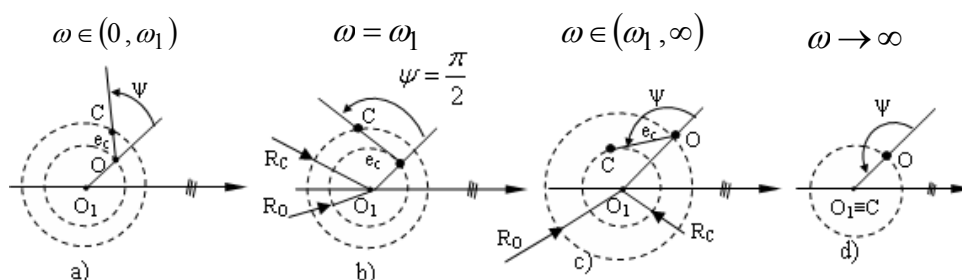


Fig. 3.3

3.3. Concluzii

Turația critică a arborilor (rotorilor) este asociată fenomenului de rezonanță sau fenomenului de pierdere a stabilității elastice.

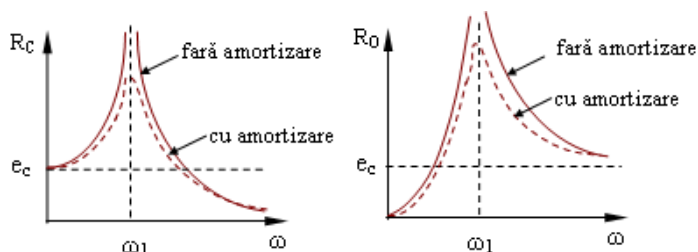


Fig. 3.4 Variațiile razelor R_C și R_O cu ω

Variațiile razelor R_C și R_O cu ω (viteza unghiulară a rotorilor) este prezentată în fig.3.4.

Domeniul critic este un interval în jurul turației critice ω_1 spre exemplu $\omega \in (0,7 \omega_1 \div 1,4 \omega_1)$, în care R_C și R_O sunt finite dar mari sau foarte mari.

Este de remarcat faptul că autocentrarea arborilor se produce ca tendință de evoluție a sistemului.

4. MODELAREA ROTORULUI CU EFECTE GIROSCOPICE

În acest capitol sunt luate în considerare efectele giroscopice asupra rotorului cu arbore deformabil rezemat rigid. Sunt deduse ecuațiile diferențiale ale vibrațiilor rotorului afectat de două tipuri de dezechilibre: static, respectiv de cuplu.

4.1. Considerații generale

Se consideră cele două configurații de rotoare prezentate în figurile 1.1, respectiv 1.2.

Deducerea ecuațiilor de mișcare ale rotorului sub forma generală conduce la ecuații diferențiale neliniare complicate ca formă. Pentru a ușura acest calcul se aleg convenabil coordonatele generalizate și se introduc anumite ipoteze simplificatoare. Aceste ipoteze specifică faptul că valorile unor parametri sunt mici și, ca atare, unii termeni din ecuații se pot neglija. Ecuațiile de mișcare se vor deduce considerând și dezechilibrul rotorului.

4.2. Coordonatele generalizate

Considerând pentru prezentare cazul arborelui rezemat la capete (fig. 1.1), în conformitate cu *Kramer* și *Murgulescu* [46], [65], se consideră arborele AB de masă neglijabilă. Arborele se rezemă în punctele A și B (fig. 4.1. a). Pe axa arborelui, în punctul O' , este fixat un disc de masă M . Punctul O' se găsește la distanțele l_1 și l_2 față de reazeme. Arborele poate aluneca în lungul axei Oz . Centrul de masă discului se găsește în punctul C , situat la distanța e_C de punctul O' (fig. 4.1. b).

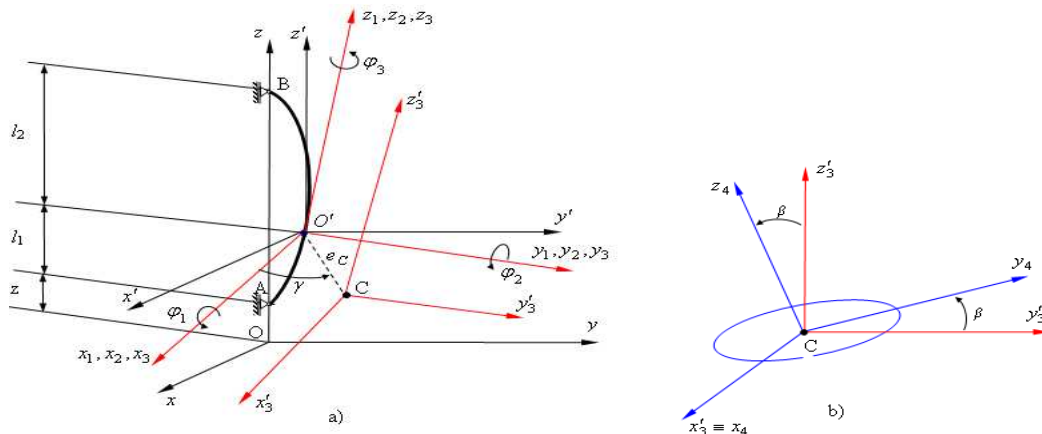


Fig. 4.1. Cazul arborelui rezemat la capete

Se aleg următoarele sisteme de referință (fig. 4.1, 4.2):

- triedrul fix (inerțial) $Oxyz$, cu originea în punctul O și cu punctele A și B situate pe axa Oz ;
- triedrul mobil $O'x'y'z'$, traslatat în raport cu triedrul $Oxyz$, cu originea în punctul O' de prindere a discului pe arbore;
- triedrul $O'x_1y_1z_1$, rotit față de reperul $O'x'y'z'$, cu unghiul φ_1 , în jurul axei $O'x'$ (fig. 4.2);
- triedrul $O'x_2y_2z_2$, rotit față de reperul $O'x_1y_1z_1$, cu unghiul φ_2 , în jurul axei $O'y_1$ (fig. 4.2);
- triedrul $O'x_3y_3z_3$, rotit față de reperul $O'x_2y_2z_2$, cu unghiul φ_3 , în jurul axei $O'z_2$ (fig. 4.2);
- triedrul $Cx'_3y'_3z'_3$, traslatat în raport cu triedrul $O'x_3y_3z_3$, având originea în centrul de masă al discului;
- triedrul $Cx_4y_4z_4$, rotit față de reperul $Cx'_3y'_3z'_3$, cu unghiul β , în jurul axei Cx'_3 ; Axele Cx_4 și Cy_4 se află în planul discului.

Discul este montat excentric (fig. 4.1.b) astfel încât centrul său de masă C se află la distanța (excentricitatea) e_C față de punctul O' de prindere pe arbore, iar segmentul $O'C$ formează unghiul γ cu direcția axei $O'x_3$.

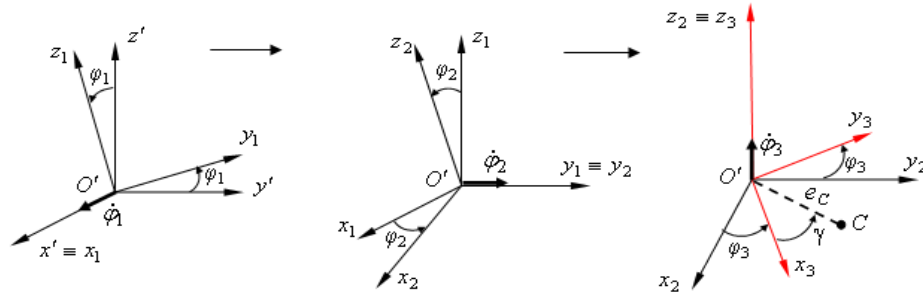


Fig. 4.2 Unghiurile de rotație - secvența 1-2-3

Poziția discului este definită de coordonatele $x, y, z+l_1$ ale punctului O' și de unghiurile $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, care definesc poziția triedrului mobil $O'x_3y_3z_3$ în raport cu cel fix $Oxyz$ [11]. În cazul general, poziția rotorului este determinată de șase coordonate generalizate.

Matricele de rotație:

$$[R_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi_1 & -\sin \varphi_1 \\ 0 & \sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 \end{bmatrix}, \quad (4.1. a)$$

$$[R_2] = \begin{bmatrix} \cos \varphi_2 & 0 & \sin \varphi_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi_2 & 0 & \cos \varphi_2 \end{bmatrix}, \quad (4.1. b)$$

$$[R_3] = \begin{bmatrix} \cos \varphi_3 & -\sin \varphi_3 & 0 \\ \sin \varphi_3 & \cos \varphi_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.1. c)$$

Coordonatele centrului maselor sunt:

$$\begin{cases} x_C = x + e_C \cos \varphi_2 \cos(\varphi_3 + \gamma) \\ y_C = y + e_C \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos(\varphi_3 + \gamma) + e_C \cos \varphi_1 \sin(\varphi_3 + \gamma) \\ z_C = z + l_1 - e_C \sin \varphi_2 \cos \varphi_1 \cos(\varphi_3 + \gamma) + e_C \sin \varphi_1 \sin(\varphi_3 + \gamma). \end{cases} \quad (4.3)$$

4.3. Energia cinetică a rotorului

Vectorul viteză unghiulară $\bar{\omega}$ are expresia

$$\begin{cases} \omega_x = \dot{\varphi}_1 \cos \varphi_2 \cos \varphi_3 + \dot{\varphi}_2 \sin \varphi_3 \\ \omega_y = -\dot{\varphi}_1 \cos \varphi_2 \sin \varphi_3 + \dot{\varphi}_2 \cos \varphi_3 \\ \omega_z = \dot{\varphi}_1 \sin \varphi_2 + \dot{\varphi}_3. \end{cases} \quad (4.8)$$

Energia cinetică este:

$$E = \frac{1}{2} M \left[\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 + e_C^2 \dot{\varphi}_3^2 - 2e_C \dot{x} \dot{\varphi}_3 \sin(\varphi_3 + \gamma) + 2e_C \dot{y} \dot{\varphi}_3 \cos(\varphi_3 + \gamma) \right] + \frac{1}{2} J_d (\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2) + \frac{1}{2} J_p (\dot{\varphi}_3^2 + 2\varphi_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_3) + (J_d - J_p) [-\dot{\varphi}_1 \sin \varphi_3 + \dot{\varphi}_2 \cos \varphi_3] \beta \dot{\varphi}_3. \quad (4.15)$$

4.4. Funcția de forță

Dacă se ține seama de legăturile la care este supus rigidul, se poate considera că energia potențială de deformație provine numai din deplasările transversale pe axa arborelui. Funcția de forță are forma:

$$U = -\frac{1}{2} \left[k_{11} (x^2 + y^2) + k_{22} (\varphi_1^2 + \varphi_2^2) + 2k_{12} (-x\varphi_2 + y\varphi_1) \right]. \quad (4.21)$$

4.5. Determinarea coeficienților de rigiditate

4.5.1. Determinarea coeficienților de rigiditate pentru cazul arborelui rezemat la capete

Coeficienții de rigiditate pentru cazul arborelui rezemat la capete sunt:

$$\begin{aligned} k_{xx} = k_{yy} = k_{11} &= 3EI \frac{(l_1^3 + l_2^3)}{l_1^3 l_2^3} = \frac{3EI(l_1 + l_2)(l_1^2 + l_2^2 - l_1 l_2)}{l_1^3 l_2^3} \\ k_{\varphi_1 \varphi_1} = k_{\varphi_2 \varphi_2} = k_{22} &= 3EI \frac{l}{l_1 l_2} = \frac{3EI(l_1 + l_2)}{l_1 l_2} \\ k_{x\varphi_2} = k_{\varphi_2 x} = -k_{y\varphi_1} = -k_{\varphi_1 y} = k_{12} &= 3EI \frac{l(l_1 - l_2)}{l_1^2 l_2^2} = \frac{3EI(l_1^2 - l_2^2)}{l_1^2 l_2^2} \\ \Delta_1 = \Delta_2 &= \frac{l_1^3 l_2^3}{9(EI)^2 l^2} = \frac{l_1^3 l_2^3}{9E^2 I^2 (l_1 + l_2)^2}. \end{aligned} \quad (4.31)$$

4.5.2. Determinarea coeficienților de rigiditate pentru cazul arborelui în consolă

Coeficienților de rigiditate pentru cazul arborelui în consolă sunt:

$$\begin{aligned} k_{xx} = k_{yy} = k_{11} &= \frac{12 \cdot EI}{l_C^3} \\ k_{\varphi_1 \varphi_1} = k_{\varphi_2 \varphi_2} = k_{22} &= \frac{4 \cdot EI}{l_C} \\ k_{x\varphi_2} = k_{\varphi_2 x} = -k_{y\varphi_1} = -k_{\varphi_1 y} = k_{12} &= -\frac{6 \cdot EI}{l_C^2} \\ \Delta_1 = \Delta_2 &= \frac{l_C^4}{12(EI)^2}. \end{aligned} \quad (4.34)$$

4.6. Ecuațiile de mișcare

Dacă rotorul are o mișcare uniformă cu viteza unghiulară de rotație $\dot{\varphi}_3 = \Omega$, astfel că $\varphi_3 = \Omega t$, sistemul ia forma:

$$\begin{cases} M\ddot{x} + k_{11}x - k_{12}\varphi_2 = M e_C \Omega^2 \cos(\Omega t + \gamma) \\ M\ddot{y} + k_{11}y + k_{12}\varphi_1 = M e_C \Omega^2 \sin(\Omega t + \gamma) \\ J_d \ddot{\varphi}_1 + J_p \Omega \dot{\varphi}_2 + k_{12}y + k_{22}\varphi_1 = (J_d - J_p)\beta [\Omega^2 \cos(\Omega t)] \\ J_d \ddot{\varphi}_2 - J_p \Omega \dot{\varphi}_1 - k_{12}x + k_{22}\varphi_2 = (J_d - J_p)\beta [\Omega^2 \sin(\Omega t)]. \end{cases} \quad (4.37)$$

4.7. Concluzii

Se observă că matricele de inerție și de rigiditate sunt simetrice, în timp ce matricea giroscopică este antisimetrică.

În numeroase aplicații, însă, masa arborelui se poate neglija în comparație cu masa discului fixat pe arbore.

5. VIBRAȚIILE LIBERE ALE ROTORULUI

În acest capitol se studiază vibrațiile libere ale rotorului. Se scriu ecuațiile diferențiale ale vibrațiilor, sub formă reală și sub formă complexă. Se determină dependența pulsațiilor proprii de diferite mărimi caracteristice ale arborelui.

Mișcarea rotorului se obține suprapunând mișcarea de vibrație cu cea de rotație în jurul axei arborelui. În ecuațiile de mișcare apar și termeni datorati forțelor giroscopice.

5.1. Ecuațiile de mișcare

Sistemul de ecuații (4.37), ce descrie mișcarea rotorului este liniar și neomogen. Soluția acestui sistem se obține prin însumarea soluției generale a sistemului de ecuații omogen cu o soluție particulară oarecare a sistemului neomogen.

