

ADMITERE LA STUDIILE DE MASTER

Proba orală / interviul de la examenul de admitere la programul de studii de master

Cercetarea, proiectarea și testarea sistemelor biotehnice (CPTSB)

(domeniul Inginerie Mecanică)

Proba orală se finalizează cu o singură notă, dar este structurată în două părți:

- Prima parte este interviul în care candidatul se prezintă, fiind vizate următoarele aspecte: studii absolvite, tematica proiectului de diplomă, loc de muncă, domenii de interes, motivație / determinare pentru a urma acest program de master;
- a doua parte a probei orale constă într-o discuție pe tematica de concurs ”*Elemente generale de metoda elementelor finite*”, al cărui cuprins este prezentat în continuare.

După prezentarea cuprinsului, tematica concursului de admitere este detaliată în continuare pe scurt, dar suficient pentru prezentarea la examen.

CUPRINS

1. Rolul și locul metodei elementelor finite în mecanica generală
2. Caracterul aproximativ al metodei elementelor finite. Principiul rezolvării aproximative
3. Noțiunea de model, modelare și discretizare în metoda elementelor finite. Tipuri de elemente finite
4. Clasificarea generală a structurilor în metoda elementelor finite
5. Sarcini exterioare pentru metoda elementelor finite
6. Deplasări în cadrul metodei elementelor finite
7. Sisteme de axe în metoda elementelor finite
8. Noțiunea de grad de libertate în metoda elementelor finite
9. Noțiuni elementare privind comportarea mecanică a materialelor
10. Algoritm general de rezolvare a unei probleme prin analiză structurală cu elemente finite

Tematica concursului de admitere

1. Rolul și locul metodei elementelor finite în mecanica generală

Domeniul mecanicii poate fi împărțit în trei părți importante:

Mecanica	- Teoretică
	- Aplicată
	- Numerică

Mecanica teoretică – se ocupă cu studiul legilor și a principiilor mecanice fundamentale.

Mecanica aplicată – se ocupă cu transferul cunoștințelor mecanicii teoretice la aplicațiile științifice și ingineresti, în special cu privire la construcția modelelor matematice ale fenomenelor fizice.

Mecanica numerică – rezolvă problemele specifice prin simulare, folosind metode numerice implementate pe calculatoare digitale.

Domeniile mecanicii numerice pot fi definite în funcție de scara fizică a concentrării atenției după cum urmează:

Mecanica numerică	- Nanomecanică și micromecanică	- Mecanica solidelor și structurilor - Mecanica fluidelor - Multifizică
	- Mecanica mediilor continue	
	- Mecanica sistemelor	

Nanomecanica se ocupă cu fenomene la nivel molecular și atomic al materiei. Micromecanica se ocupă cu nivelul cristalografic și granular al materiei.

Mecanica mediilor continue studiază corpurile la nivel macroscopic, folosind modele continue în care microstructura este omogenizată prin mediere fenomenologică.

Mecanica numerică a solidelor și structurilor a căpătat atribute de știință aplicată, în care mecanica numerică a structurilor pune accentul pe aplicațiile tehnologice la analiza și proiectarea structurilor.

Mecanica fluidelor se ocupă cu problemele ce presupun echilibrul și mișcarea lichidelor și gazelor.

Multifizica este un domeniu mai nou ce include sisteme mecanice care depășesc granițele clasice ale mecanicii solidelor și fluidelor, precum cazul interacțiunii fluidelor cu structurile metalice, problemele de schimbare de fază cum ar fi topirea gheții, solidificarea metalelor, etc.

Sistemele reprezintă obiecte mecanice naturale sau artificiale care au o funcționare distinctibilă (avioane, clădiri, mașini, utilaje, poduri, motoare, roboți, etc.).

Problemele de mecanică a mediilor continue pot fi clasificate, după cum se arată în continuare:

Probleme de mecanică a mediilor continue	Probleme de statică	Liniare
		Neliniare
	Probleme de dinamică	

În dinamică, dependența de timp este considerată explicită, deoarece calculul forțelor de inerție se face pe baza derivatelor în raport cu timpul.

În cazul problemelor de statică forțele de inerție sunt ignorate, timpul ne-intervenind în cazul acestor probleme.

Analiza statică liniară se ocupă cu probleme de statică în care “răspunsul” este liniar în sensul “cauză-efect”. De exemplu, dacă forța aplicată se dublează, deplasările și tensiunile interne din corpul studiat de asemenea se dublează.

O clasificare finală a analizei statice în mecanica numerică a solidelor și structurilor se bazează pe metode discrete prin care modelele matematice ale mediilor continue sunt discretizate în spațiu, apoi sunt convertite în modele discrete cu un număr finit de grade de libertate.

Metode de discretizare spațială	Metoda elementelor finite (MEF)
	Metoda elementelor de frontieră
	Metoda diferențelor finite
	Metoda volumelor finite
	Metoda spectrală
	Metoda rețelei libere

Cea mai folosită metodă, atât pentru probleme liniare cât și pentru cele neliniare, este metoda elementelor finite, care, reprezintă în momentul de față cel mai eficient instrument pentru calculul structurilor ingineresti, indiferent de formă și de material. Aplicarea ei în practică nu se poate face însă decât prin intermediul calculatoarelor electronice.

2. Caracterul aproximativ al metodei elementelor finite. Principiul rezolvării aproximative

Metoda elementelor finite este o metodă generală de rezolvare aproximativă a ecuațiilor diferențiale sau integrale ce descriu fenomenele sau sistemele fizice cu o infinitate de grade de libertate, împreună cu condițiile lor la limită, reducându-se la un sistem de ecuații algebrice, respectiv la un sistem cu număr finit de grade de libertate. Altfel spus, reprezintă o metodă ce transformă studiul unor domenii finite cu o infinitate de subdomenii în studiul aproximativ al aceluiași domenii finite dar cu un număr finit de subdomenii (elemente finite), pentru care se pot aplica scheme de calcul numeric cunoscute (Fig.1).

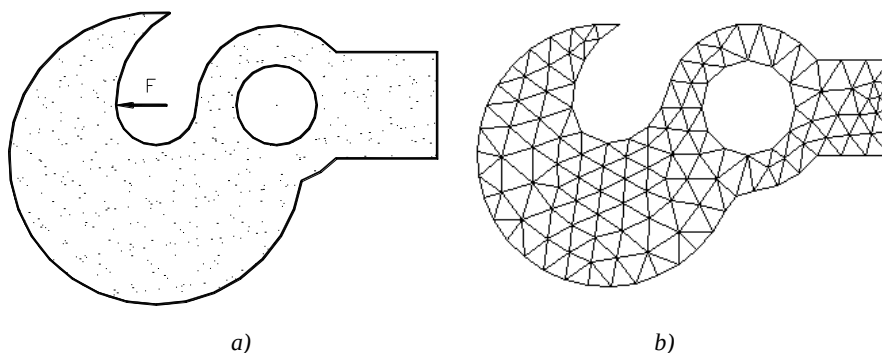


Fig.1. Transformările suferite de geometria unui cârlig de tracțiune în cazul modelării utilizând metoda elementelor finite
a – număr infinit de grade de libertate; b – număr finit de grade de libertate

Ca exemplu simplu, dar sugestiv în ceea ce privește utilizarea metodelor aproximative de calcul în locul calculului exact, este cel al calculului aproximativ pentru aria unui obiect circular, prezentat în cele ce urmează, împreună cu principalii pași necesari calculului aproximativ.

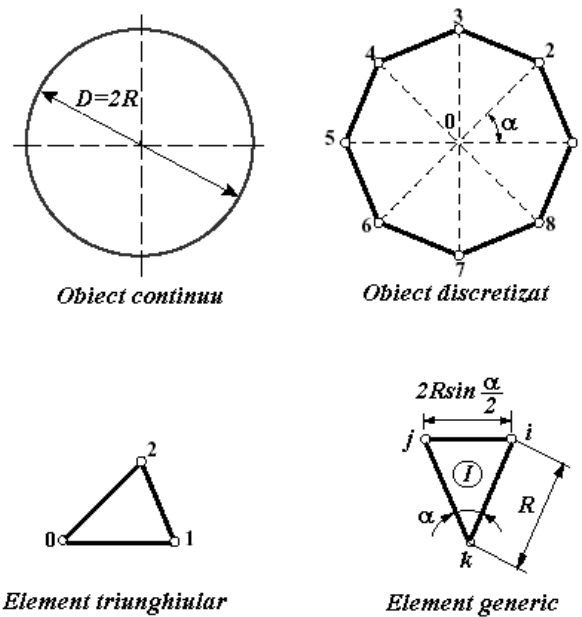


Fig.2. Calculul aproximativ al ariei unui obiect circular

• **Pas 1: Discretizare-Împărțirea obiectului (a discului) în „elemente finite”**

Constă în împărțirea discului într-un număr finit de elemente triunghiulare (8 elemente în cazul de față) (a se vedea figura 2).