Sistemul omogen de ecuații se obține anulând termenii din membrul doi ai sistemului de ecuații (4.37). Se obține astfel:

$$\begin{cases} M\ddot{x} + k_{11}x - k_{12}\varphi_2 = 0 \\ M\ddot{y} + k_{11}y + k_{12}\varphi_1 = 0 \\ J_d\ddot{\varphi}_1 + J_p\Omega\dot{\varphi}_2 + k_{21}y + k_{22}\varphi_1 = 0 \\ J_d\ddot{\varphi}_2 - J_p\Omega\dot{\varphi}_1 - k_{21}x + k_{22}\varphi_2 = 0. \end{cases} \quad (5.1)$$

5.2. Forma complexă a ecuațiilor de mișcare

Determinarea mișcării libere a rotorului cu metoda prezentată mai sus este dificil de făcut. Din acest motiv, se face apel la metoda variabilelor complexe [46]. Se introduc variabilele (fig. 5.1):

$$\xi = x + iy, \quad \theta = \varphi_2 - i\varphi_1. \quad (5.13)$$

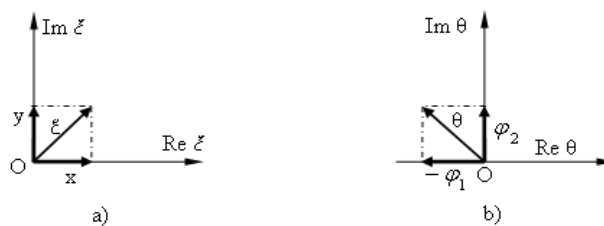


Fig. 5.1

Se obțin astfel următoarele ecuații:

$$\begin{cases} M\ddot{\xi} + k_{11}\xi - k_{12}\theta = 0 \\ J_d\ddot{\theta} - iJ_p\Omega\dot{\theta} - k_{21}\xi + k_{22}\theta = 0. \end{cases} \quad (5.14)$$

Pentru sistemul de ecuații (5.14) se caută soluții de forma:

$$\xi(t) = r e^{i\omega t}, \quad \theta(t) = \Psi e^{i\omega t}. \quad (5.15)$$

Aceste expresii se introduc în sistemul (5.14), care după simplificări devine:

$$\begin{cases} (k_{11} - M \omega^2) r - k_{12} \Psi = 0 \\ -k_{12} r + (k_{22} + J_p \Omega \omega - J_d \omega^2) \Psi = 0. \end{cases} \quad (5.16)$$

Ecuția caracteristică a acestui sistem este:

$$M J_d \omega^4 - M J_p \Omega \omega^3 - (k_{11} J_d + k_{22} M) \omega^2 + k_{11} J_p \Omega \omega + k_{11} k_{22} - k_{12}^2 = 0. \quad (5.18)$$

5.3. Diagrama Campbell

Din literatura de specialitate [46], valorile pulsațiilor proprii sunt reprezentate de rădăcinile ecuației (5.18), care depind de viteza unghiulară, Ω , a rotorului. Pentru a obține o imagine a acestei dependențe, se trasează graficul $\Omega - \omega$ explicitând pe Ω în ecuația (5.18):

$$\Omega = \frac{M J_d \omega^4 - (k_{11} J_d + k_{22} M) \omega^2 + k_{11} k_{22} - k_{12}^2}{(M \omega^2 - k_{11}) J_p \omega},$$

Pentru o valoare dată a lui Ω , din ecuația de mai sus se obțin patru valori ale lui ω care satisfac această relație. Astfel, pe diagrama $\Omega = \Omega(\omega)$ sunt generate patru curbe care intersectează axa absciselor în punctele $\pm \omega_1(0)$ și $\pm \omega_2(0)$ (fig 5.2).

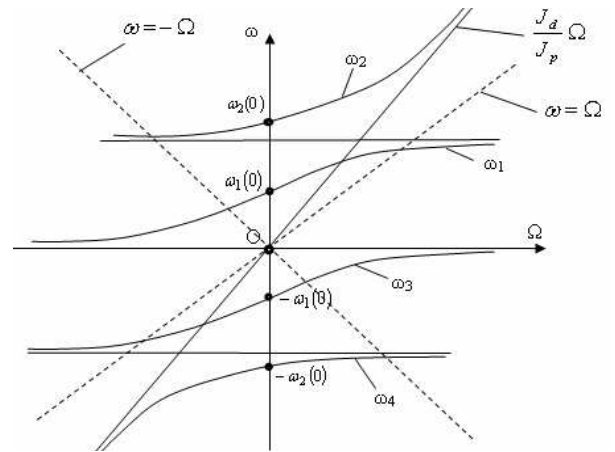


Fig. 5.2 Diagrama Campbell

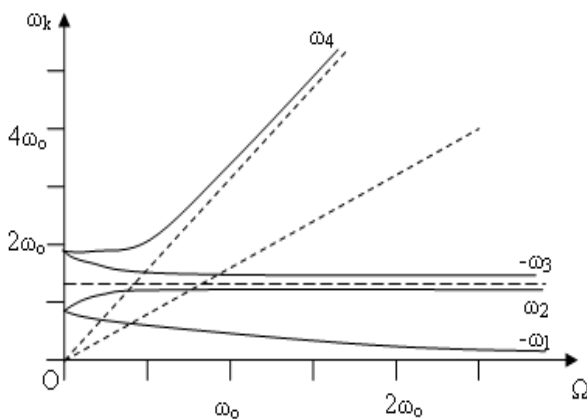


Fig. 5.3 Diagrama Campbell în cazul arborelui rezemat la capete

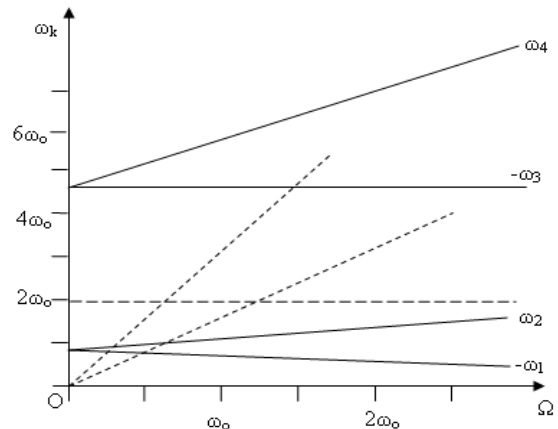


Fig. 5.4 Diagrama Campbell în cazul arborelui în consolă

O reprezentare mai clară și mai simplă se obține considerând numai jumătate din diagramă. Se obișnuiește ca diagrama să fie reprezentată considerând valoarea pozitivă a vitezei unghiulare Ω în abscisă și valorile absolute ale pulsațiilor proprii în ordonată (diagrama Campbell) (fig. 5.3, 5.4).

5.4. Formele proprii

Dacă se introduce în prima ecuație (5.16) valoarea proprie calculată ω_k , se obțin coeficienții de distribuție [46], [65]:

$$\Psi_k = \frac{k_{11} - M \omega_k^2}{k_{12}} r_k, \quad (k = 1, 2, 3, 4). \quad (5.22)$$

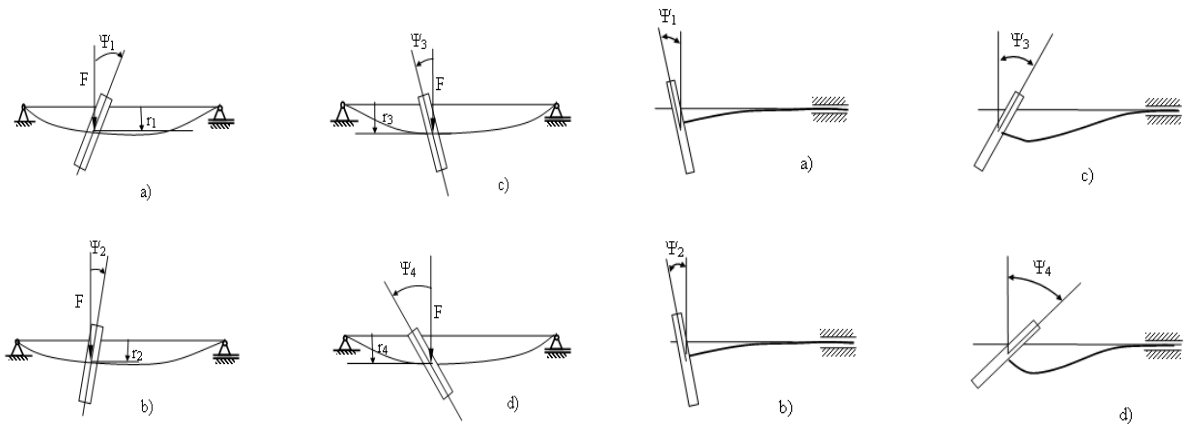


Fig. 5.5 Formele proprii de vibrație pentru cazul arborelui rezemat la capete

Fig. 5.6 Formele proprii de vibrație pentru cazul arborelui în consolă

5.5. Dependența pulsațiilor proprii de momentele de inerție și de poziția discului pe arbore în cazul arborelui rezemat la capete

Dependența pulsațiilor proprii de momentele de inerție și de poziția discului pe arbore se studiază doar pentru cazul arborelui rezemat la capete.

$$\eta^4 - 2s\eta^3 - \left[1 + \frac{\nu^2(1-\nu)^2}{1+3\nu-3\nu^2} \mu \right] \eta^2 + 2s\eta + \frac{\nu^3(1-\nu^3)}{(1+3\nu-3\nu^2)^2} \mu = 0. \quad (5.32)$$

S-au notat: $\mu = \frac{J_d}{Ml^2}$, $s = \frac{\Omega}{\omega_{10}}$, $\nu = \frac{l_1}{l}$.

5.6. Aplicații numerice

5.6.1. Cazul arborelui rezemat rigid la capete

În cazul arborelui rezemat rigid la capete (fig 5.7) s-au considerat caracteristicile din tabelul 5.1.

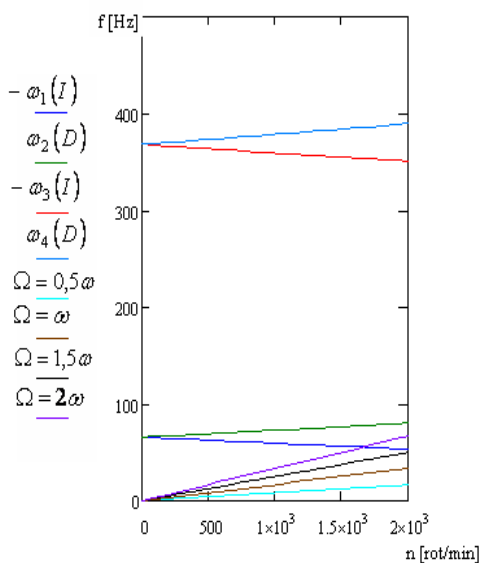


Fig. 5.9 Diagrama Campbell pentru valoarea lui $\nu = 0,1$

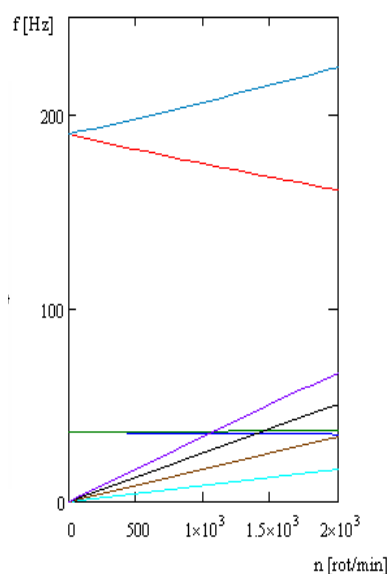


Fig. 5.10 Diagrama Campbell pentru valoarea lui $\nu = 0,3$

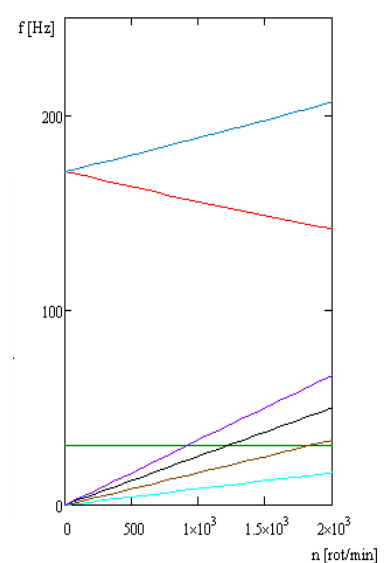


Fig. 5.11 Diagrama Campbell pentru valoarea lui $\nu = 0,5$

Tabelul 5.1

Caracteristici generale

<i>Date generale</i>	<i>arbore</i>	<i>disc</i>
masa [kg]	$m = 0,650$	$M = 4,225$
diametrul [m]	$d = 0,0143$	$D = 0,18$
lungimea arborelui între reazeme [m]	$l = 0,501$	-
grosimea discului [m]	-	$h = 0,024$
momentul de inerție geometric al secțiunii transversale a arborelui [m ⁴]	$I = 2,0526 \cdot 10^{-9}$	-
momentele de inerție mecanice ale discului [kgm ²]	-	$J_d = 8,7584 \cdot 10^{-3}$ $J_p = 0,0171$

5.6.2. Cazul arborelui în consolă

În cazul arborelui în consolă (fig 5.9), se vor analiza separat două cazuri, ce diferă prin forma și dimensiunile discului (anexa 1), reprezentându-se diagramele Campbell respective.

În tabelul 5.5 sunt prezentate o serie de caracteristici pentru cazul discului 1.

Tabelul 5.5

Caracteristici generale

<i>Date generale</i>	<i>arbore</i>	<i>disc</i>
masa [kg]	$m = 0,1383$	$M = 0,6272$
diametrul [m]	$d = 0,008$	$D = 0,22$
lungimea arborelui între reazem și centrul de masă al discului [m]	$l_c = 0,35$	-
grosimea discului [m]	-	$h = 0,002$
momentul de inerție geometric al secțiunii transversale a arborelui [m ⁴]	$I = 2,0106 \cdot 10^{-10}$	-
momentele de inerție mecanice ale discului [kgm ²]	-	$J_d = 1,8975 \cdot 10^{-3}$ $J_p = 3,7947 \cdot 10^{-3}$

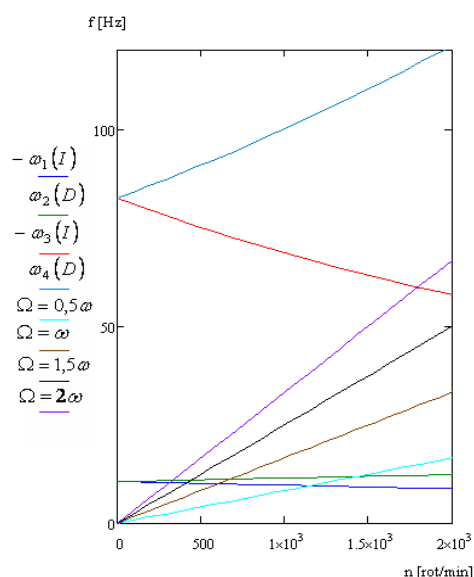


Fig. 5.13 Diagrama Campbell în cazul utilizării discului 1

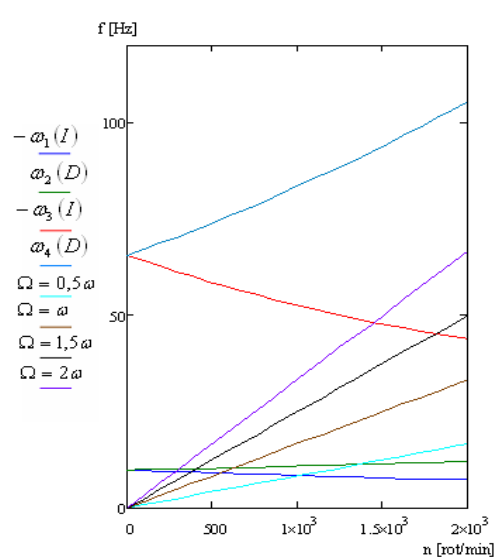


Fig. 5.14 Diagrama Campbell în cazul utilizării discului 2

În tabelul 5.7 sunt prezentate o serie de caracteristici pentru cazul discului 2.

Tabelul 5.7

Caracteristici generale

<i>Date generale</i>	<i>arbore</i>	<i>disc</i>
masa [kg]	$m = 0,1383$	$M = 0,727$
diametrul [m]	$d = 0,008$	Anexa 1
lungimea arborelui între rezem și centrul de masă al discului [m]	$l_c = 0,35$	-
momentul de inerție geometric al secțiunii transversale a arborelui [m ⁴]	$I = 2,0106 \cdot 10^{-10}$	-
momentele de inerție mecanice ale discului [kgm ²]	-	$J_d = 3,0564 \cdot 10^{-3}$ $J_p = 6,089 \cdot 10^{-3}$

5.7. Concluzii

Diagramele Campbell pun în evidență două tipuri de regimuri:

- cu mișcare de precesie directă a discului (precesia are loc în sensul de rotație a arborelui) – curbele ω_2, ω_4 , din diagramele Campbell (fig. 5.9 - 5.13);
- cu mișcare de precesie inversă a discului (precesia are loc în sens opus sensului de rotație a arborelui) – curbele $-\omega_1, -\omega_3$, din diagramele Campbell (fig. 5.9 - 5.13).

În funcție de configurația sistemului (mase, dimensiuni, așezare a discului), este posibil ca unele dintre dreptele $\Omega = 0,5\omega$, $\Omega = \omega$, $\Omega = 1,5\omega$, $\Omega = 2\omega$ să nu intersecteze toate cele patru curbe $-\omega_1, \omega_2, -\omega_3, \omega_4$.

Elasticitatea arborelui influențează turațiile și frecvențele critice în sensul scăderii lor. Aceeași influență o au creșterea distanței dintre rezeme și creșterea lungimii în consolă.

Sunt prezentate diagramele Campbell pentru diferite poziții ale discului în cazul arborelui rezemat la capete (fig. 5.9, 5.10, 5.11). Diagramele pun în evidență influența pe care o are această poziție asupra pulsațiilor proprii. Sunt de asemenea prezentate sub formă tabelară valorile turațiilor critice.

6. VIBRAȚIILE FORȚATE ALE ROTORULUI DEZECHILIBRAT

În acest capitol se studiază vibrațiile forțate ale rotorului dezechilibrat. Se scriu ecuațiile diferențiale ale vibrațiilor neamortizate, respectiv ale celor amortizate. Se determină vitezele unghiulare critice și se determina influența amortizării asupra oscilațiilor rotorului, cu referire la cele două tipuri de dezechilibre.

6.1. Vibrațiile forțate neamortizate

Vibrațiile forțate sunt produse de forțe exterioare variabile în timp sau de deplasări impuse. Dacă asupra masei acționează o forță armonică de amplitudine constantă și frecvență variabilă, atunci când frecvența excitatoare se apropie de frecvența sistemului, deplasarea masei crește nelimitat. Această fenomen se numește rezonanță și este caracterizat de vibrații puternice. La sisteme neamortizate, frecvențele de rezonanță sunt egale cu frecvențele proprii ale sistemului și, în majoritatea cazurilor, funcționarea la rezonanță trebuie evitată.

În cazul arborilor, vibrațiile forțate pot fi generate de dezechilibre de două tipuri:

- statice, datorate unor mase excentrice;
- de cuplu, datorate unui montaj înclinat al discului.

6.1.1. Ecuțiile de mișcare ale rotorului dezechilibrat în cazul virațiilor neamortizate

Se determină ecuațiile de mișcare ale rotorului dezechilibrat, în următoarele ipoteze:

- rotorul prezintă dezechilibru static cu excentricitatea e_C și dezechilibru de cuplu cu unghiul β ;
- arborele este orizontal, cu axa y descendentă;
- se consideră și greutatea proprie, ce se aplică în centrul de masă al rotorului.

Dacă se ia în considerare influența greutății proprii, ecuațiile diferențiale ale mișcării rotorului deduse în capitolul 4, devin:

$$\begin{cases} M\ddot{x} + k_{11}x - k_{12}\varphi_2 = M e_C \Omega^2 \cos(\Omega t + \gamma) \\ M\ddot{y} + k_{11}y + k_{12}\varphi_1 = M e_C \Omega^2 \sin(\Omega t + \gamma) + M g \\ J_d\ddot{\varphi}_1 + J_p\Omega\dot{\varphi}_2 + k_{12}y + k_{22}\varphi_1 = -(J_p - J_d)\beta[\Omega^2 \cos(\Omega t)] \\ J_d\ddot{\varphi}_2 - J_p\Omega\dot{\varphi}_1 - k_{12}x + k_{22}\varphi_2 = -(J_p - J_d)\beta[\Omega^2 \sin(\Omega t)]. \end{cases} \quad (6.1)$$

Dacă se face trecerea la variabilele complexe și se notează $\xi = x + iy$, respectiv $\theta = \varphi_2 - i\varphi_1$, aceste ecuații devin:

$$\begin{cases} M\ddot{\xi} + k_{11}\xi - k_{12}\theta = M e_C \Omega^2 e^{i(\Omega t + \gamma)} + i M g \\ J_d\ddot{\theta} - i J_p\Omega\dot{\theta} - k_{12}\xi + k_{22}\theta = i(J_p - J_d)\Omega^2 \beta e^{i\Omega t}. \end{cases} \quad (6.2)$$

Soluția permanentă ia forma

$$\begin{cases} \xi = \xi_g + \xi_S e^{i(\Omega t + \gamma)} + \xi_C e^{i\Omega t} \\ \theta = \theta_g + \theta_S e^{i(\Omega t + \gamma)} + \theta_C e^{i\Omega t}. \end{cases} \quad (6.3)$$

în care termenii ξ_g și θ_g se datorează greutății proprii, iar termenii ξ_S, θ_S respectiv ξ_C, θ_C celor două tipuri de dezechilibre. Acești termeni sunt complecși.

6.1.2. Soluții particulare

Dacă rotorul este dezechilibrat static și nu se ține cont de greutate (arborele este în poziție verticală), ecuațiile diferențiale sunt:

$$\begin{cases} M\ddot{\xi} + k_{11}\xi - k_{12}\theta = M e_C \Omega^2 e^{i(\Omega t + \gamma)} \\ J_d\ddot{\theta} - i J_p\Omega\dot{\theta} - k_{12}\xi + k_{22}\theta = 0. \end{cases} \quad (6.6)$$

Aceste ecuații au soluție particulară de forma:

$$\begin{cases} \xi = \xi_S \cdot e^{i(\Omega t + \gamma)} \\ \theta = \theta_S \cdot e^{i(\Omega t + \gamma)}. \end{cases} \quad (6.7)$$

Ecuțiile de mișcare atunci când arborele este vertical și are doar dezechilibru de cuplu sunt:

$$\begin{cases} M\ddot{\xi} + k_{11}\xi - k_{12}\theta = 0 \\ J_d\ddot{\theta} - i J_p\Omega\dot{\theta} - k_{12}\xi + k_{22}\theta = i(J_p - J_d)\Omega^2 \beta e^{i\Omega t}. \end{cases} \quad (6.8)$$

Soluția particulară a acestor ecuații este de forma:

$$\begin{cases} \xi = \xi_C \cdot e^{i\Omega t} \\ \theta = \theta_C \cdot e^{i\Omega t}. \end{cases} \quad (6.9)$$

6.1.3. Viteze unghiulare critice

Atunci când numitorii soluțiilor particulare (6.7) și (6.9) tind către zero, amplitudinea mișcării crește nelimitat. Vitezei unghiulară de rotație, Ω , are rădăcinile de forma:

$$\Omega_{c_1 c_2} = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{k_{22}}{J_d - J_p} + \frac{k_{11}}{M} \right) \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{k_{11}}{M} + \frac{k_{22}}{J_d - J_p} \right)^2 + \frac{k_{11} k_{22} - k_{12}^2}{M (J_p - J_d)}}} \quad (6.11)$$

6.2. Vibrațiile forțate amortizate

În timpul vibrațiilor forțate amortizate, răspunsul este defazat în urma excitației, datorită disipării de energie prin amortizare.

6.2.1. Ecuatiile de mișcare ale rotorului dezechilibrat în cazul vibrațiilor amortizate

Ecuatiile de mișcare (6.1) au fost deduse considerând amortizarea neglijabilă. Dacă se consideră o amortizare de tip vâcos, liniar și se neglijează efectul greutatei proprii [46], acest sistem devine:

$$\begin{cases} M\ddot{x} + c\dot{x} + k_{11}x - k_{12}\varphi_2 = M e_C \Omega^2 \cos(\Omega t + \gamma) \\ M\ddot{y} + c\dot{y} + k_{11}y + k_{12}\varphi_1 = M e_C \Omega^2 \sin(\Omega t + \gamma) \\ J_d\ddot{\varphi}_1 + J_p\Omega\dot{\varphi}_2 + c_1\dot{\varphi}_1 + k_{12}y + k_{22}\varphi_1 = (J_d - J_p)\beta[\Omega^2 \cos(\Omega t)] \\ J_d\ddot{\varphi}_2 - J_p\Omega\dot{\varphi}_1 + c_1\dot{\varphi}_2 - k_{12}x + k_{22}\varphi_2 = (J_d - J_p)\beta[\Omega^2 \sin(\Omega t)]. \end{cases} \quad (6.12)$$

6.2.2. Soluții particulare

6.2.2.1 Dezechilibrul static

În cazul *dezechilibrului static* (datorat montării discului pe arbore cu o excentricitate, astfel că $e_C \neq 0, \beta = 0$), ecuațiile diferențiale ale mișcării sunt [65]:

$$\begin{cases} M\ddot{\xi} + c\dot{\xi} + k_{11}\xi - k_{12}\theta = M e_C \Omega^2 e^{i(\Omega t + \gamma)} \\ J_d\ddot{\theta} - i J_p\Omega\dot{\theta} + c_1\dot{\theta} - k_{12}\xi + k_{22}\theta = 0. \end{cases} \quad (6.15)$$

Soluția particulară a acestui sistem este de forma:

$$\begin{cases} \xi = (A_1 + i A_2) e^{i(\Omega t + \gamma)} = A e^{i(\Omega t + \gamma - \alpha_1)} \\ \theta = (B_1 + i B_2) e^{i(\Omega t + \gamma)} = B e^{i(\Omega t + \gamma - \alpha_2)}. \end{cases} \quad (6.16)$$

Dacă se introduc relațiile (6.16) în sistemul (6.15), se obțin expresiile constantelor $A_1, A_2, B_1,$

$$A_1 = \left[\frac{(k_{22} - J_d \Omega^2 + J_p \Omega^2) [(k_{11} - M \Omega^2) (k_{22} - J_d \Omega^2 + J_p \Omega^2) - c c_1 \Omega^2 - k_{12}^2]}{\Delta} + \frac{c_1^2 \Omega^2 (k_{11} - M \Omega^2)}{\Delta} \right] M e_C \Omega^2, \quad (6.17.a)$$

$$A_2 = - \frac{c_1 \Omega (c c_1 \Omega^2 + k_{12}^2) + c \Omega (k_{22} - J_d \Omega^2 + J_p \Omega^2)}{\Delta} M e_C \Omega^2, \quad (6.17.b)$$

$$B_1 = \frac{k_{12} [(k_{11} - M \Omega^2) (k_{22} - J_d \Omega^2 + J_p \Omega^2) - c c_1 \Omega^2 - k_{12}^2]}{\Delta} M e_C \Omega^2, \quad (6.18.a)$$

$$B_2 = - \frac{[c_1 \Omega (k_{11} - M \Omega^2) + c \Omega (k_{22} - J_d \Omega^2 + J_p \Omega^2)] k_{12}}{\Delta} M e_C \Omega^2, \quad (6.18.b)$$

unde numitorul Δ are expresia:

$$\Delta = [(k_{11} - M \Omega^2)(k_{22} - J_d \Omega^2 + J_p \Omega^2) - c c_1 \Omega^2 - k_{12}^2]^2 + [(k_{11} - M \Omega^2) c_1 \Omega + (k_{22} - J_d \Omega^2 + J_p \Omega^2) c \Omega]^2. \quad (6.19)$$

Amplitudinile celor două deplasări sunt

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}, \quad B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2}, \quad (6.20.a)$$

iar defazațele dintre deplasări și forța aplicată au expresiile:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = -\frac{A_2}{A_1}, \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = -\frac{B_2}{B_1}. \quad (6.20.b)$$

Rezultă astfel că punctul de fixare al rotorului de pe axa arborelui se mișcă pe un cerc de rază A , iar axa arborelui este înclinată cu unghiul B în raport cu axa lagărelor.

6.2.2.2 Dezechilibrul de cuplu

În cazul **dezechilibrului de cuplu** (datorat montării înclinate a discului pe arbore astfel că $e_C = 0, \beta \neq 0$), ecuațiile diferențiale ale mișcării sunt [65]:

$$\begin{cases} M \ddot{\xi} + c \dot{\xi} + k_{11} \xi - k_{12} \theta = 0 \\ J_d \ddot{\theta} - i J_p \Omega \dot{\theta} + c_1 \dot{\theta} - k_{12} \xi + k_{22} \theta = i (J_p - J_d) \beta \Omega^2 e^{i \Omega t}. \end{cases} \quad (6.21)$$

Soluția particulară a acestui sistem este de forma:

$$\begin{cases} \xi = (C_1 + i C_2) e^{i(\Omega t + \gamma)} = C e^{i(\Omega t - \alpha_3)} \\ \theta = (D_1 + i D_2) e^{i(\Omega t + \gamma)} = D e^{i(\Omega t - \alpha_4)}. \end{cases} \quad (6.22)$$

Dacă se introduc aceste expresii în sistemul (6.21), se obțin expresiile constantelor C_1, C_2, D_1, D_2 ,

$$C_1 = \frac{[c \Omega (k_{22} - J_d \Omega^2 + J_p \Omega^2) + c_1 \Omega (k_{11} - M \Omega^2)] k_{12}}{\Delta} (J_p - J_d) \beta \Omega^2, \quad (6.23.a)$$

$$C_2 = \frac{[(k_{22} - J_d \Omega^2 + J_p \Omega^2)(k_{11} - M \Omega^2) - c c_1 \Omega^2 - k_{12}^2]}{\Delta} k_{12} (J_p - J_d) \beta \Omega^2, \quad (6.23.b)$$

$$D_1 = \frac{(k_{11} - M \Omega^2) c_1 \Omega + (c c_1 \Omega^2 + k_{12}^2) c \Omega}{\Delta} (J_p - J_d) \beta \Omega^2, \quad (6.24.a)$$

$$D_2 = \left[\frac{c^2 \Omega^2 (k_{22} - J_d \Omega^2 + J_p \Omega^2) + (k_{11} - M \Omega^2)(k_{22} - J_d \Omega^2 + J_p \Omega^2)}{\Delta} - \frac{k_{12}^2 (k_{11} - M \Omega^2)}{\Delta} \right] (J_p - J_d) \beta \Omega^2. \quad (6.24.b)$$

Amplitudinile celor două deplasări sunt

$$C = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \quad D = \sqrt{D_1^2 + D_2^2}, \quad (6.25.a)$$

iar defazațele dintre deplasări și momentul cuplului de dezechilibru au expresiile:

$$\operatorname{tg} \alpha_3 = -\frac{C_2}{C_1}, \quad \operatorname{tg} \alpha_4 = -\frac{D_2}{D_1}. \quad (6.25.b)$$

Și în cazul dezechilibrului de cuplu, axa arborelui se înclină cu un unghi D , iar punctul de fixare al rotorului pe axa de rotație se mișcă sincron pe un cerc de rază C .