• **Pas 2: Aproximarea locală a soluțiilor**

Constă în aproximarea ariei unui sector de disc ca fiind egală cu aria unui element finit triunghiular generat de trei noduri „i”, „j” și „k”.

Astfel, pentru un element finit I (Fig. 1.2), aria acestuia are expresia:

$$A_I = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot R \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot R \cdot \cos \frac{\alpha}{2} = R^2 \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \cdot R^2 \cdot \sin \alpha \quad (1)$$

în care, în funcție de numărul de elemente n , unghiul α are expresia:

$$\alpha = \frac{2\pi}{n} \quad (2)$$

Rezultă expresia ariei unui element triunghiular I :

$$A_I = \frac{1}{2} \cdot R^2 \cdot \sin \frac{2\pi}{n} \quad (3)$$

• **Pas 3: Asamblarea ecuațiilor elementelor**

Constă în însumarea ariilor tuturor elementelor pentru întregul domeniu studiat.

Aria totală, a întregului obiect discretizat, se calculează cu relația:

$$A_n = \sum_{I=1}^n A_I = \frac{1}{2} \cdot R^2 \cdot n \cdot \sin \frac{2\pi}{n} \quad (4)$$

• **Pas 4: Obținerea soluției**

Pentru cazul studiat, când $n=8$, rezultă:

$$A_8 = \sum_{I=1}^8 A_I = \frac{1}{2} \cdot R^2 \cdot 8 \cdot \sin \frac{2\pi}{8} = 2,8284271 \cdot R^2 \quad (5)$$

• **Pas 5: Analiza soluției**

Când $n=20$, rezultă: $A_{20} = \sum_{I=1}^{20} A_I = \frac{1}{2} \cdot R^2 \cdot 20 \cdot \sin \frac{2\pi}{20} = 3,09017 \cdot R^2$

Când $n=30$, rezultă: $A_{30} = \sum_{I=1}^{30} A_I = \frac{1}{2} \cdot R^2 \cdot 30 \cdot \sin \frac{2\pi}{30} = 3,1186754 \cdot R^2$

În cazul limită când $n \rightarrow \infty$, aria A devine:

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \cdot R^2 \cdot n \cdot \sin \frac{2\pi}{n} \right) \quad (6)$$

Dar, pentru un număr de elemente foarte mare, caz în care valoarea unghiului α este mică, pentru valori $|\alpha| < 0,182 \text{ rad} = 10,4^\circ$ se poate scrie aproximația:

$$\sin \alpha \cong \alpha - \frac{1}{6} \cdot \alpha^3 \approx \alpha \quad (7)$$

rezultă expresia ariei totale:

$$A = \frac{1}{2} \cdot R^2 \cdot n \cdot \frac{2\pi}{n} = \pi \cdot R^2 \quad (8)$$

care coincide, în acest caz, cu formula exactă a ariei cercului.

În funcție de numărul de elemente folosit pentru discretizare, în tabelul următor sunt prezentate valorile pentru aria calculată cu aproximație (A_n), eroarea absolută (e) a ariei calculate cu aproximație (A_n) față de valoarea exactă (teoretică) (A_t), respectiv valorile pentru eroarea relativă (e_r).

n	Aria aproximativă $A_n = \sum_{I=1}^n A_I = \frac{1}{2} R^2 n \sin \frac{2\pi}{n}$	Eroare absolută $e = A_t - A_n$	Eroare relativă $e_r = \frac{A_t - A_n}{A_t}$	Eroare relativă $e_r = \frac{A_t - A_n}{A_t} \cdot 100$ [%]
8	$2,8284271 \cdot R^2$	$0,3131 \cdot R^2$	0,0996	9,96
20	$3,09017 \cdot R^2$	$0,0514 \cdot R^2$	0,0163	1,63
30	$3,1186754 \cdot R^2$	$0,0229 \cdot R^2$	0,0072	0,72
$\rightarrow \infty$	$3,1415927 \cdot R^2$	0	0	0

Se observă și din tabel că cu cât numărul de elemente va fi mai mare, cu atât precizia soluțiilor va fi mai mare iar erorile de calcul vor fi mai mici, așa după cum este ilustrat calitativ și în figura 3. Cu alte cuvinte, soluția aproximativă converge către valoarea exactă pe măsură ce crește numărul de elemente folosite pentru discretizare.

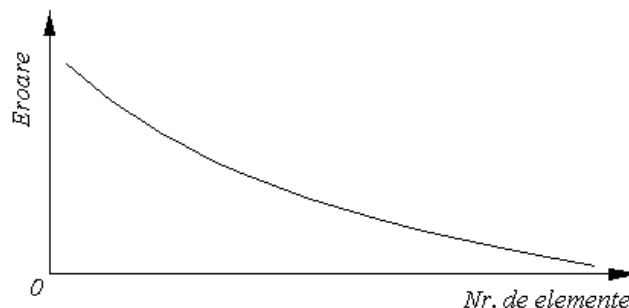


Fig.3. Variația erorilor de calcul aproximativ în funcție de numărul de elemente folosite pentru discretizare

Caracterul aproximativ al metodei elementelor finite este datorat faptului că geometria reală a obiectului studiat este întotdeauna înlocuită cu o rețea de elemente finite, care urmărește forma reală, dar nu o poate reda cu exactitate decât numai în cazul anumitor geometrii particulare, mărimile necunoscute ale problemei fiind calculate numai în nodurile structurii.

3. Noțiunea de model, modelare și discretizare în metoda elementelor finite

Tipuri de elemente finite

Metoda elementelor finite poate fi extinsă în orice domeniu care descrie un fenomen cu ajutorul unor ecuații diferențiale, ea dezvoltându-se în mod deosebit în domeniile următoare: analiza structurală, analiza termică, analiza fluidelor, câmpuri electrice, câmpuri magnetice, etc.

Utilizatorul metodei elementelor finite este pus în situația rezolvării unei anumite probleme și nu neapărat în cea a realizării unui program pentru rezolvarea problemei utilizând metoda elementelor finite. Utilizatorul trebuie să știe dacă problema se pretează rezolvării utilizând metoda elementelor finite și să folosească un program adecvat problemei respective, impunându-se cunoașterea performanțelor programului și a modului de lucru.

Programul de calcul, aplicat problemei, nu rezolvă problema ci doar un **model** al problemei, pe care, de obicei, îl face utilizatorul. **Modelarea**, în cadrul metodei elementelor finite, reprezintă activitatea de simplificare a structurii studiate și încadrarea acesteia într-una dintre categoriile corespunzătoare, precum cea a barelor, a plăcilor sau a blocurilor, luându-se în considerare încărcările și reazemele. Modelarea corectă a structurii este dependentă de experiența operatorului, de inspirația acestuia și de cunoașterea bazelor teoretice ale metodei elementelor finite.

Principalii **pași în procesul de modelare** utilizând metoda elementelor finite sunt:

- crearea modelului
- alegerea unui software potrivit pentru rezolvarea modelului
- validarea modelului
- rularea software-ului pentru obținerea rezultatelor
- verificarea rezultatelor

Crearea modelului

În cazul unor situații “non-standard” este mai dificil de creat un model și este important să existe o strategie convenabilă de stabilire a acestuia. Astfel, cea mai utilizată strategie în faza de început a modelării este aceea de a întocmi o listă cu ieșiri pentru modelul analizat. În acest context, o ieșire înseamnă orice trăsătură caracteristică sau factor care influențează modelul și care trebuie luat în considerare. Lista de ieșiri este utilizată mai ales în procesul de validare a modelului.

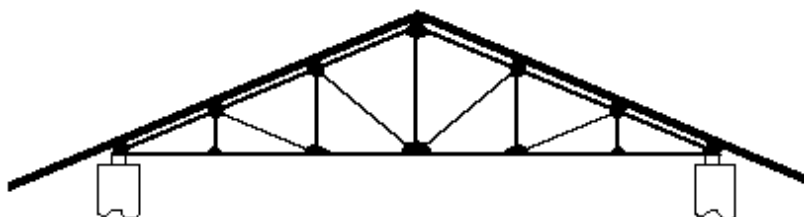


Fig.4. Structura de rezistență a unui acoperiș de hală

De exemplu, pentru o structură de rezistență a acoperișului unei hale (Fig.4), ieșirile în crearea modelului analitic includ întrebările și răspunsurile la aceste întrebări cu privire la următoarele aspecte:

- Care sunt obiectivele analizei?
- Ce condiții de susținere trebuiesc impuse?
- Nodurile trebuiesc tratate ca articulații sau ca fiind rigide (preiau și moment încovoietor)?
- Cum interacționează structura de rezistență analizată cu alte părți ale ansamblului acoperișului sau cu pereții verticali? Este rezonabilă aplicarea principiului substructurării și tratarea structurii de rezistență a acoperișului ca un sistem plan separat?
- De ce natură vor fi încărcările: statice, dinamice, influențate de vânt, influențate de ninsoare, etc.?
- Vor exista și efecte de ordin secundar considerabile (încovoierea elementelor, flambajul sau torsiunea acestora, etc.)?

Această listă poate fi mărită pe măsură ce se dorește o dezvoltare a modelului.

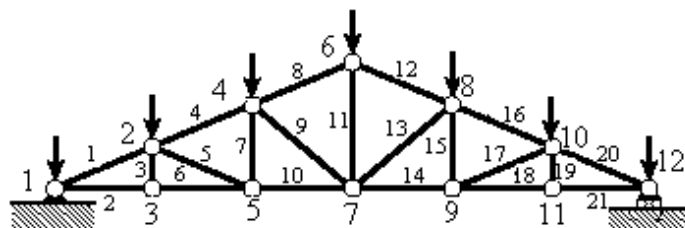


Fig.5. Modelul discretizat al structurii de rezistență a acoperișului de hală

În figura 5 este prezentat modelul analitic pentru acoperișul halei. Acest model trebuie să conțină informații cu privire

la:

- software-ul utilizat pentru analiza structurii;
- tipul elementului utilizat pentru modelare și principalele caracteristici ale acestuia;
- dimensiunile geometrice ale structurii și ale fiecărui element în parte;
- numerotarea nodurilor și a elementelor;
- proprietățile materialului din care sunt realizate elementele (liniar-elastic, neliniar, etc.);
- condițiile pentru fixare;
- precizarea încărcărilor.

Toate aceste informații sunt deosebit de importante pentru a conduce la rezultate bune ale modelării utilizând metoda elementelor finite.

Abateri, erori, incertitudini, verificare, validare model

Analiza presupune asumarea unor **abateri** între “valoarea țintă” a unei variabile și valoarea cu care se lucrează efectiv. Valoarea țintă a unei variabile reprezintă valoarea dorită sau valoarea teoretică a respectivei variabile. Când variabila are o valoare reală, abaterea (diferența dintre valoarea cu care se operează efectiv și valoarea țintă) este denumită **eroare**. Când valoarea țintă nu are o valoare reală, abaterea este denumită **incertitudine**. De exemplu, pentru numărul π , există în principiu o valoare reală exactă, dar valoarea folosită întotdeauna în analiză este cu eroare, așa cum pentru modulul lui Young al unui material nu există o valoare reală certă și de aceea în acest caz se operează cu valori ce presupun incertitudini față de valoarea folosită.

Termenii “**verificare**” și “**validare**” sunt utilizați în următoarele situații:

- **verificare**: atunci când abaterile considerate sunt în special **eroari**;
- **validare**: atunci când abaterile considerate sunt în special **incertitudini**.

Alegerea unui software potrivit pentru rezolvarea modelului

Această etapă din cadrul modelării utilizând metoda elementelor finite este foarte importantă deoarece presupune alegerea unui software corespunzător care să permită tratarea și rezolvarea modelului analitic elaborat. Dacă software-ul ales pentru utilizare este nou pentru un utilizator, se recomandă efectuarea unui exercițiu de verificare folosind un “test de judecată”.

Validarea modelului

Atunci când modelul este caracterizat de un grad ridicat de incertitudine este important să se efectueze un exercițiu de validare. Întrebarea pentru această procedură de validare este următoarea: “*poate modelul să reprezinte adecvat structura reală?*”. Pentru a da răspuns la această întrebare este necesară parcurgerea și evaluarea listei cu cerințe și a listei cu asumările făcute în etapa de creare a modelului.

Verificarea rezultatelor

Prin definiție, modelul analitic generat este ideal, fiind diferit de modelul real datorită erorilor datelor (care pot fi corectate) și datorită erorilor de rotunjire (care nu pot fi complet corectate). În această etapă de verificare se pune întrebarea dacă erorile soluțiilor sunt la un nivel acceptabil?

Verificarea rezultatelor se poate face prin:

- controlul rezultatelor utilizând reprezentările grafice;
- controlul echilibrului total (de exemplu: suma reacțiunilor trebuie să fie egală cu suma încărcărilor aplicate);
- controlul echilibrului local (dacă este accesibil);
- verificarea dacă restricțiile în punctele de sprijin au fost corect aplicate (prin vizualizarea deformațiilor în nodurile cu restricții);
- verificarea simetriei și a comportării simetrice (dacă este cazul);
- controlul forme generale a rezultatelor (se urmărește dacă deformata structurii și distribuția tensiunilor în elementele acesteia este în conformitate cu așteptările);
- crearea unui model de control (verificare) și compararea rezultatelor acestuia cu principalele rezultate ale modelului în sine (verificarea și compararea, dacă este posibil, atât a deformațiilor cât și a tensiunilor din elemente).

Modele de control

În mod normal, modelul de control este o versiune simplificată a modelului analitic în sine, dar, în situații critice, pentru siguranță, se impune o etapă de verificare a rezultatelor analizei ceea ce presupune o reanalizare completă a modelului de control folosind un software diferit și compararea rezultatelor obținute în cele două cazuri.

Modelul de control poate fi calculat analitic „pe hârtie” sau poate fi analizat simplificat pe calculator. Dacă modelul de control este o versiune simplificată a modelului principal rezultatele obținute nu vor fi identice. În această situație este indispensabilă capacitatea operatorului de a aprecia și de a justifica gradul de diferență dintre cele două seturi de rezultate. În caz contrar, modelul de control poate avea o valoare mult limitată.

Există patru posibilități atunci când se compară rezultatele provenite de la modelul principal cu cele provenite de la modelul de control:

- 1) Cele două rezultate au valori apropiate și sunt ambele corecte în esență. Aceasta este situația dorită, dar nu este ușor de întâlnit în practică această situație.
- 2) Cele două rezultate au valori diferite semnificativ. În această situație se impune stabilirea rațiunii diferențelor. Cauzele acestor diferențe pot fi mai multe. Astfel, fie rezultatele modelului principal pot avea erori, fie modelul de control poate să fie conceptual greșit sau să furnizeze rezultate cu erori de calcul.
- 3) Cele două rezultate sunt similare, dar ambele sunt cu eroare având mărime similară din diferite motive, acționând compensatoriu.
- 4) Cele două rezultate sunt similare, având modelul principal corect iar modelul de control bazat pe informații false datorate unor erori aritmetice sau bazat pe considerente eronate care au efect compensator.

În lista de mai sus situațiile 3) și 4) reprezintă corelații false. Astfel de situații sunt foarte întâlnite în practică. În situația 4) concluziile desprinse pot conduce la rezultate eronate. În general, operatorii au o viziune optimistă, iar atunci când constată că rezultatele obținute din modelul principal și cel de control sunt apropiate, se grăbesc să accepte aceasta ca o dovadă privind acuratețea rezolvării problemelor. O simplă corelație aparent favorabilă nu trebuie să constituie niciodată un prilej de automulțumire în ceea ce privește completa verificare a rezultatelor. Operatorii cu experiență tratează cu suspiciune toate rezultatele obținute și abia apoi trec la concluzii.

Schema generală de rezolvare a unei probleme utilizând metoda elementelor finite

Schema generală a procesului complex de rezolvare a unei probleme, utilizând metoda elementelor finite, conținând și principalele stadii și etape ale modelării, este prezentată în figura 6, iar în figura 7 este prezentat un exemplu de transformare a unui sistem fizic, prin idealizare, într-un model discretizat. Este vorba despre structura de rezistență, de tip grindă cu zăbrele, a unui acoperiș. Trecerea la sistemul discretizat se face prin idealizare, considerând unele ipoteze simplificatoare precum: legăturile dintre barele grinzii cu zăbrele din sistemul fizic sunt considerate a fi articulații cilindrice și sunt înlocuite cu noduri în sistemul discretizat, neglijându-se forțele de frecare din articulații; barele grinzii sunt înlocuite de elemente finite ce au aria secțiunii transversale constantă între cele două noduri de capăt, care, în cazul de față chiar coincid cu barele reale; greutatea acoperișului este redusă la noduri și se consideră că acționează numai în nodurile de la partea superioară a grinzii cu zăbrele; etc.