6.2.3. Aplicații numerice

Se vor analiza cele două cazuri de montare ale arborelui și se prezintă diagramele de variație ale amplitudinilor și unghiurilor de defazaj pentru cazul celor două montaje (fig. 1.1, 1.2).

6.2.3.1 Cazul arborelui rezemat rigid la capete

În cazul arborelui rezemat rigid la capete se va analiza varianta în care poziția relativă a discului pe arbore corespunde valorii $\nu = 0,3$.

6.2.3.2 Cazul arborelui în consolă

În cazul arborelui în consolă se vor analiza cele două cazuri, care diferă prin forma și dimensiunile discului.

I. Discul 1

Se analizează influența vibrațiilor forțate asupra rotorului când acesta are montat la capătul său liber discul 1. Forma discului este cea din anexa 1.

a) În cazul *dezechilibrului static* ($e_c \neq 0, \beta = 0$), se studiază amplitudinile celor două

deplasări raportate la excentricitate $\tilde{A} = \frac{A}{e_c}$ și $\tilde{B} = \frac{B}{e_c}$.

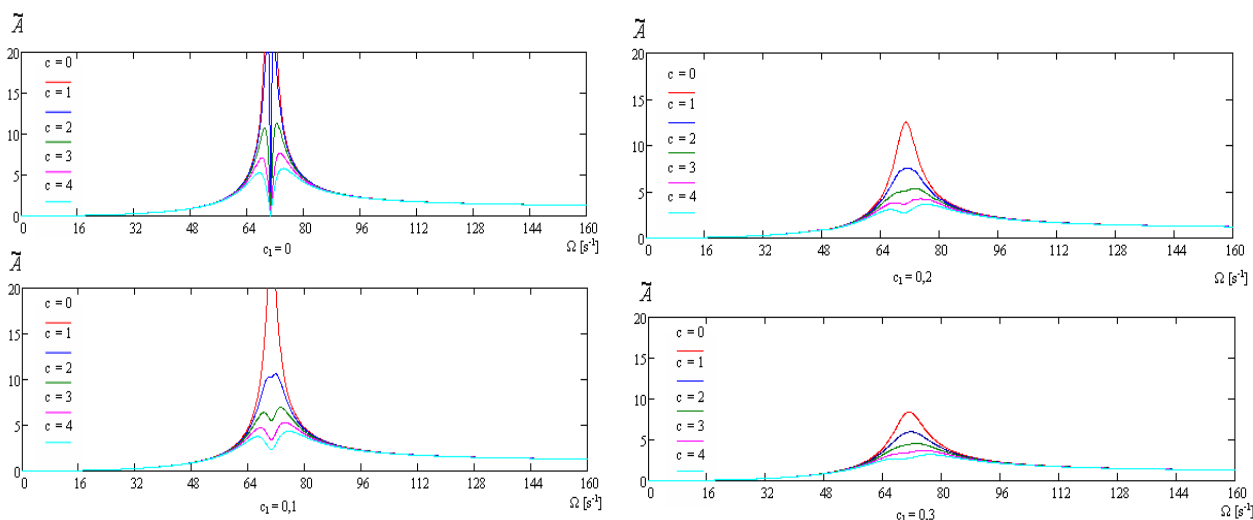


Fig. 6.22 Amplitudinea deplasării în funcție de viteza unghiulară și coeficienții de amortizare c și c_1

Graficele din figura 6.22 ilustrează influența celor doi coeficienți de amortizare asupra deplasării. Ambele tipuri de amortizări determină scăderea amplitudinii de oscilație.

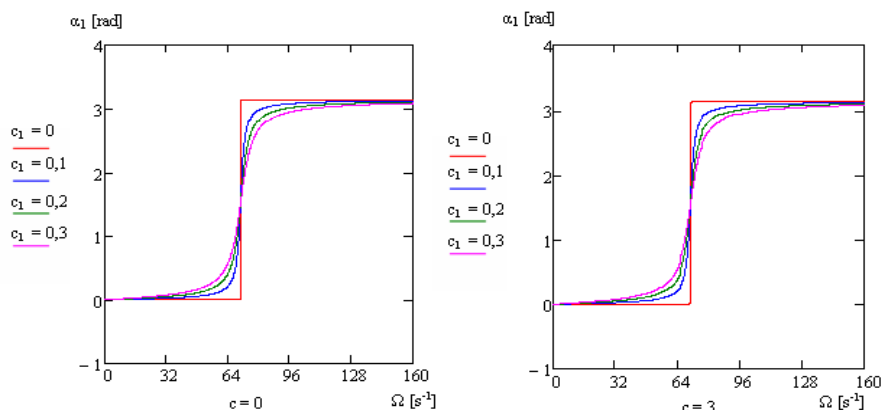


Fig. 6.23 Variația defazajului cu viteza unghiulară și cu coeficienții de amortizare

Defazajul $tg \alpha_1 = -\frac{A_2}{A_1}$ dintre deplasarea transversală și forța aplicată este ilustrat în figura

6.23.

Se pot observa următoarele:

- în cazul configurației studiate, influența coeficientului de amortizare pentru deplasare c asupra unghiului de defazaj este redusă;
- coeficientul de amortizare pentru rotație c_1 influențează în mai mare măsură unghiul de defazaj.

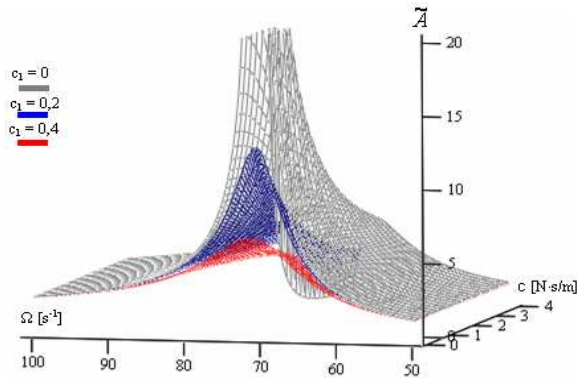


Fig. 6.24 Variația amplitudinii deplasării cu viteza unghiulară și cu coeficientul de amortizare c

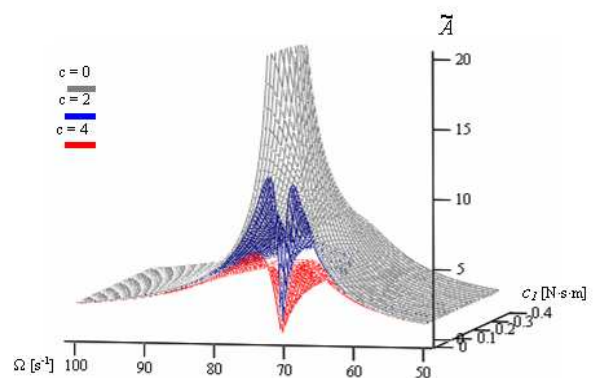


Fig. 6.25 Variația amplitudinii deplasării cu viteza și cu coeficientul de amortizare c_1

Influența vitezei unghiulare și a coeficientului de amortizare pentru deplasare c asupra amplitudinii raportate \tilde{A} este ilustrată în figura 6.24.

Influența vitezei unghiulare și a coeficientului de amortizare pentru rotație c_1 asupra amplitudinii raportate \tilde{A} este ilustrată în figura 6.25.

Influența coeficienților de amortizare pentru deplasare c , respectiv pentru rotație c_1 , asupra amplitudinii raportate \tilde{A} este ilustrată în figura 6.26.

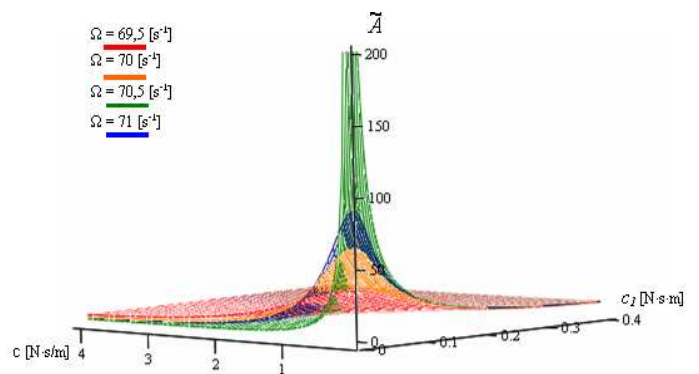


Fig. 6.26 Variația amplitudinii deplasării cu coeficienții de amortizare c și c_1

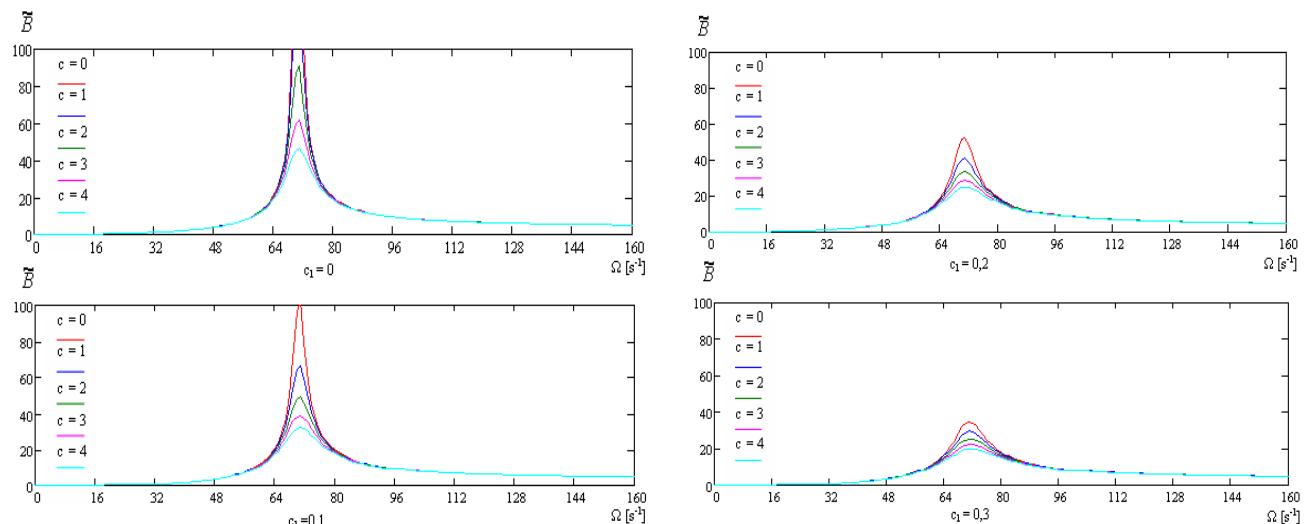


Fig. 6.27 Amplitudinea deplasării în funcție de viteza unghiulară și coeficienții de amortizare c și c_1

Graficele din figura 6.27 ilustrează influența celor doi coeficienți de amortizare asupra deplasării. Ambele tipuri de amortizări determină scăderea amplitudinii de oscilație.

Defazajul $tg \alpha_2 = -\frac{B_2}{B_1}$ dintre deplasarea unghiulară și forța aplicată este ilustrat în figura 6.28.

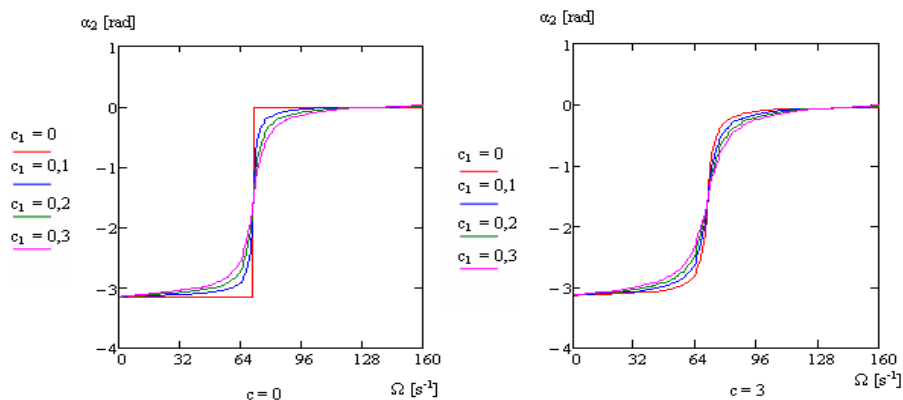


Fig. 6.28 Variația defazajului cu viteza unghiulară și cu coeficienții de amortizare

Se pot observa următoarele:

- în cazul configurației studiate, influența coeficientului de amortizare pentru deplasare c asupra unghiului de defazaj este redusă;
- coeficientul de amortizare pentru rotație c_1 influențează în mai mare măsură unghiul de defazaj.

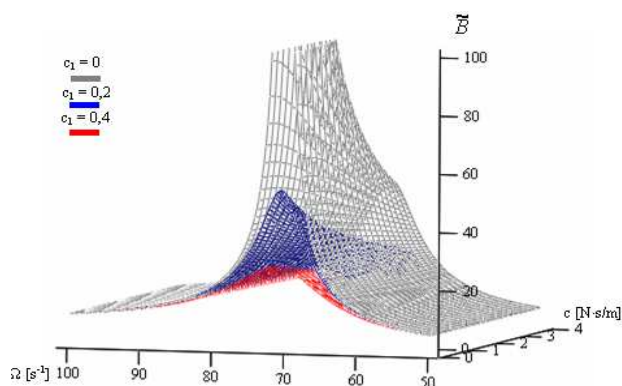


Fig. 6.29 Variația amplitudinii deplasării cu viteza unghiulară și cu coeficientul de amortizare c

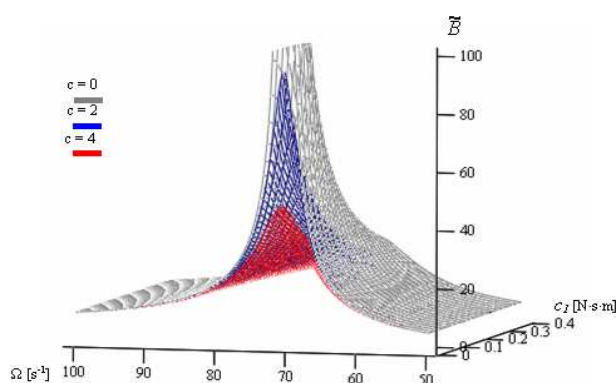


Fig. 6.30 Variația amplitudinii deplasării cu viteza și cu coeficientul de amortizare c_1

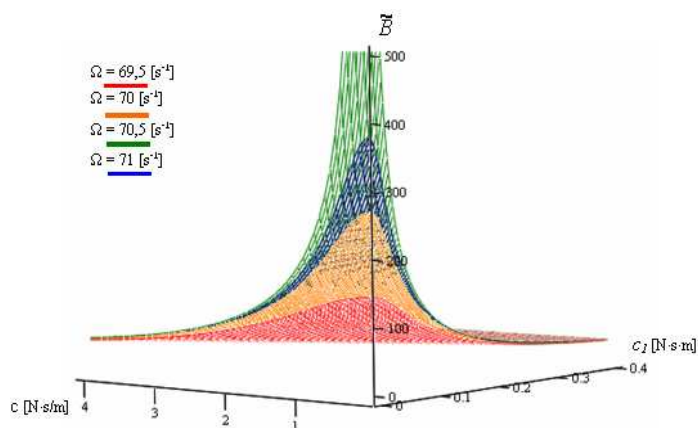


Fig. 6.31 Variația amplitudinii deplasării cu coeficienții de amortizare c și c_1

Influența vitezei unghiulare și a coeficientului de amortizare pentru deplasare c asupra amplitudinii raportate \tilde{B} este ilustrată în figura 6.29.