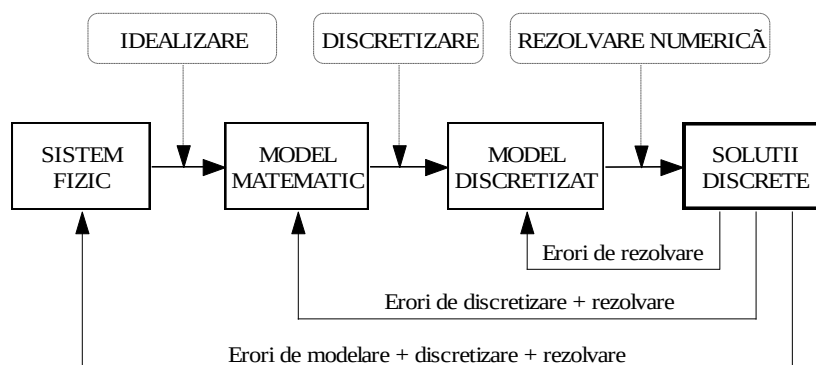


Fig.6. Rezolvarea unei probleme utilizând metoda elementelor finite

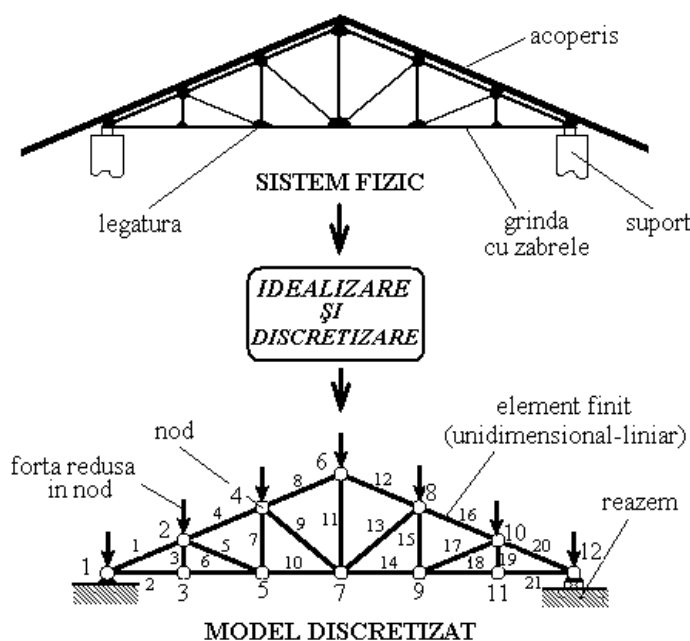


Fig.7. Exemplu de trecere prin idealizare de la un sistem fizic la un model discretizat

Modelarea matematică (idealizare) reprezintă un proces prin care inginerul realizează prin studiu trecerea de la un *sistem fizic* propriu-zis la un *model matematic* al aceluiași sistem, constituind unul dintre cei mai importanți pași în practica inginerască pentru rezolvarea unei probleme utilizând metoda elementelor finite. Acest proces poartă și denumirea de **idealizare** deoarece modelul matematic realizat este caracterizat de o serie de abstractizări și idealizări față de realitatea fizică. Generic, termenul de **model** reprezintă un „instrument” simbolic construit pentru a simula și a estima aspecte cu privire la comportarea unui sistem.

Rezolvarea unei probleme utilizând metoda elementelor finite presupune o abordare mai complexă care înseamnă lucrul pe mai multe nivele între care există legături, așa cum se arată și în figura 8, în care este prezentat nivelul sistemului (ansamblului) analizat și nivelul componentelor (a elementelor finite), omițându-se alte nivele intermediare ale substructurii.

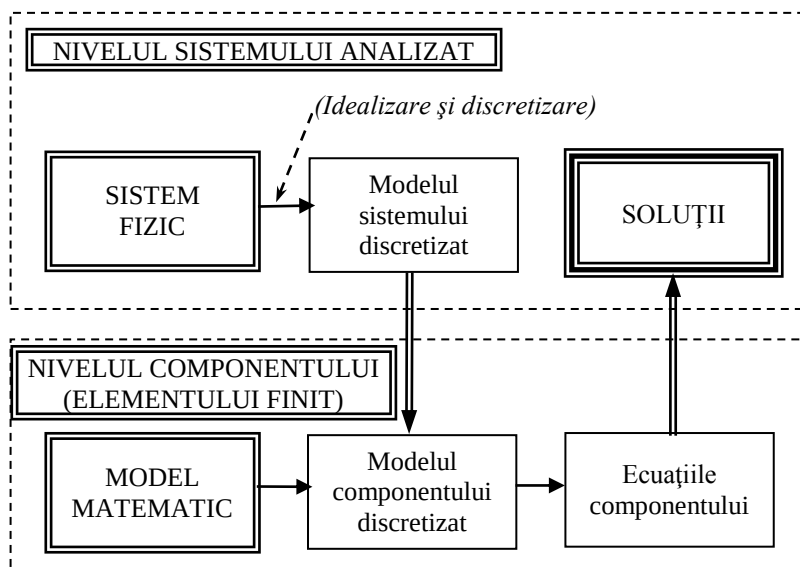


Fig.8. Principiul rezolvării unei probleme utilizând metoda elementelor finite

Nivelul sistemului analizat (a structurii în ansamblu) conține sistemul fizic al structurii și modelul sistemului discretizat. Modelul sistemului discretizat este compus din elemente pentru care calculele se fac în sistemul propriu al fiecărui element în parte, deci la „nivelul componentului” care conține așadar modelul componentului discretizat, conform unui model matematic specific fiecărui tip consacrat de element finit, care generează ecuațiile componentului, iar acestea, prin rezolvare, conduc la obținerea soluțiilor numerice pentru întreg sistemul analizat, la nivelul acestuia, prin asamblarea ecuațiilor tuturor componentelor. Soluțiile pot fi: deplasări, tensiuni, deformații, etc.

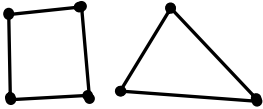
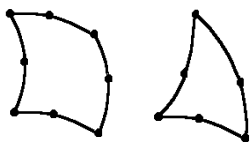
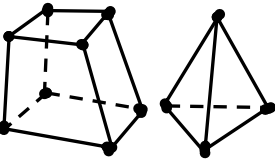
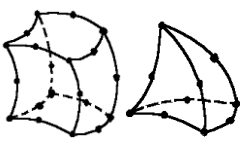
Discretizarea cu elemente finite

Discretizarea structurii reale constă în înlocuirea structurii date, care este continuă, cu o structură discretă, discontinuă și idealizată, compusă din sub-regiuni mici, numite **elemente finite**, care pot fi:

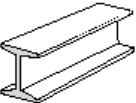
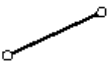
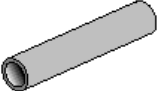
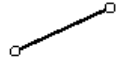
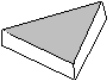
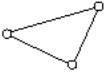
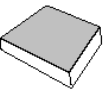
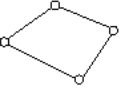
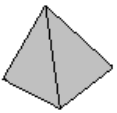
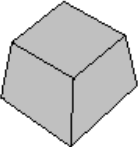
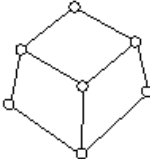
- **unidimensionale** (bare);
- **bidimensionale** (plăci);
- **tridimensionale** (blocuri).

Elementele finite ale ansamblului se consideră a fi legate între ele numai în anumite puncte numite **noduri**. Un element finit poate fi privit ca o “piesă” de sine-stătătoare, care interacționează cu celelalte elemente numai prin intermediul nodurilor. În tabelele următoare sunt prezentate clasificări pentru principalele elemente finite utilizate.

Tabel 1. Principalele tipuri de elemente finite

Elemente finite	Liniare	Parabolice
Unidimensionale		
Bidimensionale		
Tridimensionale		

Tabel 2. Exemple de transformare ale componentelor de bază aparținând sistemului fizic în elemente finite

Componentul sistemului fizic (al structurii)	Numele modelului matematic al componentului	Discretizarea cu elemente finite (model discretizat)
	bară	
	grindă	
	tub, țevă	
	lonjeron, traversă, bandă	
	placă triunghiulară	
	placă patrulateră	
	bloc 3D (tetraedric)	
	bloc 3D (paralelipipedic)	

În figurile următoare sunt prezentate trei exemple de utilizare a elementelor finite unidimensionale (Fig.9), bidimensionale (Fig.10) și tridimensionale (Fig.11) pentru generarea modelului discretizat și pentru rezolvare utilizând metoda elementelor finite.

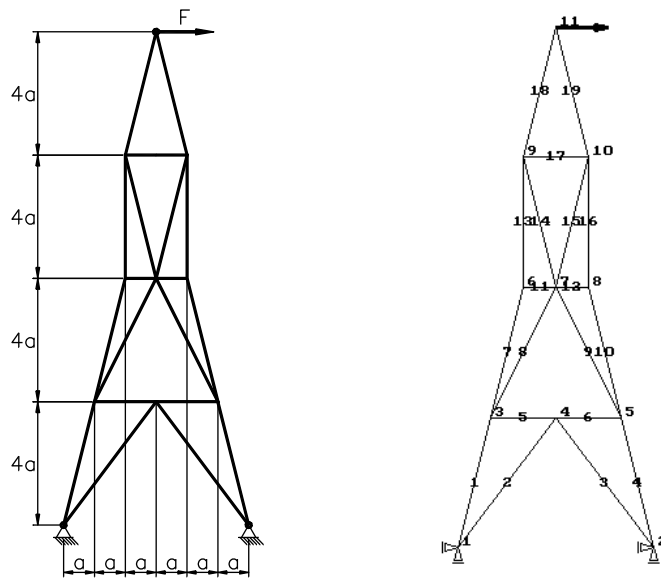


Fig.9. Exemplu de utilizare a elementelor finite unidimensionale pentru generarea modelului discretizat în cazul unui sistem compus din bare plane articulate

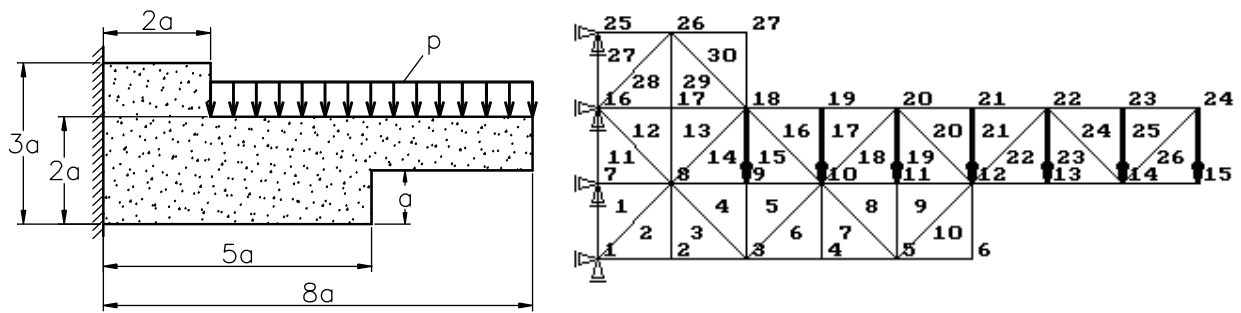


Fig.10. Exemplu de utilizare a elementelor finite bidimensionale pentru generarea modelului discretizat pentru o problemă din categoria plăcilor plane

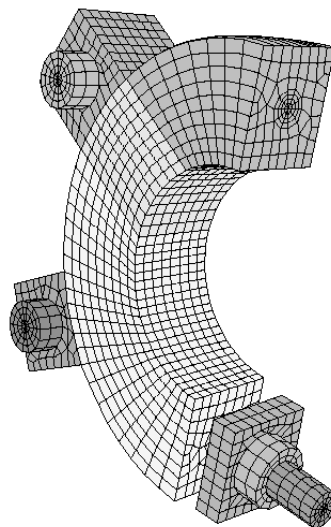


Fig.11. Exemplu de utilizare a elementelor finite tridimensionale pentru generarea modelului discretizat pentru o problemă din categoria blocurilor 3D

4. Clasificarea generală a structurilor în metoda elementelor finite

Toate structurile ingineresti sunt tridimensionale, dar pot fi făcute adesea aproximații satisfăcătoare care să conducă la tratarea acestora ca fiind unidimensionale sau bidimensionale, în funcție de geometria structurii și de încărcările la care aceasta este supusă.

Structuri unidimensionale „1D”

Sunt caracterizate prin faptul că una dintre dimensiuni este semnificativ mai mare decât celelalte două dimensiuni.

Acestea pot fi împărțite în două categorii:

1. BARĂ („TRUSS”): la care încărcarea și construcția geometrică sunt ambele orientate după o aceeași axă longitudinală. În figura 12 este prezentat un astfel de exemplu la care atât geometria cât și încărcarea sunt orientate după direcția longitudinală (axa x).

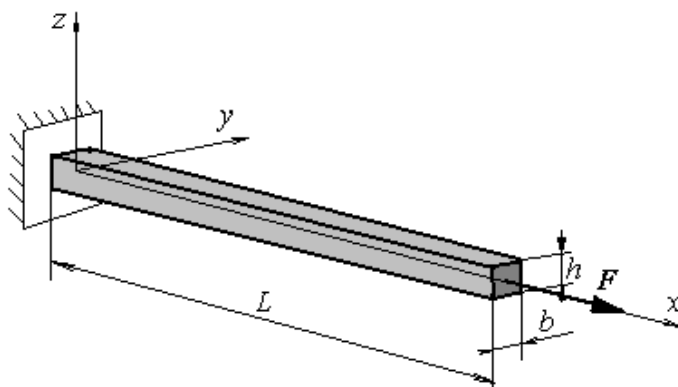


Fig.12. Exemplu de structură unidimensională de tip bară

2. GRINDĂ („BEAM”): la care geometria este unidimensională dar încărcarea este tridimensională. Pentru grinzile „zvelte”, la care $L > 10 \cdot h$ și $L > 10 \cdot b$, se presupune că planul secțiunii transversale rămâne perpendicular pe axa neutră (axa longitudinală). Un exemplu de astfel de structură de tip grindă este prezentat în figura 13, la care se observă că geometria este unidimensională, orientată după direcția x , iar încărcările sunt sub forma unor forțe F orientate după direcția x și z , respectiv un moment de torsiune după direcția x .

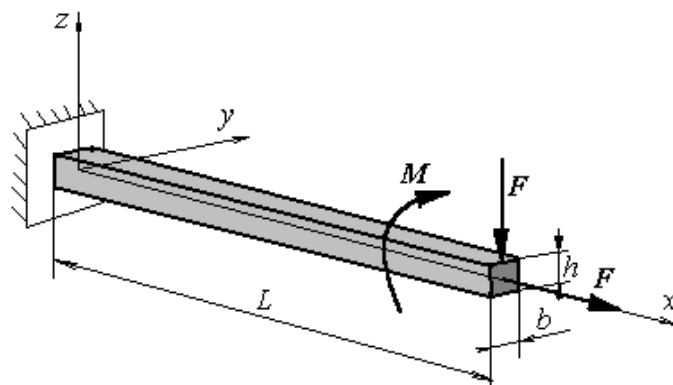


Fig.13. Exemplu de structură unidimensională de tip grindă

Structuri bidimensionale „2D”

În general, sunt caracterizate prin faptul că una dintre dimensiuni este semnificativ mai mică decât celelalte două dimensiuni.

Acestea pot fi împărțite în patru categorii:

1. PLĂCI PLANE: la care a treia dimensiune este fie foarte mică, fie foarte mare în comparație cu primele două, geometria este plană iar încărcările sunt în același plan cu planul construcției geometrice. Pentru studiul în cazul acestor structuri există două moduri distincte de abordare:

- a) Cazul **stării plane de deformatie** (deformații plane): la care se consideră că deformațiile după a treia direcție sunt foarte mici și neglijabile. În figura 14 este prezentat un astfel de exemplu, în care se observă că pentru structura studiată, dimensiunea L după direcția z este mult mai mare decât dimensiunile după axele x și y . Pentru studiu, este suficient să se considere o „felie” de grosime l , toate deformațiile după direcția z neglijându-se.

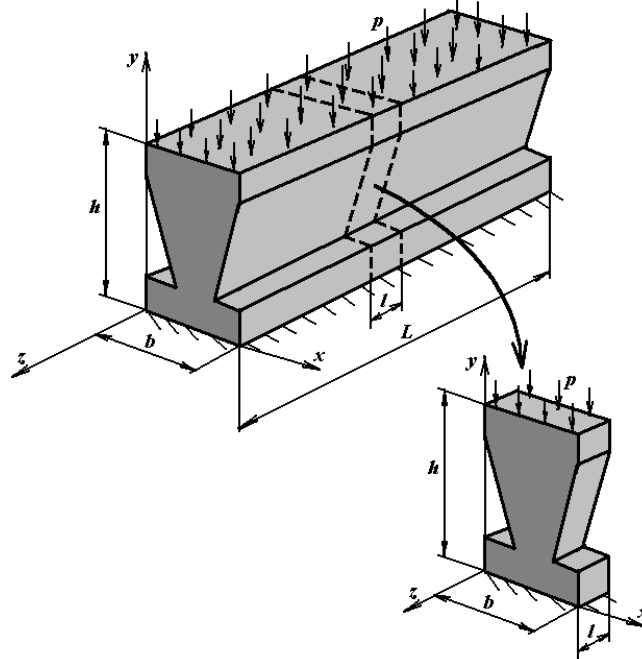


Fig.14. Exemplu de structură bidimensională de tip placă plană în stare plană de deformare

- b) Cazul **stării plane de tensiune** (tensiuni plane): la care se consideră că tensiunile după a treia direcție sunt foarte mici și neglijabile. În figura 15 este prezentat un astfel de exemplu, la care, sub acțiunea încărcărilor externe, tensiunile care apar sunt situate în același plan xy , toate tensiunile după direcția z neglijându-se.

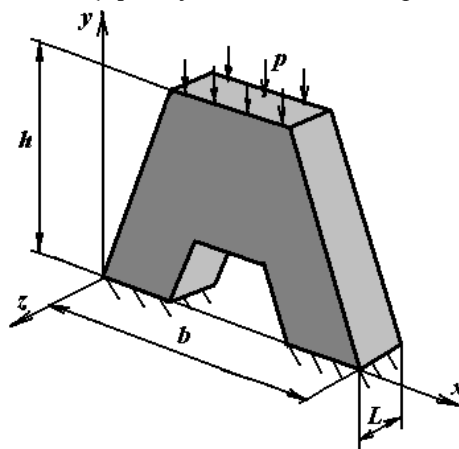


Fig.15. Exemplu de structură bidimensională de tip placă plană în stare plană de tensiune

2. TALER (PLACĂ PLANĂ SUBȚIRE): la care a treia dimensiune este foarte mică în comparație cu primele două, geometria este plană (plată) iar încărcările nu sunt coplanare cu planul geometric (Fig.15).