Influența vitezei unghiulare și a coeficientului de amortizare pentru rotație c_l asupra amplitudinii raportate \tilde{B} este ilustrată în figura 6.30.

Influența coeficienților de amortizare pentru deplasare c , respectiv pentru rotație c_l , asupra amplitudinii raportate \tilde{B} este ilustrată în figura 6.31.

b) În cazul *dezechilibrului de cuplu* ($e_C = 0, \beta \neq 0$), se studiază amplitudinile celor două deplasări raportate la unghiul de înclinare $\tilde{C} = \frac{C}{\beta}$ și $\tilde{D} = \frac{D}{\beta}$.

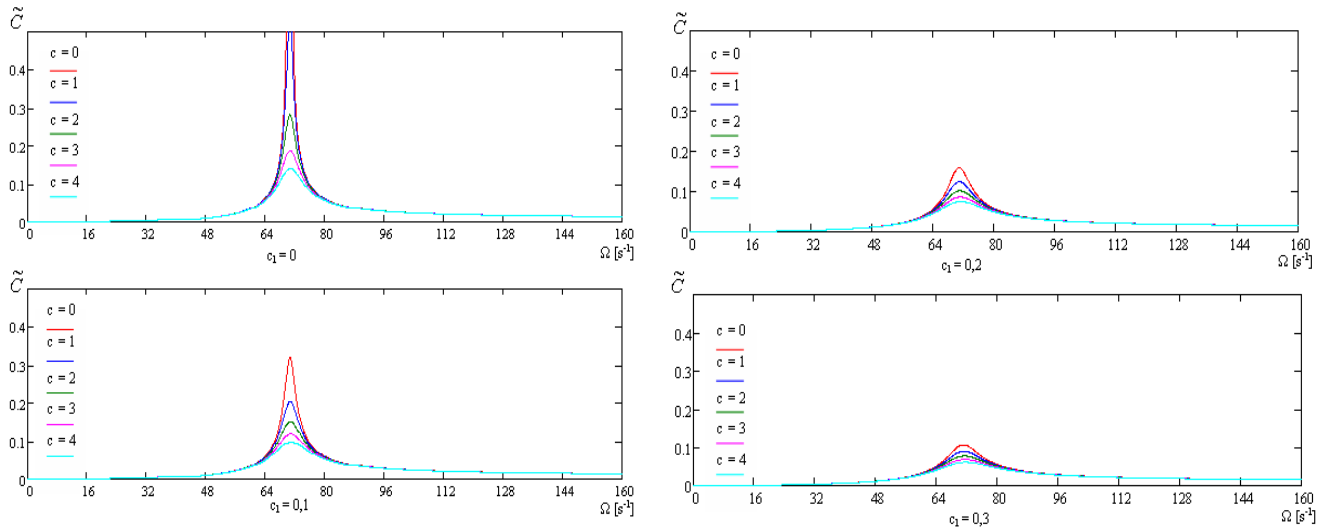


Fig. 6.32 Amplitudinea deplasării în funcție de viteza unghiulară și coeficienții de amortizare c și c_l

Graficele din figura 6.32 ilustrează influența celor doi coeficienți de amortizare asupra amplitudinii deplasării. Ambele tipuri de amortizări determină scăderea amplitudinii de oscilație.

Defazajul $\text{tg } \alpha_3 = -\frac{C_2}{C_1}$ dintre deplasarea transversală și forța aplicată este ilustrat în figura 6.33.

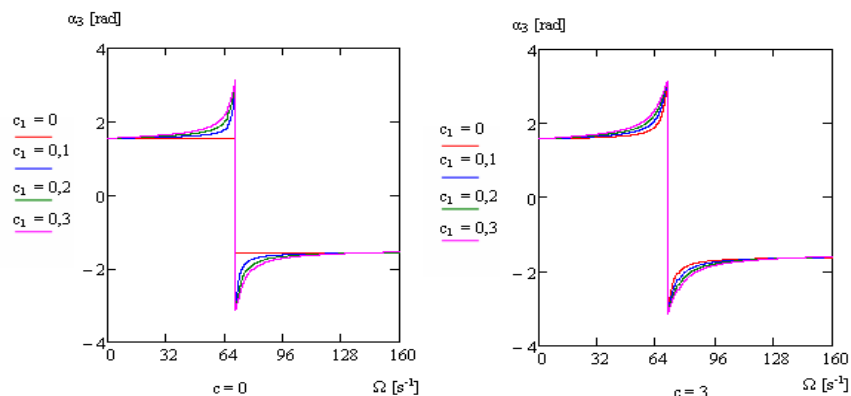


Fig. 6.33 Variația defazajului cu viteza unghiulară și cu coeficienții de amortizare

Se pot observa următoarele:

- în cazul configurației studiate, influența coeficientului de amortizare pentru deplasare c asupra unghiului de defazaj este redusă;
- coeficientul de amortizare pentru rotație c_l influențează în mai mare măsură unghiul de defazaj.

Influența vitezei unghiulare și a coeficientului de amortizare pentru deplasare c asupra amplitudinii raportate \tilde{C} este ilustrată în figura 6.34.

Influența vitezei unghiulare și a coeficientului de amortizare pentru rotație c_1 asupra amplitudinii raportate \tilde{C} este ilustrată în figura 6.35.

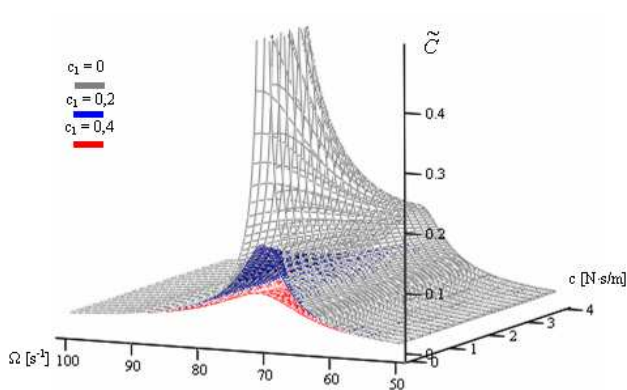


Fig. 6.34 Variația amplitudinii deplasării cu viteza unghiură și cu coeficientul de amortizare c

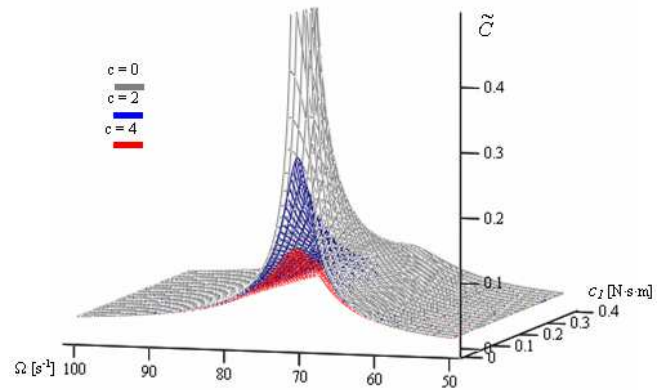


Fig. 6.35 Variația amplitudinii deplasării cu viteza și cu coeficientul de amortizare c_1

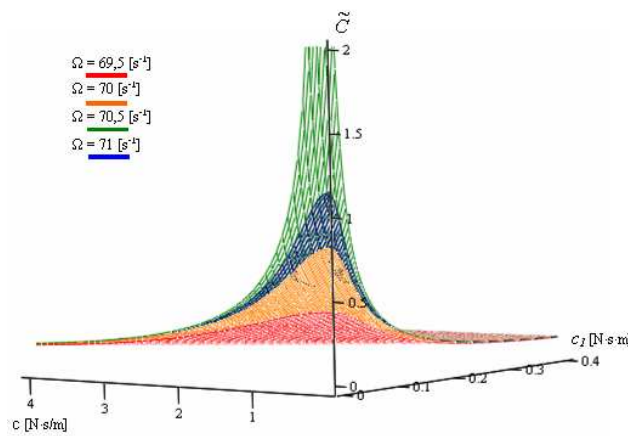


Fig. 6.36 Variația amplitudinii deplasării cu coeficienții de amortizare c și c_1

Influența coeficienților de amortizare pentru deplasare c , respectiv pentru rotație c_1 , asupra amplitudinii raportate \tilde{C} este ilustrată în figura 6.36.

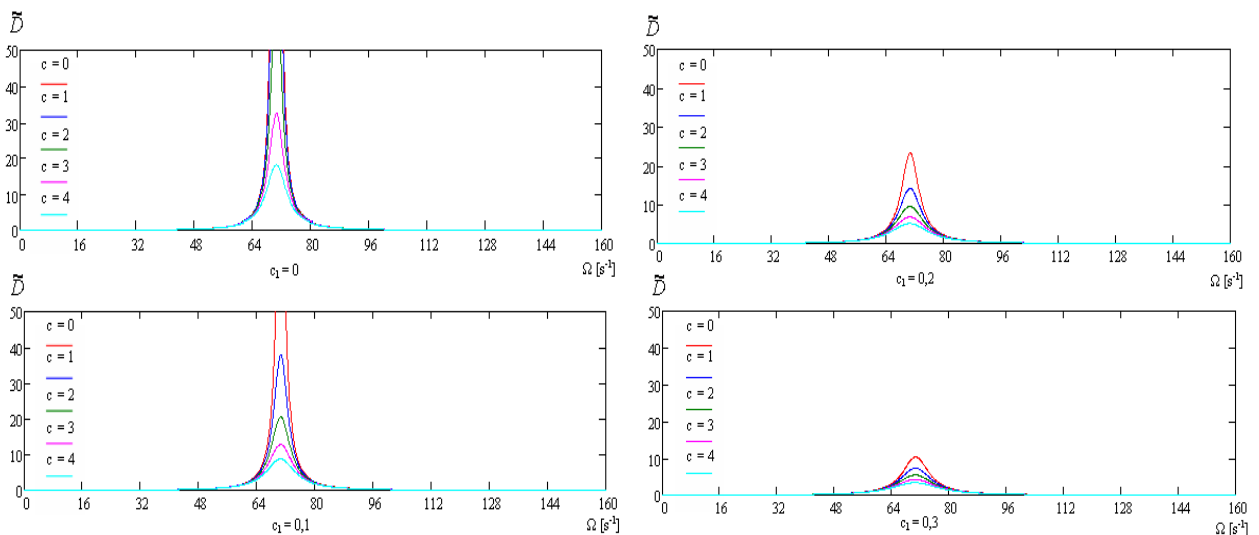


Fig. 6.37 Amplitudinea deplasării în funcție de viteza unghiură și coeficienții de amortizare c și c_1

Graficele din figura 6.37 ilustrează influența celor doi coeficienți de amortizare asupra amplitudinii deplasării. Ambele tipuri de amortizări determină scăderea amplitudinii de oscilație.

Defazajul $tg \alpha_4 = -\frac{D_2}{D_1}$ dintre deplasarea unghiulară și forța aplicată este ilustrat în figura 6.38.

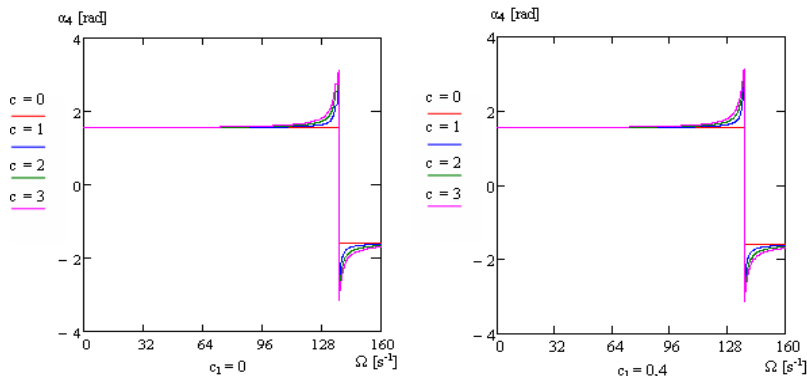


Fig. 6.38 Variația defazajului cu viteza unghiulară și cu coeficienții de amortizare

Se pot observa următoarele:

- în cazul configurației studiate, influența coeficientului de amortizare pentru rotație c_1 asupra unghiului de defazaj este redusă;
- coeficientul de amortizare pentru deplasare c influențează în mai mare măsură unghiul de defazaj.

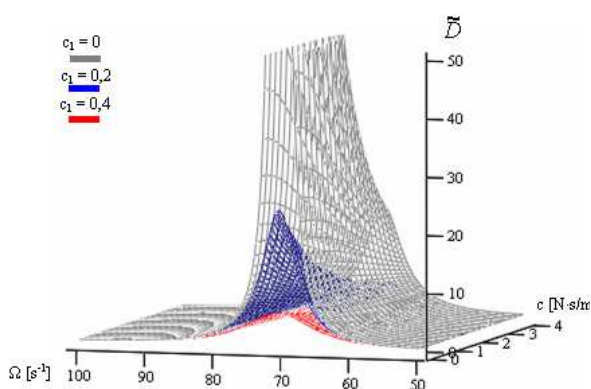


Fig. 6.39 Variația amplitudinii deplasării cu viteza unghiulară și cu coeficientul de amortizare c

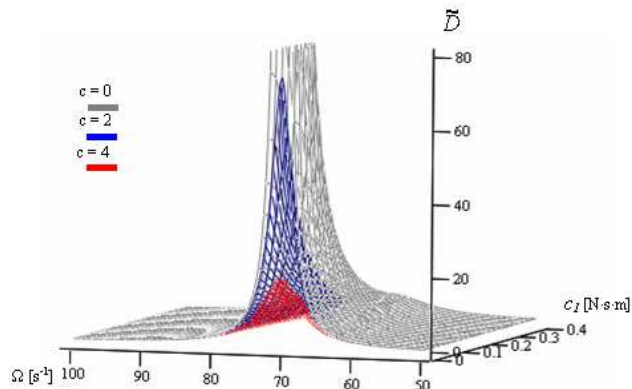


Fig. 6.40 Variația amplitudinii deplasării cu viteza și cu coeficientul de amortizare c_1

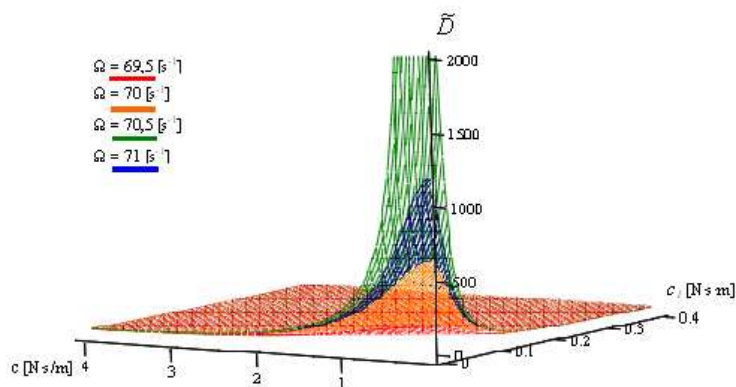


Fig. 6.41 Variația amplitudinii deplasării cu coeficienții de amortizare c și c_1

Influența vitezei unghiulare și a coeficientului de amortizare pentru deplasare c asupra amplitudinii raportate \tilde{D} este ilustrată în figura 6.39.