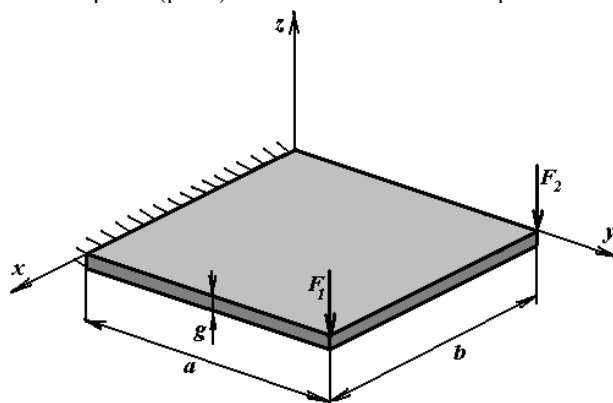


Fig.15. Exemplu de structură bidimensională de tip taler

3. COAJĂ (PLACĂ CURBĂ) („shell”): la care grosimea g este fie foarte mică, fie foarte mare în comparație cu dimensiunile structurii, geometria este curbată, iar încărcările sunt înafara „pânzei” construcției geometrice (înafara planului tangent la structură) (Fig.16).

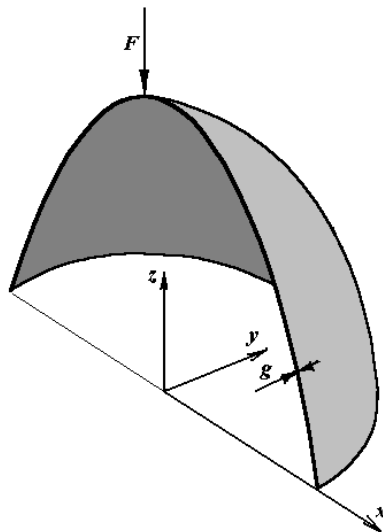


Fig.16. Exemplu de structură bidimensională de tip coajă

4. PLACĂ AXIAL SIMETRICĂ: la care geometria este generată prin mișcarea de revoluție a unei secțiuni 2D, de grosime foarte mică g , în jurul unei axe (axa y), supusă la încărcare exterioră nesimetrică (Fig.17).

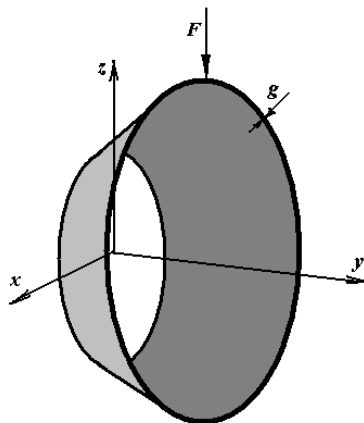


Fig.17. Exemplu de placă axial simetrică

5. Sarcini exterioare pentru metoda elementelor finite

Sarcinile exterioare ce solictă structurile în cazul problemelor ce se rezolvă utilizând metoda elementelor finite pot fi de două feluri:

- **concentrate (punctuale)**
- **distribuite**

1. Sarcini concentrate sau punctuale (Fig.18):

- a) Forțe concentrate (F_x, F_y, F_z)
- b) Cupluri concentrate (M_x, M_y, M_z)

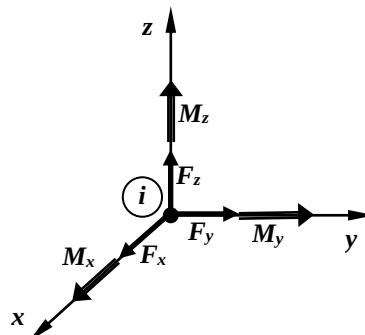


Fig.18. Sarcini concentrate

2. Sarcini distribuite:

a) Sarcini distribuite pe o linie, [N/mm] (Fig.19), cum sunt cele ce apar în calculul barelor, vectorul forțelor având expresia:

$$\{dQ_L\} = \begin{Bmatrix} q_x \cdot dx \\ q_y \cdot dy \\ q_z \cdot dz \end{Bmatrix} \quad (9)$$

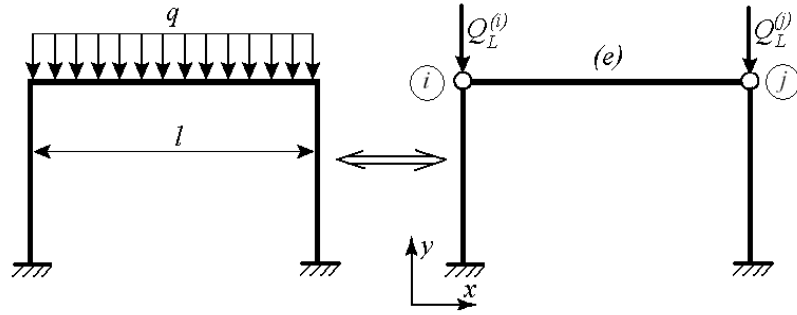


Fig.19. Sarcini distribuite pe o linie

Forțele reduse în nodurile i și j au expresia:

$$Q_L^{(i)} = Q_L^{(j)} = \frac{q \cdot l}{2} \quad (10)$$

b) Sarcini distribuite pe o suprafață, [N/mm²] (Fig.20), ce apar în cazul problemelor bidimensionale sau tridimensionale. Considerând dS elementul de suprafață pe care acționează sarcina distribuită, expresia vectorului forțelor este:

$$\{dP_S\} = \begin{Bmatrix} p_x \cdot dS \\ p_y \cdot dS \\ p_z \cdot dS \end{Bmatrix} \quad (11)$$

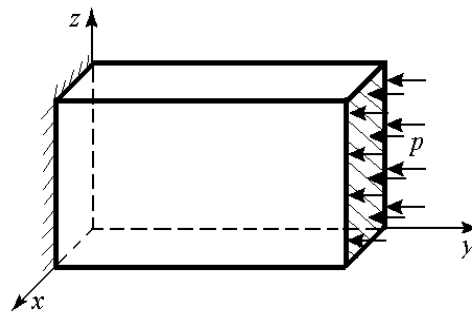


Fig.20. Sarcini distribuite pe o suprafață

Un exemplu îl constituie placa de grosime constantă din figura 21:

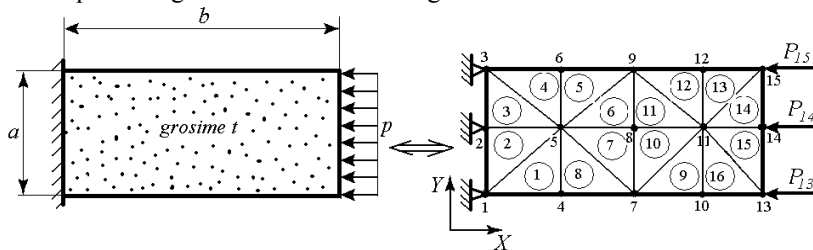


Fig.21. Exemplu de problemă pentru care sarcinile sunt distribuite pe o suprafață

Forțele reduse în nodurile 13, 14 și 15, au expresiile:

$$P_S^{(13)} = P_{13} = P_S^{(15)} = P_{15} = p \cdot t \cdot \frac{Y_{14} - Y_{13}}{2} = p \cdot t \cdot \frac{Y_{15} - Y_{14}}{2} \quad (12)$$

$$P_S^{(14)} = P_{14} = p \cdot t \cdot \left(\frac{Y_{14} - Y_{13}}{2} + \frac{Y_{15} - Y_{14}}{2} \right) = p \cdot t \cdot \frac{Y_{15} - Y_{13}}{2} \quad (13)$$

c) Sarcini distribuite pe volum, [N/mm³] (Fig.22), ce apar în cazul problemelor tridimensionale, ca de exemplu: forțele de inerție sau forțele gravitaționale. Asupra unui element de volum dV acționează forțele:

$$\{dQ_V\} = \begin{Bmatrix} X \cdot dV \\ Y \cdot dV \\ Z \cdot dV \end{Bmatrix} \quad (14)$$

în care X , Y , și Z reprezintă componentele după cele trei direcții ale sarcinilor distribuite pe volum.

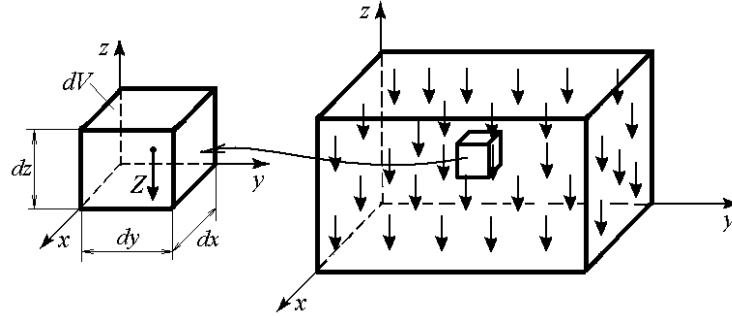


Fig.22. Sarcini distribuite pe volum

6. Deplasări în cadrul metodei elementelor finite

Deplasările ce pot să apară în cazul problemelor ce se rezolvă prin modelare utilizând metoda elementelor finite pot fi de două feluri:

- **liniare**
- **unghiulare (de rotație)**

1. **Deplasări liniare**, având componentele u , v , w , care descriu modificarea poziției unui punct în raport cu un sistem de axe (Fig.23). Vectorul deplasărilor liniare pentru descrierea deplasării unui punct oarecare este:

$$\{\Delta\} = \{\Delta(x, y, z)\} = \begin{Bmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{Bmatrix} \quad (15)$$

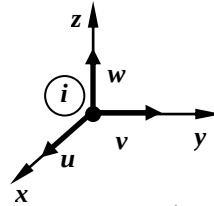


Fig.23. Deplasări liniare

Pentru un punct de coordonate precizate (x_0, y_0, z_0) , vectorul deplasare este:

$$\{\delta\} = \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{Bmatrix} = \{\Delta(x_0, y_0, z_0)\} = \begin{Bmatrix} u(x_0, y_0, z_0) \\ v(x_0, y_0, z_0) \\ w(x_0, y_0, z_0) \end{Bmatrix} \quad (16)$$

iar modulul deplasării totale se calculează cu relația:

$$\delta = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2} \quad (17)$$

2. **Deplasări unghiulare (de rotație)**, care descriu modificarea orientării sistemului de axe în care este definită poziția unui punct (Fig. 1.24). Vectorul deplasărilor unghiulare este:

$$\{\phi\} = \begin{Bmatrix} \phi_x \\ \phi_y \\ \phi_z \end{Bmatrix} \quad (18)$$

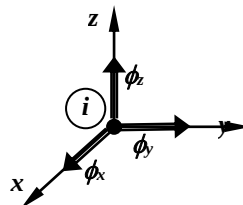


Fig. 1.24. Deplasări unghiulare

7. Sisteme de axe în metoda elementelor finite

1. Sistem de axe global – reprezintă un sistem de axe ortogonale XOY (în plan), sau OXYZ (în spațiu), ales arbitrar, față de care se poate face descrierea geometrică de ansamblu a unei structuri.

De exemplu, pentru o structură plană de grinzi cu zăbrele (Fig.25), este prezentat sistemul de axe global XOY, față de care sunt definite coordonatele globale (absolute) ale tuturor nodurilor structurii.

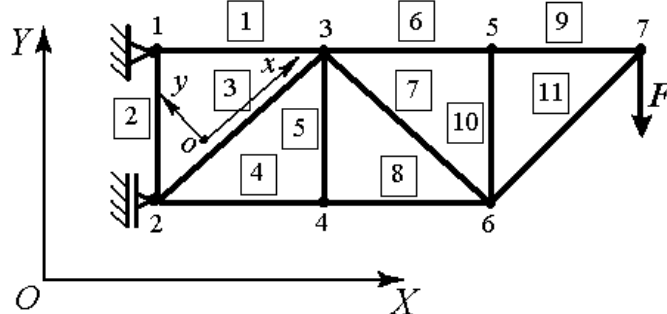


Fig.25. Sisteme de axe pentru o structură de grinzi cu zăbrele

2. Sistem de axe local – reprezintă un sistem de axe ortogonale xoy (în plan), sau oxyz (în spațiu), atribuit fiecărui element al structurii în parte.

În figura 25 este prezentat un exemplu în care pentru elementul 3 axa ox a sistemului local coincide cu axa longitudinală a acestui element, aducându-se astfel o importantă contribuție la simplificarea calculului deformației elementului.

În sistemul global de axe se precizează numărul total de noduri și coordonatele față de originea acestui sistem pentru fiecare nod. De asemenea, se identifică elementele structurii, numărul total al acestora, precizându-se pentru fiecare element în parte nodurile definitorii (i și j pentru elemente de tipul celor din figura 25) precum și aria secțiunii transversale a fiecărui element în parte.

Lungimea fiecărui element în parte poate fi calculată în sistemul de referință global cu relația:

$$L_{ij} = \sqrt{(X_j - X_i)^2 + (Y_j - Y_i)^2} \quad (19)$$

Orientarea unui sistem de referință local față de sistemul de referință global (Fig.26) se face utilizând cosinusurile directoare ale axei locale ox față de axa globală OX, calculabile cu relațiile:

$$\begin{cases} \cos \alpha = \frac{X_j - X_i}{L_{ij}} = l \\ \sin \alpha = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \frac{Y_j - Y_i}{L_{ij}} = m \end{cases} \quad (20)$$

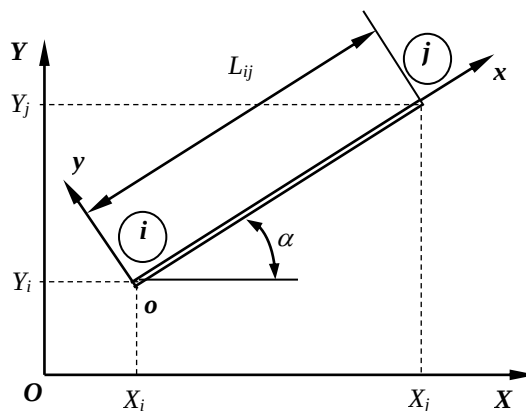


Fig.26. Orientarea unui sistem de referință local față de un sistem de referință global

8. Noțiunea de grad de libertate în metoda elementelor finite

Prin definiție, **gradele de libertate** reprezintă numărul coordonatelor independente necesare pentru a specifica configurația unui sistem.

În general, din punct de vedere geometric, pentru un punct în spațiu tridimensional pot exista maximum **șase grade de libertate**: **trei translații** după direcțiile x , y , z și **trei rotații** după aceleași trei direcții.

În continuare sunt prezentate câteva exemple de structuri care au puncte având unul, două, trei sau șase grade de libertate.

1 grad de libertate

În figura 27 este prezentat un exemplu al unei structuri de tip arc elicoidal, având constanta elastică k , al cărui capăt liber, sub acțiunea forței F –orientată în lungul axei z , are un singur grad de libertate, constând din deplasarea u în lungul axei z . Așadar, coordonata z a capătului liber al arcului este singura coordonată independentă necesară și suficientă pentru a specifica, conform definiției, configurația acestui sistem.

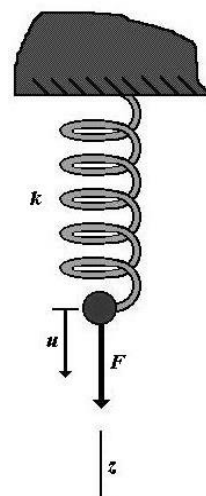


Fig.27

2 grade de libertate

În figura 28 este prezentat exemplul unei structuri plane de bare articulate la care punctul M (solicitat de forțe orientate după direcția X și Y) are două grade de libertate: u și v (translații după direcția X și Y).

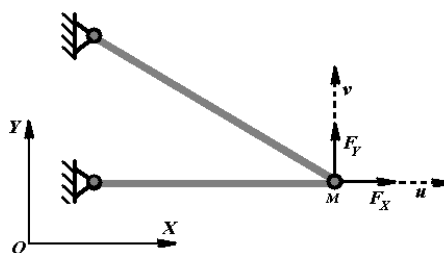


Fig.28. Structură plană de bare articulate

În figura 29 este prezentat exemplul unei plăci plane solicitată de forțe orientate după direcțiile X și Y , la care orice punct M are două grade de libertate (translațiile u_M și v_M după cele două axe X și Y).

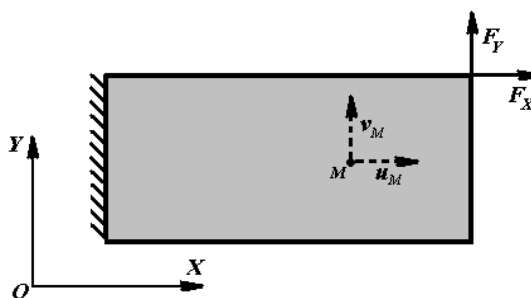


Fig.29. Structură de placă plană

3 grade de libertate

În figura 30 este prezentat exemplul unei structuri de tipul grindă plană, încadrată la unul dintre capete și solicitată la celălalt capăt de un sistem plan de forțe F_X și F_Y orientate după cele două direcții X și Y și, în plus, de către un moment încovoietor orientat după axa Z –perpendiculară pe planul XOY . Cele trei grade de libertate, în cazul acestor structuri, sunt: două translații u și v –după cele două direcții X și Y și rotația θ –orientată după axa Z .