Influența vitezei unghiulare și a coeficientului de amortizare pentru rotație c_1 asupra amplitudinii raportate \tilde{D} este ilustrată în figura 6.40.

Influența coeficienților de amortizare pentru deplasare c , respectiv pentru rotație c_1 , asupra amplitudinii raportate \tilde{D} este ilustrată în figura 6.41.

6.3. Concluzii

Din analiza figurilor 6.22, 6.27, 6.32, 6.37, se constată că, în absența ambelor tipuri de amortizări, toate amplitudinile raportate \tilde{A} , \tilde{B} , \tilde{C} și \tilde{D} admit o asimptotă verticală corespunzătoare turației critice. În cazul unor valori nenule ale coeficientului de amortizare pentru rotație c_1 și al unor valori moderate, dar nenule ale coeficientului de amortizare pentru deplasare c , amplitudinea raportată prezintă un maxim în apropiere de turația critică.

Din analiza figurii 6.22 se constată că, în cazul amplitudinii raportate \tilde{A} , pentru valori mai mari ale coeficientului de amortizare pentru deplasare c , curbele prezintă două maxime locale și un minim. Curbele tind să se aplatizeze pentru valori crescătoare ale coeficientului de amortizare pentru rotație c_1 .

Din analiza figurilor 6.23, 6.28, 6.33, 6.38, se constată că defazajul deplasărilor (\tilde{A} , \tilde{B}), în cazul dezechilibrului static și al deplasării unghiulare (\tilde{C}), în cazul dezechilibrului de cuplu, este influențat în măsură relativ mare de coeficientul de amortizare pentru deplasare c . În schimb, defazajul deplasării unghiulare (\tilde{D}) în cazul dezechilibrului de cuplu este influențat mai mult de către coeficientul de amortizare pentru rotație c_1 .

Rotorul dezechilibrat este supus unor forțe dinamice intense, care pot produce o uzură rapidă, cu atât mai mare cu cât rotorul funcționează mai aproape de o viteză unghiulară critică.

S-au prezentat diagramele 3D care ilustrează sintetic variația parametrilor ce definesc rotorul în funcție de coeficienții de amortizare pentru deplasare c , respectiv pentru rotație c_1 și de turație.

7. MĂSURĂTORI EXPERIMENTALE

Acest capitol este dedicat unor cercetări experimentale originale, ce urmăresc determinarea coeficientului de amortizare pentru deplasare laterală, în cazul a doi rotorii în consolă. Sunt descrise instalația experimentală și lanțul de măsură cu componentele sale. Sunt prezentate rezultatele măsurătorilor efectuate în aer și apă. Sunt descrise și aplicate metode de corecție a datelor măsurate.

7.1. Generalități privind testele experimentale

Aspectele teoretice prezentate în capitolele anterioare pentru dezvoltarea problematicii studiate au condus la necesitatea obținerii unor informații experimentale proprii care să furnizeze valori numerice concrete pentru unii dintre parametrii analizați. În continuare sunt prezentate informații cu privire la lanțul de achiziție și prelucrare a datelor precum și la condițiile experimentelor efectuate.

Sunt prezentate rezultatele măsurătorilor și concluziile la care conduc acestea.

7.2. Instalația experimentală

Instalația experimentală (fig. 7.1) este compusă dintr-un suport cu rol de susținere pe care este montat un sistem de antrenare a arborelui, constând într-un motor electric. Montajul în consolă al arborelui este realizat cu ajutorul a doi rulmenți, care împiedică atât jocul lateral, cât și pe cel unghiular în articulație.

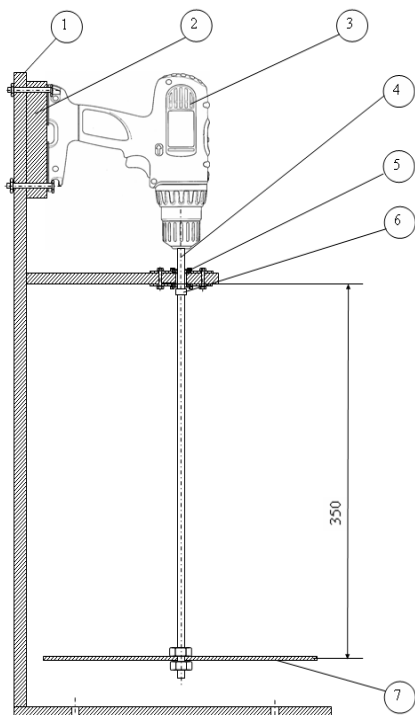


Fig. 7.1 Instalația experimentală:
 1- suportul instalatiei,
 2- distanțier, 3- sistemul de antrenare,
 4- arborele, 5- rulmenți, 6- bucsă,
 7- discul.

Caracteristici generale

Date generale	Discul 1	Discul 2
Masa [kg]	$M = 0,627$	$M = 0,727$
momentele de inerție mecanice [kgm ²]	$J_d = 1,8975 \cdot 10^{-3}$ $J_p = 3,7947 \cdot 10^{-3}$	$J_d = 3,0564 \cdot 10^{-3}$ $J_p = 6,089 \cdot 10^{-3}$

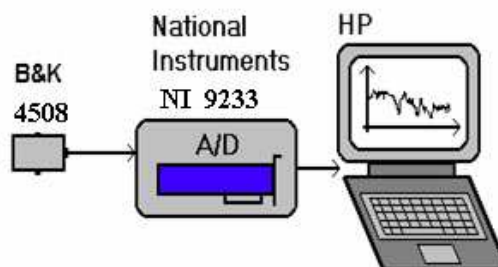


Fig. 7.3 Schema bloc a lanțului de măsură



Fig. 7.4 Accelerometrul piezoelectric, tip 4508



Fig. 7.5 Placă de achiziție tip NI 9233

7.3. Lanțul de măsură

În figura 7.3 este prezentată schema bloc a lanțului de măsură utilizat la determinările experimentale de vibrații. În continuare vor fi prezentate aspectele și caracteristicile tehnice importante ale fiecărui element prezent în lanțul de măsură.

Lanțul de măsură utilizat cuprinde următoarele elemente:

- patru accelerometre piezoelectrice tip 4508 – Brüel & Kjær (fig. 7.4);
- placa de achiziție de date Național Instruments - NI 9233 (fig. 7.5);
- calculator laptop cu soft de achiziție și prelucrare date LabView.



Fig. 7.6 Amplasarea celor patru accelerometre pe instalatia experimentală

7.4. Corecția datelor experimentale

Datele măsurate sunt în general afectate de diferitele tipuri de erori, datorate unor cauze precum:

- etalonarea aparatelor (senzori, placă de achiziție, etc);
- metodelor de prelucrare (integrală numerică, trunchere a numerelor cu zecimale).

7.4.1. Corecția de gradul „0”

Corecția de gradul „0” vizează re poziționarea datelor măsurate în raport cu linia de zero.

Datele măsurate sunt înlocuite cu cele corectate:

$$y_{mas} \leftarrow y_{cor} = y_{mas} - a. \quad (7.1)$$

Valoarea parametrului de corecție a se determină din condiția de minimizare a erorii pătratice medii:

$$\varepsilon(a) = \sum_{i=1}^n (y_i - a)^2. \quad (7.2)$$

Această condiție echivalează cu anularea derivatei $\frac{d\varepsilon}{da} = 0$;

Rezultă parametrul de corecție:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n}. \quad (7.4)$$

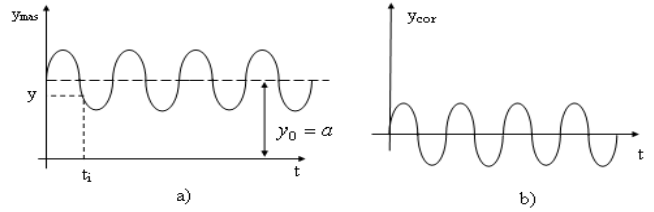


Fig. 7.7 Corecția de gradul „0”

7.4.2. Corecția de gradul „1”

Corecția de gradul „1” vizează „orizontalizarea” liniei de mijloc.

Datele măsurate sunt înlocuite cu cele corectate:

$$y_{mas} \leftarrow y_{cor} = y_{mas} - at - b. \quad (7.5)$$

Valorile parametrilor de corecție a și b se determină din condiția de minimizare a erorii pătratice medii:

$$\varepsilon(a,b) = \sum_{i=1}^n (y_i - at_i - b)^2 = \min; \quad (7.6)$$

Această condiție echivalează cu anularea derivatelor parțiale $\frac{\partial \varepsilon}{\partial a} = 0, \frac{\partial \varepsilon}{\partial b} = 0$.

Rezultă parametrii de corecție:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n t_i \sum_{i=1}^n y_i - n \sum_{i=1}^n t_i y_i}{\left[\left(\sum_{i=1}^n t_i \right)^2 - n \sum_{i=1}^n t_i^2 \right]}, \quad b = \frac{\sum_{i=1}^n t_i \sum_{i=1}^n t_i y_i - \sum_{i=1}^n t_i^2 \sum_{i=1}^n y_i}{\left[\left(\sum_{i=1}^n t_i \right)^2 - n \sum_{i=1}^n t_i^2 \right]}. \quad (7.8)$$

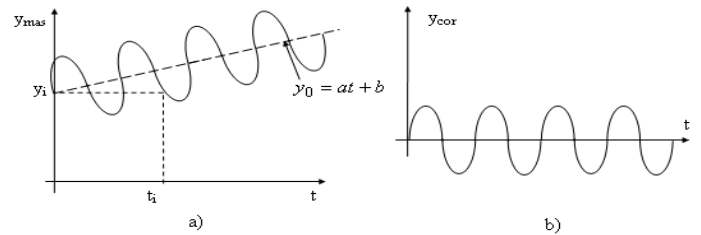


Fig. 7.8 Corecția de gradul „1”

7.5. Măsurători

Spectrele de amplitudine pentru viteze și accelerații sunt prezentate în anexele 2 și 3.

7.5.1. Măsurători în AER

În tabelele 7.2-7.5, și în figurile 7.9-7.12 sunt prezentate rezultatele măsurătorilor. Accelerometrele folosite la determinările experimentale sunt notate cu A0, A1, A2 respectiv A3.

Tabelul 7.2

DISC 1					
Frecvența [Hz]	8	9	10	11	14
Viteza unghiulară ω [s ⁻¹]	50	57	63	69	88
Deplasarea [m]					
A0	$2,37472 \cdot 10^{-5}$	$1,87632 \cdot 10^{-5}$	$3,55 \cdot 10^{-5}$	$7,33 \cdot 10^{-5}$	$3,88 \cdot 10^{-5}$
A1	$5,541 \cdot 10^{-5}$	$5,62895 \cdot 10^{-5}$	$1,22 \cdot 10^{-4}$	$1,09 \cdot 10^{-4}$	$6,98 \cdot 10^{-5}$
A2	$3,95786 \cdot 10^{-5}$	$3,75264 \cdot 10^{-5}$	$6,97 \cdot 10^{-5}$	$1,13 \cdot 10^{-4}$	$6,2 \cdot 10^{-5}$
A3	$3,16629 \cdot 10^{-5}$	$2,3454 \cdot 10^{-5}$	$2,53 \cdot 10^{-5}$	$1,17 \cdot 10^{-4}$	$5,69 \cdot 10^{-5}$
Viteza [m/s]					
A0	0,00125	0,0013	0,0022	0,0052	0,0035
A1	0,0027	0,00375	0,0075	0,006	0,0062
A2	0,002	0,0022	0,0044	0,0087	0,0052
A3	0,0015	0,0015	0,0017	0,0077	0,005
Accelerația [m/s ²]					
A0	0,06	0,06	0,14	0,35	0,3
A1	0,14	0,18	0,48	0,52	0,54
A2	0,1	0,12	0,275	0,54	0,48
A3	0,08	0,075	0,1	0,56	0,44

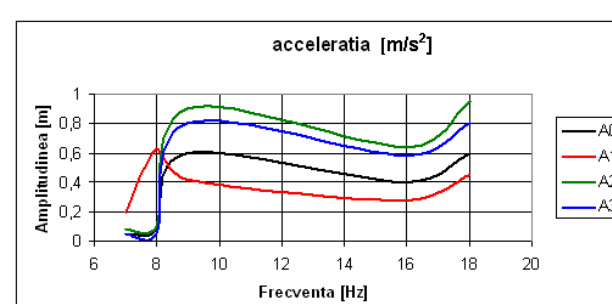
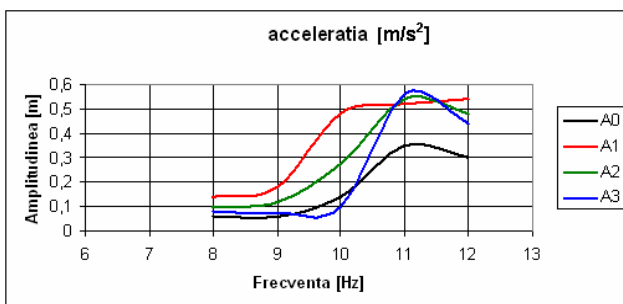
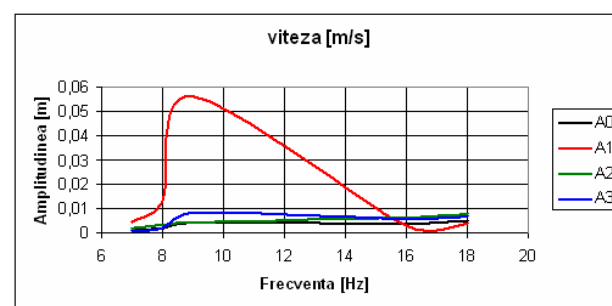
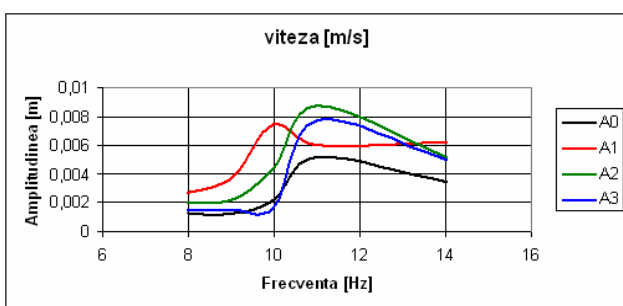
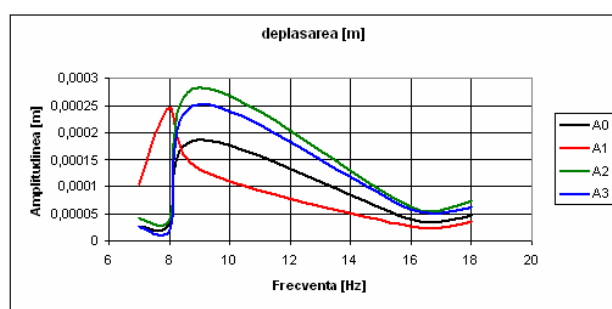
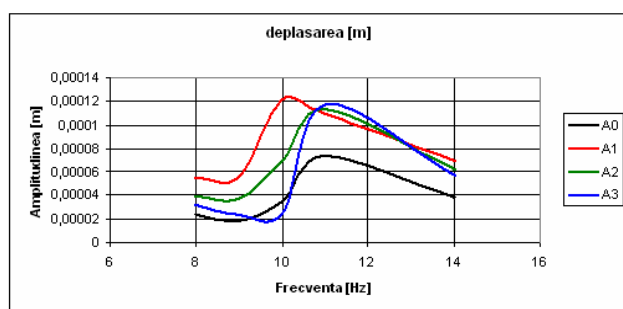


Fig. 7.9 Diagramele amplitudinilor componentelor dominante ale deplasării, vitezei respectiv accelerației obținute în aer pentru discul 1

Fig. 7.10 Diagramele amplitudinilor componentelor dominante ale deplasării, vitezei respectiv accelerației obținute în aer pentru discul 2

Tabelul 7.3

DISC 2					
Frecvența [Hz]	7	8	9	16	18
Vit. unghiulară ω [s ⁻¹]	44	50	57	101	113
Deplasarea [m]					
A0	$2,5847 \cdot 10^{-5}$	$3,1662 \cdot 10^{-5}$	$1,876 \cdot 10^{-4}$	$3,9579 \cdot 10^{-5}$	$4,690 \cdot 10^{-5}$
A1	$1,0338 \cdot 10^{-4}$	$2,4538 \cdot 10^{-4}$	$1,313 \cdot 10^{-4}$	$2,7705 \cdot 10^{-5}$	$3,518 \cdot 10^{-5}$
A2	$4,1355 \cdot 10^{-5}$	$3,9578 \cdot 10^{-5}$	$2,814 \cdot 10^{-4}$	$6,3326 \cdot 10^{-5}$	$7,427 \cdot 10^{-5}$
A3	$2,5847 \cdot 10^{-5}$	$1,9789 \cdot 10^{-5}$	$2,501 \cdot 10^{-4}$	$5,7389 \cdot 10^{-5}$	$6,254 \cdot 10^{-5}$
Viteza [m/s]					
A0	0,0012	0,002	0,0046	0,004	0,005
A1	0,0046	0,013	0,056	0,003	0,004
A2	0,0018	0,0033	0,0044	0,0065	0,008
A3	0,0012	0,0018	0,0082	0,006	0,007
Accelerația [m/s ²]					
A0	0,05	0,08	0,6	0,4	0,6
A1	0,2	0,62	0,42	0,28	0,45
A2	0,08	0,1	0,9	0,64	0,95
A3	0,05	0,05	0,8	0,58	0,8

7.5.2. Măsurători în APĂ

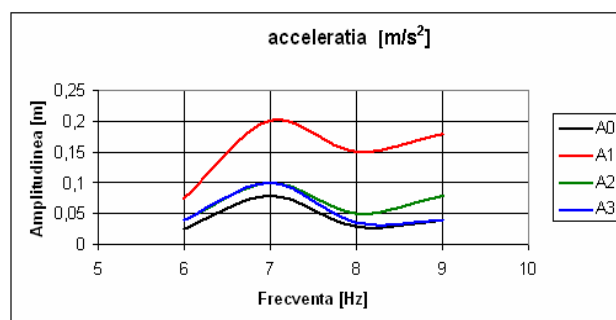
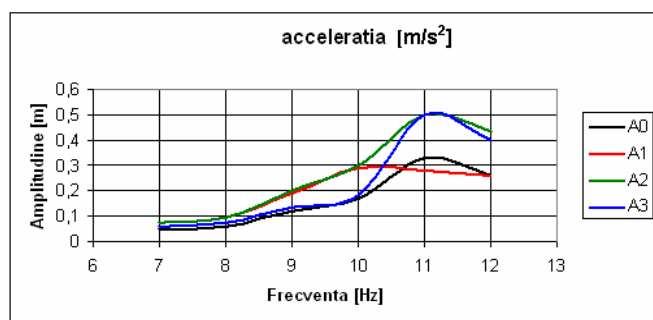
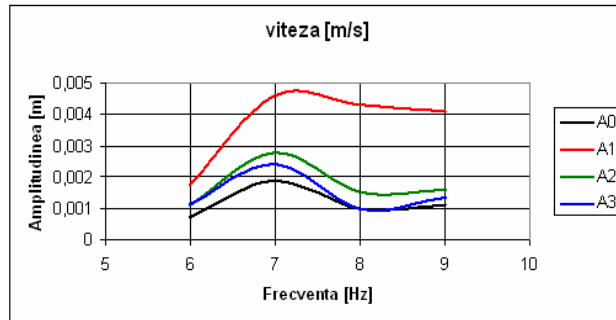
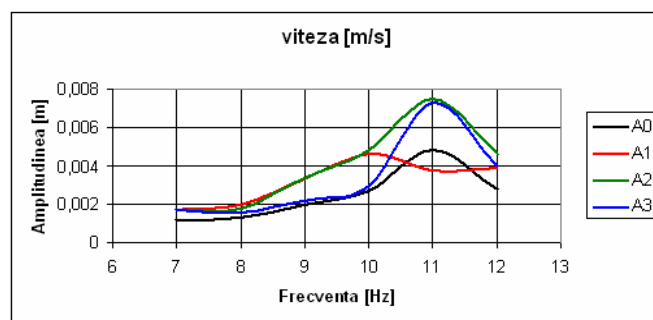
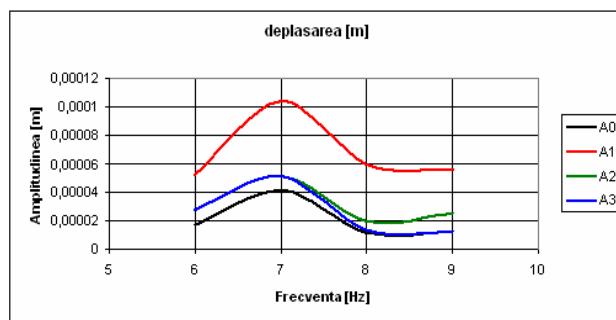
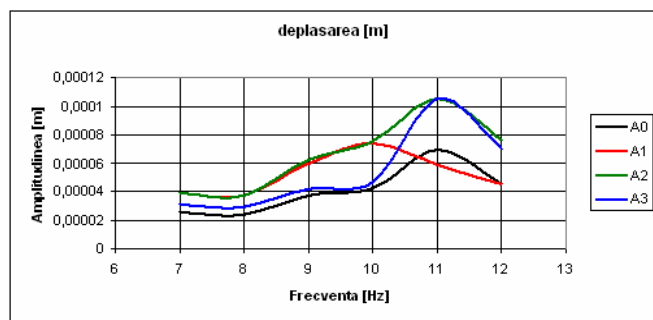


Fig. 7.11 Diagramele amplitudinilor componentelor dominante ale deplasării, vitezei respectiv accelerației obținute în apă pentru discul 1

Fig. 7.12 Diagramele amplitudinilor componentelor dominante ale deplasării, vitezei respectiv accelerației obținute în apă pentru discul 2

Tabelul 7.4

DISC 1						
Frecvența [Hz]	7	8	9	10	11	12
Vit. unghiulară ω [s^{-1}]	44	50	57	63	69	75
Deplasarea [m]						
A0	$2,5847 \cdot 10^{-5}$	$2,3747 \cdot 10^{-5}$	$3,752 \cdot 10^{-5}$	$4,306 \cdot 10^{-5}$	$6,908 \cdot 10^{-5}$	$4,571 \cdot 10^{-5}$
A1	$3,8770 \cdot 10^{-5}$	$3,7599 \cdot 10^{-5}$	$5,941 \cdot 10^{-5}$	$7,345 \cdot 10^{-5}$	$5,861 \cdot 10^{-5}$	$4,573 \cdot 10^{-5}$
A2	$3,8770 \cdot 10^{-5}$	$3,7599 \cdot 10^{-5}$	$6,254 \cdot 10^{-5}$	$7,599 \cdot 10^{-5}$	$1,046 \cdot 10^{-4}$	$7,651 \cdot 10^{-5}$
A3	$3,1016 \cdot 10^{-5}$	$2,9683 \cdot 10^{-5}$	$4,221 \cdot 10^{-5}$	$4,686 \cdot 10^{-5}$	$1,047 \cdot 10^{-4}$	$7,036 \cdot 10^{-5}$
Viteza [m/s]						
A0	0,0012	0,0013	0,002	0,0027	0,0048	0,0028
A1	0,00175	0,002	0,0033	0,0046	0,0038	0,0039
A2	0,00175	0,0018	0,00335	0,0048	0,0075	0,0046
A3	0,0017	0,0016	0,0022	0,003	0,00725	0,004
Accelerația [m/s^2]						
A0	0,05	0,06	0,12	0,17	0,33	0,26
A1	0,075	0,095	0,19	0,29	0,28	0,26
A2	0,075	0,095	0,2	0,3	0,5	0,435
A3	0,06	0,075	0,135	0,185	0,5	0,4

Tabelul 7.5

DISC 2				
Frecvența[Hz]	6	7	8	9
Viteză unghiulară ω [s^{-1}]	38	44	50	57
Deplasarea [m]				
A0	$1,75905 \cdot 10^{-5}$	$4,13556 \cdot 10^{-5}$	$1,1874 \cdot 10^{-5}$	$1,2509 \cdot 10^{-5}$
A1	$5,27714 \cdot 10^{-5}$	$1,03389 \cdot 10^{-4}$	$5,9368 \cdot 10^{-5}$	$5,629 \cdot 10^{-5}$
A2	$2,81448 \cdot 10^{-5}$	$5,16945 \cdot 10^{-5}$	$1,9789 \cdot 10^{-5}$	$2,5018 \cdot 10^{-5}$
A3	$2,81448 \cdot 10^{-5}$	$5,16945 \cdot 10^{-5}$	$1,3853 \cdot 10^{-5}$	$1,2509 \cdot 10^{-5}$
Viteza [m/s]				
A0	0,00075	0,0019	0,001	0,0011
A1	0,00175	0,0046	0,0043	0,0041
A2	0,0011	0,0028	0,0015	0,0016
A3	0,00115	0,0024	0,001	0,00135
Accelerația [m/s^2]				
A0	0,025	0,08	0,03	0,04
A1	0,075	0,2	0,15	0,18
A2	0,04	0,1	0,05	0,08
A3	0,04	0,1	0,035	0,04

7.6. Determinarea experimentală a excentricității

Se adoptă ipoteza că accelerațiile din lagăre sunt proporționale cu accelerația centrului de masă al discului,

$$A_x(\Omega) = k \cdot A(\Omega), \quad (7.9)$$

în care s-au notat:

A_x - amplitudinea deplasării în punctul de măsură de pe lagăr;

A - amplitudinea deplasării centrului de masă al discului excentric

k - un coeficient de proporționalitate.

Se introduce parametrul

$$\chi = k \cdot e_C, \quad (7.11)$$

a căruia valoare se obține minimizând abaterea pătratică medie

$$\varepsilon(\chi) = \sum_{i=1}^n [A_i - \chi \cdot a_i]^2 \cdot p_i, \quad (7.14)$$

Determinările minimumului funcției $\varepsilon(\chi)$ echivalează cu anularea derivatei acesteia, $\frac{d\varepsilon}{d\chi} = 0$,

Rezolvând această ecuație se obține:

$$\chi = \frac{\sum_{i=1}^n a_i \cdot A_i \cdot p_i}{\sum_{i=1}^n a_i^2 \cdot p_i}. \quad (7.17)$$

S-a considerat că mișcarea în aer are loc cu amortizare neglijabilă. În consecință valorile lui a_i se determină din formula 7.10, în care se înlocuiesc $c = 0$ și $c_1 = 0$. Valorile A_i rezultă din spectrele mărimilor măsurate și corectate.

S-au obținut valorile din tabelul 7.6.

Tabelul 7.6

Valori experimentale

Discuri	Discul 1	Discul 2
χ	$1,02 \cdot 10^{-5}$	$6,21 \cdot 10^{-5}$

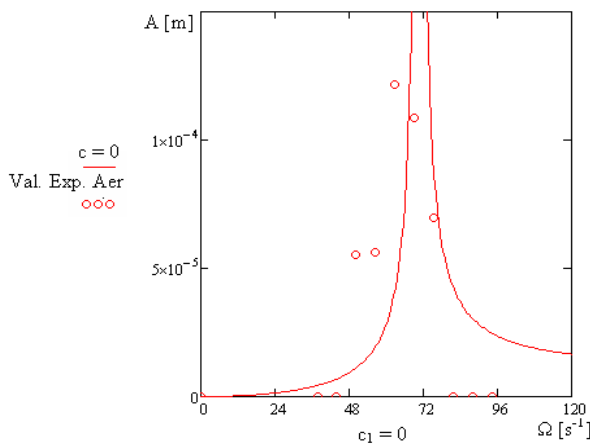


Fig. 7.13 Curba teoretică și valorile experimentale pentru discul 1

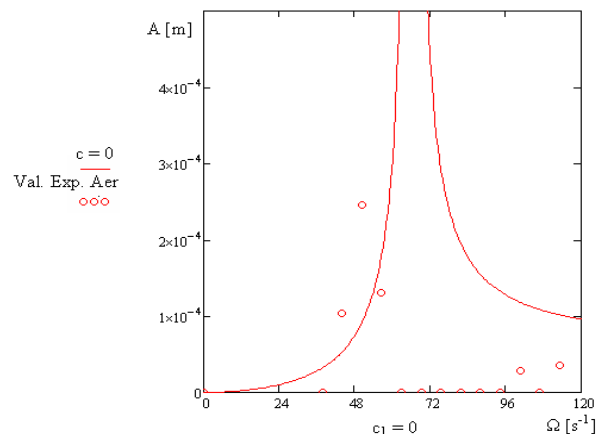


Fig. 7.14 Curba teoretică și valorile experimentale pentru discul 2

7.7. Determinarea experimentală a coeficientului de amortizare pentru deplasare c

În continuare, se neglijează coeficientul de amortizare c_1 . Se caută valoarea lui c , pentru care curba $A_x^c(\Omega)$ se apropie cel mai mult de valorile măsurate

$$A_i^c = A_x(\Omega_i, c), \quad (i = 1, \dots, n). \quad (7.18)$$

În consecință, se minimizează abaterea

$$\varepsilon(c) = \sum_{i=1}^n [A_i^c - \chi \cdot a_i(c)]^2 \cdot q_i, \quad (7.19)$$

în care s-au notat

$$a_i(c) = a(\Omega_i, c) \quad (7.20)$$

și în care q_i reprezintă ponderile.

Rezultă că parametrul c se determină din ecuația:

$$\sum_{i=1}^n [A_i^c - \chi \cdot a_i(c)] \frac{da_i(c)}{dc} \cdot q_i = 0. \quad (7.21)$$

Rezolvând numeric această ecuație neliniară în c , s-au obținut valorile din tabelul 7.7.

Tabelul 7.7

Valori experimentale		
Discuri	Discul 1	Discul 2
c	3,08	15,06

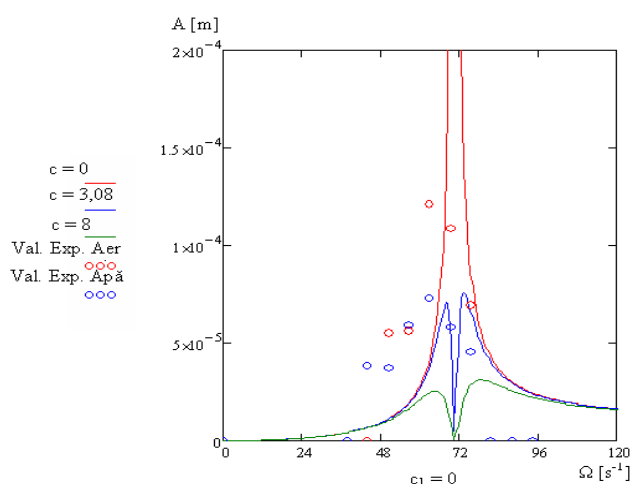


Fig. 7.15 Curbele teoretice și valorile experimentale pentru discul 1

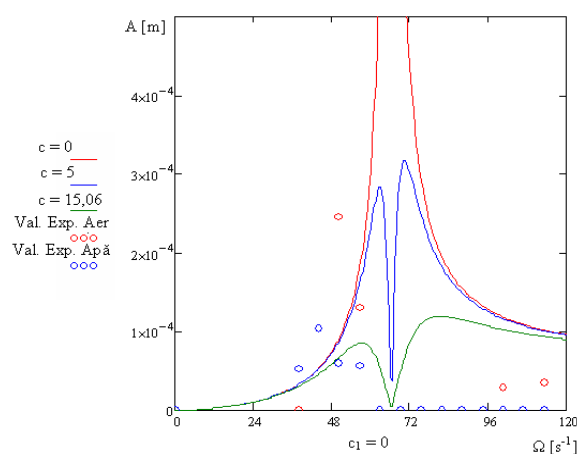


Fig. 7.16 Curbele teoretice și valorile experimentale pentru discul 2

7.8. Concluzii

În capitolul de față s-a prezentat o metodă originală analitico-experimentală de determinare a coeficientului de amortizare pentru deplasare c , pentru rotorul scufundat în lichid vâcos.

Determinările au fost realizate cu ajutorul unei instalații experimentale realizată de autor. Pe baza măsurătorilor efectuate cu această instalație s-au determinat valorile coeficientului de amortizare pentru deplasare c , în cazul a două discuri montate pe arborele în consolă și scufundate în apă.

Din analiza semnalelor măsurate și a spectrelor acestora, se observă că amplitudinile oscilațiilor în aer sunt superioare celor efectuate în lichid.

Determinarea coeficientului de amortizare pe baza valorilor măsurate necesită aplicarea unor metode de corecție uzuale în interpretarea măsurătorilor.

Cea mai mare valoare a coeficientului de amortizare pentru deplasare c determinată este obținută în cazul discului 2, ceea ce se explică prin dimensiunile mai mari și forma mai complicată a acestuia.

8. CONSIDERAȚII FINALE

În acest capitol sunt trecute în revistă principalele concluzii care au rezultat în urma studiului teoretic și experimental realizat, sunt prezentate contribuțiile originale aduse de lucrare și sunt descrise câteva direcții în care pot fi continuate și extinse cercetările de față.

8.1. Concluzii finale

La modelarea cu elemente finite a sistemului rotor-rezeme, arborele este discretizat utilizând un număr mic de elemente. Modelarea cu elemente finite conduce la scrierea sistemului de ecuații dinamice generale, în care se pot încorpora și alte efecte, cum sunt:

- elasticitatea suportului reazemelor;
- amortizarea din lagăre;
- efectul încărcării axiale;
- deformațiile de forfecare.

Discurile, considerate rigide, intervin prin parametri concentrați: masă și momentele de inerție masice.

Pentru analiza răspunsului unui rotor, este important să se determine vectorii dezechilibrului masic și cei ai dezechilibrului datorat montării înclinate a discului. Un disc montat oblic pe arbore introduce momente giroscopice active, care fac ca forțele din disc să-și schimbe intensitatea periodic și, deci, să genereze fenomene oscilatorii.

Diagramele Campbell din capitolul 5 pun în evidență două tipuri de regimuri:

- cu mișcare de precesie directă a discului (precesia are loc în sensul de rotație a arborelui) – curbele ω_2, ω_4 , din diagramele Campbell ;
- cu mișcare de precesie inversă a discului (precesia are loc în sens opus sensului de rotație a arborelui) – curbele $-\omega_1, -\omega_3$, din diagramele Campbell.

În funcție de configurația sistemului (mase, dimensiuni, așezare a discului), este posibil ca unele dintre dreptele $\Omega = 0,5\omega$, $\Omega = \omega$, $\Omega = 1,5\omega$, $\Omega = 2\omega$ să nu intersecteze toate cele patru curbe $-\omega_1, \omega_2, -\omega_3, \omega_4$.

În capitolul 6, din analiza figurilor 6.22, 6.27, 6.32, 6.37, se constată că, în absența ambelor tipuri de amortizări, toate amplitudinile raportate \tilde{A} , \tilde{B} , \tilde{C} și \tilde{D} admit o asimptotă verticală corespunzătoare turației critice. În cazul unor valori nenule ale coeficientului de amortizare pentru rotație c_1 și al unor valori moderate, dar nenule ale coeficientului de amortizare pentru deplasare c , amplitudinea raportată prezintă un maxim în apropiere de turația critică.

Din analiza figurii 6.22 se constată că, în cazul amplitudinii raportate \tilde{A} , pentru valori mai mari ale coeficientului de amortizare pentru deplasare c , curbele prezintă două maxime locale și un minim.

Curbele tind să se aplatizeze pentru valori crescătoare ale coeficientului de amortizare pentru rotație c_1 .

Din analiza figurilor 6.23, 6.28, 6.33, 6.38, se constată că defazajul deplasărilor (\tilde{A} , \tilde{B}), în cazul dezechilibrului static și al deplasării unghiulare (\tilde{C}), în cazul dezechilibrului de cuplu, este influențat în măsură relativ mare de coeficientul de amortizare pentru deplasare c . În schimb, defazajul deplasării unghiulare (\tilde{D}) în cazul dezechilibrului de cuplu este influențat mai mult de către coeficientul de amortizare pentru rotație c_1 .

Rotorul dezechilibrat este supus unor forțe dinamice intense, care pot produce o uzură rapidă, cu atât mai mare cu cât rotorul funcționează mai aproape de o viteză unghiulară critică.

Pe baza măsurărilor efectuate cu această instalație s-au determinat valorile coeficientului de amortizare pentru deplasare c , în cazul a două discuri montate pe arborele în consolă și scufundate în apă.

Din analiza semnalelor măsurate și a spectrelor acestora, se observă că amplitudinile oscilațiilor în aer sunt superioare celor efectuate în lichid.

Determinarea coeficientului de amortizare pentru deplasare c , pe baza valorilor măsurate necesită aplicarea unor metode de corecție uzuale în interpretarea măsurătorilor.

Cea mai mare valoare a coeficientului de amortizare pentru deplasare c este obținută în cazul discului 2, ceea ce se explică prin dimensiunile mai mari și forma mai complicată a acestuia.

8.2. Contribuții originale

Studiul teoretic și experimental referitor la vibrațiile rotorilor prezentat în această lucrare a dus la obținerea unor rezultate utile pentru mai buna cunoaștere a comportării dinamice a rotorilor. O parte dintre elementele acestui studiu constituie contribuții originale ale autorului:

1. studiul influenței diferiților parametri ce definesc rotorul, și anume
 - configurația sistemului arbore rezemat la capete, respectiv arbore în consolă;
 - poziția discului, în cazul arborelui rezemat la capete;
 - forma și dimensiunile discului, în cazul arborelui în consolă;
 - valoarea turației arborelui;
 - valorile celor doi coeficienți de amortizare, pentru deplasare c , și pentru rotație c_1 .
2. trasarea unor diagrame 3D care ilustrează sintetic variația acestor parametri în funcție de amortizarea pentru deplasare c , respectiv pentru rotație c_1 , precum și de turație;
3. dezvoltarea unei metode analitico-experimentale de determinare a coeficientului de amortizare pentru deplasare c a rotorului scufundat într-un fluid vâscos;
4. realizarea unei instalații experimentale pentru aplicarea practică a metodei;
5. determinarea efectivă pe baza metodei dezvoltate și prin efectuarea de experimente cu instalația menționată, a valorii coeficientului de amortizare pentru deplasare c , în cazul a două discuri diferite, montate pe arborele în consolă, scufundat în lichid (apă).

8.3. Direcții de dezvoltare

Aceste cercetări, după cum s-a precizat anterior, pot constitui punctul de plecare al unor dezvoltări ca de exemplu:

1. realizarea unui stand de măsură perfecționat în sensul:
 - a) realizării unei incinte parțial închise în partea superioară, unde să poată fi introdus rotorul;
 - b) extinderii capacității de experimentare pe un domeniu mai larg de variație a turației;
2. realizarea unui set extins de măsurători, astfel încât determinările să poată fi realizate cu o precizie superioară;
3. realizarea unui alt stand, care să permită analiza influenței amortizării asupra vibrațiilor rotorului, în configurația cu arborele rezemat la ambele capete;
4. determinarea, pe baza metodei dezvoltate și prin efectuarea de noi experimente, a valorii coeficientului de amortizare pentru deplasare c , în cazul altor lichide cu vâscozitate mai mare;
5. extinderea metodei analitico-experimentale, în scopul de a determina și coeficientul de amortizare pentru rotație c_1 ;
6. analiza influenței elasticității și amortizării din lagăre;

BIBLIOGRAFIE SELECTIVĂ

- [7]. **Bigret, R.**, *Vibration des machines tournantes et des structures*, Techniques et Documentation, 1980.
- [9]. **Carp - Ciocărdia, D. C.**, *Contribuții la studiul vibrațiilor arborelui principal și influenței lor asupra proceselor de prelucrare prin așchiere*, Teza de doctorat, U.P.B, 1998.
- [14]. **Costache, A.**, *Stadiul actual al cercetărilor privind comportarea dinamică a rotorilor*, Referat de doctorat Nr.1, U. P.B, 55 pag, 2009.

- [15]. **Costache, A.**, *Metode moderne în cercetarea dinamicii*, Referat de doctorat Nr.2, U. P. B, 41 pag, 2009.
- [16]. **Costache, A.**, *Aspecte privind dinamica rotorilor*, Referat de doctorat Nr.3, U. P.B, 136 pag, 2009.
- [17]. **Costache, A., Băran, N.**, *Computation method for establishing the contour of a new type of profiled rotor*, U.P.B - Scientific Bulletin – Series D: Mechanical Engineering, vol 70, Nr 3, ISSN 1454-2358, Ed. Politehnica Press, pag.93-102, 2008.
- [22]. **Föppl, A.**, *Das problem der Laval'schen turbinewelle*, *Civilingenieur*, 41, p.332-342, 1985.
- [41]. **Jeffcott, N.**, *Lateral Vibration of Loaded Shafts in the Neighborhood a Whirling Spedd-The Effect of Want Balance*, *Philosophical Magazine*, series 6, vol.37, p.621-636, 1983.
- [46]. **Krämer, E.**, *Dynamics of Rotors and Foundations*, Springer Verlag, Berlin, 1993.
- [49]. **Lalanne, M., Ferraris, G.**, *Rotordynamics Prediction in Engineering*, John Wiley and Sons, Chichester, England, 1990.
- [58]. **Magheți, I., Negrea, A., Craifaleanu, A.**, *Modern methods upon vibration monitoring of machines - cap. 6 din Topics in applied mechanics, vol. III*, Ed. Academiei Române, București, 2006.
- [65]. **Murgulescu, S.**, *Monitorizarea vibrațiilor la rotor*, Ed. Bren, București, 2001.
- [65]. **Murgulescu, S., Craifaleanu, A.**, *Mișcarea rotorului acționat de două forțe rotitoare*, Al VII-lea Simpozion Național de Utilaje pentru Construcții, Vol 1: Cercetări fundamentale și aplicative în domeniul ingineriei mecanice, București, 4-6 octombrie 2001, pag. 130-135, ISBN 973-8132-15-0.
- [75]. **Pavel, Cr.**, *Un mod de abordare pentru analiza dinamică a arborilor cu turație mare*, Articol în Supliment al Buletinului Științific al Universității “Transilvania” din Brașov, secția Mecanică, 1997, pag. 101-104
- [77]. **Pavel, Cr., Legendi, A.**, *Unele considerații asupra turațiilor critice ale sistemelor continue arbore-disc*, Comunicare la Sesiunea de Comunicări Științifice, Facultatea de Inginerie, Hunedoara, 1997, pag. 919-922, vol. IV Mecanică. Utilaj tehnologic.
- [87]. **Radeș, M.**, *Analiza modală a rotorilor elastici în lagăre cu alunecare*, Conferința națională de dinamica mașinilor, Brașov, 1994, în Buletinul conferinței, supliment al Buletinului Științific al Universității TRANSILVANIA, Brașov, 1994, vol.I, p.17-23.
- [89]. **Rădoi, M., Deciu, E., Voiculescu, D.**, *Elemente de vibrații mecanice*, Ed. Tehnică, București, 1973.
- [91]. **Robertson, D.**, *The Vibration of Revolving Shafts*, *Phil. Mag.*, Series 7, vol.13, p.862, 1932.
- [100]. **Stodola, A.**, *Neuere beobachtungen über die kristischen umlaufyahlen von wallen*, *Schweizer. Bauzeitung*, vol.68, p.210-214, 1916.
- [101]. **Stroe, I., Carp – Ciocardia, D. C.** - *Models for the Study of Vibrations of Shafts*, *Mecanique Industrielle et Materiaux*, *Revue du GAMI*, numero 4, volume 46, pp.178-180, 1993.
- [102]. **Stroe, I.**, *On the Motion of Rotating Machinery in Non-Inertial Reference Frame*, *Mecanique Apliquee*, 39, 6, pp. 707-714, 1994.
- [103]. **Stroe, I., Carp –Ciocardia, D. C.**, *Asupra unor modele pentru studiul vibratiilor rotorilor*, *Studii si Cercetari de Mecanica Aplicata*, 53, 4, pp. 349-356, 1994.
- [105]. **Stroe, I.**, *Rotating Machinery in Non-Inertial Reference Frame*, *Progres recents des methodes de surveillance acoustiques et vibratoires*, *CETIM*, Senlis, France, oct. 27-29, pp. 39-45, 1992.
- [116]. **Voinea, R., Stroe, I.**, *Vibrations of Rotors Situated in Non-Inertial Reference Frame*, *Colloque “Vibration Chocs et Bruit”*, Lyon, France, *Mécanique-Matériaux-Electricité*, *Revue du GAMI*, numéro 446, 1992, pp. 58-60.
- [117]. **Voinea, R., Stroe, I.**, *Introducere în teoria sistemelor dinamice*, Editura Academiei Române, Bucuresti, 2000.