Un alt exemplu la care nodurile structurii au tot trei grade de libertate (translațiile u , v , w , după axele X , Y , Z) este cel al barelor spațiale articulate, prezentat în figura 31

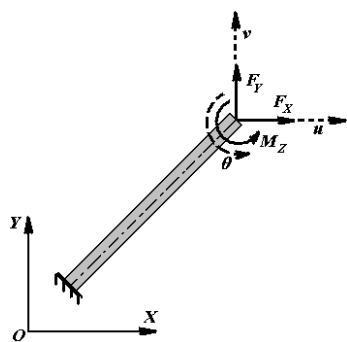


Fig.30. Structură de grindă plană

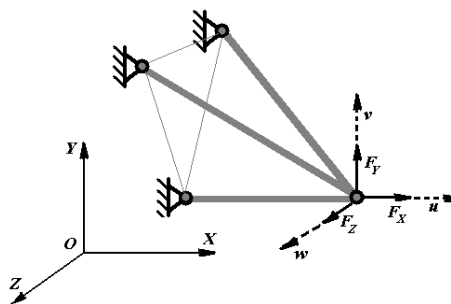


Fig.31. Structură de bare spațiale articulate

6 grade de libertate

În figura 32 este prezentat exemplul unei structuri de tip grindă spațială, încastrată la unul dintre capete, liberă la celălalt capăt –în care există posibilitatea încărcării atât cu forțe cât și cu momente după toate cele trei direcții. În acest caz, capătul liber al grinzii are șase grade de libertate, constând din: trei translații (u, v, w) și trei rotații ($\theta_x, \theta_y, \theta_z$), după toate cele trei direcții X, Y, Z .

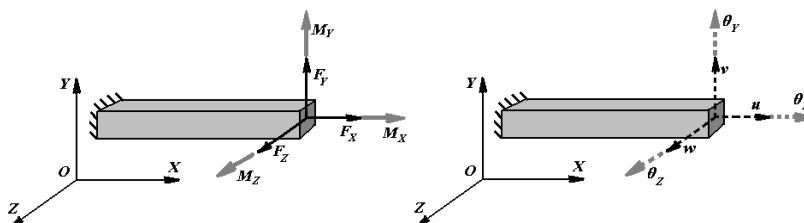


Fig.32. Structură de grindă spațială

Așadar, configurația spațială a oricărui sistem mecanic este descrisă prin intermediul gradelor de libertate, care mai sunt denumite și coordonate generalizate.

Un model este continuu dacă numărul gradelor de libertate al acestuia este infinit, iar dacă numărul gradelor de libertate este finit modelul se numește discret. Deoarece metoda elementelor finite este una de discretizare, numărul gradelor de libertate pentru modelele din această categorie este obligatoriu finit. Pentru modelarea matematică, gradele de libertate ale unui model sunt conținute într-un vector coloană, notat cu $\{u\}$. Acest vector are denumirea generală de vector al gradelor de libertate sau vector de stare. Acest vector, în cazul strict al aplicațiilor din domeniul structurilor mecanice, este denumit vector al deplasărilor nodale.

În mecanica analitică, fiecare grad de libertate are un termen corespondent, conjugat, care reprezintă o forță generalizată. Aceste forțe sunt conținute într-un vector al forțelor generalizate, notat cu $\{F\}$.

Derivând din cazul problemelor de bare, relația dintre $\{u\}$ și $\{F\}$ este considerată ca fiind și în general liniară și omogenă, având forma:

$$[K] \cdot \{u\} = \{F\} \quad (21)$$

în care $[K]$ este universal definită ca matrice de rigiditate.

În tabelul următor este prezentată semnificația fizică a vectorilor $\{u\}$ și $\{F\}$ în cazul diferitelor aplicații M.E.F., chiar și a celor ne-mecanice.

Tip problemă	$\{u\}$	$\{F\}$
Mecanica structurilor și a solidelor	deplasare	forță mecanică
Conductibilitate termică	temperatură	flux termic
Curgere potențială	presiune	viteza particulelor
Curgere generală	viteză	flux
Electrostatică	potențial electric	densitate de sarcină
Magnetostatică	potențial magnetic	intensitate magnetică

9. Noțiuni elementare privind comportarea mecanică a materialelor

Pentru solidele deformabile, una dintre relațiile de bază ale metodei elementelor finite este **legea lui Hooke**, conform căreia eforturile σ sunt proporționale cu deformațiile specifice ε :

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad (22)$$

în care:

$$\sigma = \frac{F}{A_0} \quad (23)$$

iar:

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_0} \quad (24)$$

unde: F – reprezintă forța de întindere a epruvetei;

A_0 – aria inițială a secțiunii transversale a epruvetei;

ΔL – alungirea epruvetei;

L_0 – lungimea inițială a epruvetei;

E – modulul de elasticitate longitudinal (modulul lui Young).

Această lege corespunde porțiunii liniare din curba caracteristică trasată prin testul standard de sollicitare la întindere pentru o epruvetă. În figura 1.33 este prezentată curba caracteristică în cazul oțelurilor.

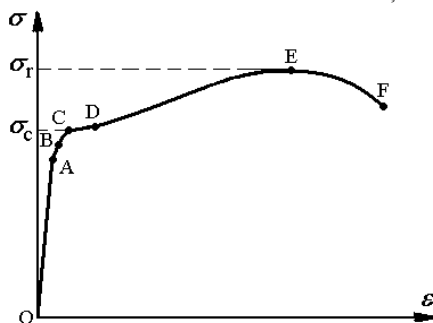


Fig.33. Curba caracteristică în cazul oțelurilor

În tabelul următor este prezentată semnificația principalelor puncte și porțiuni de pe curba caracteristică prezentată în figura 33.

Puncte	Semnificație
O-A	Zona de proporționalitate a curbei caracteristice (liniară)
B	Ordonata acestui punct se numește limita de elasticitate . Până la acest punct materialul își revine după descărcare lungimea inițială L_0
C	Limita de curgere
C-D	Palier de curgere
E	Ordonata acestui punct reprezintă rezistența la rupere a materialului

Similară relației de mai sus este **legea lui Hooke pentru sollicitarea de răsucire**, care este valabilă tot pentru porțiunea liniară a unei curbe caracteristice a materialului la răsucire (foarte asemănătoare ca formă cu cea corespunzătoare sollicitării de întindere):

$$\tau = G \cdot \gamma \quad (25)$$

în care: G – reprezintă modulul de elasticitate transversal;

τ – efort unitar de răsucire;

γ – lunecare specifică.

Există puține materiale (oțel, lemn) care „ascultă legea lui Hooke” (au o porțiune rectilinie a curbei caracteristice). Pentru materiale precum: fontă, alamă, cupru, beton, cauciuc, sol, etc., curba caracteristică are forma precum cea din figura 34.a.

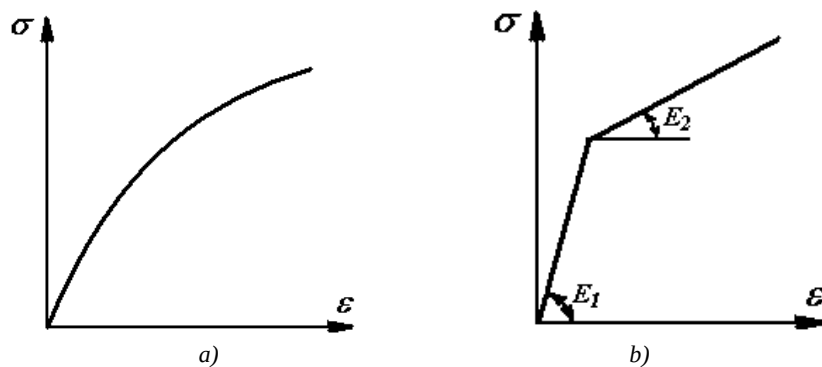


Fig.34. Curba caracteristică în cazul materialelor variabil-elastice

Pentru modelarea matematică a comportării acestor materiale fie li se atribuie un modul de elasticitate convențional, asimilând porțiunea inițială a curbei caracteristice cu o dreaptă sau chiar întreaga curbă cu două drepte (model biliniar –ca în figura 34.b), fie se măsoară panta tangentei la curba caracteristică în punctul corespunzător efortului unitar real:

$$E = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \quad (26)$$

Importantă pentru caracterizarea comportării mecanice a materialelor este clasificarea acestora după cum urmează [Buzdugan]:

- **Materiale elastice** –la care deformațiile dispar o dată cu îndepărtarea sarcinilor care le-au produs.
- **Materiale plastice** –care se deformează și nu mai revin la dimensiunile inițiale după îndepărtarea sarcinilor (plastilina, aluatul).
- **Materiale elastoplastice** –care se deformează atât parțial elastic cât și parțial plastic, constituind marea majoritate a materialelor utilizate în inginerie.

În funcție de valorile constantelor elastice (E , G , ν) după diferite direcții din spațiu, materialele pot fi [Buzdugan]:

- **Materiale izotrope** –care au aceleași constante elastice după toate direcțiile (oțelul, cuprul, sticla, cauciucul, etc.).
- **Materiale anizotrope** –care au o comportare elastică diferită după diverse direcții (lemn, roci sedimentare, etc.).

10. Algoritm general de rezolvare a unei probleme prin analiză structurală cu elemente finite

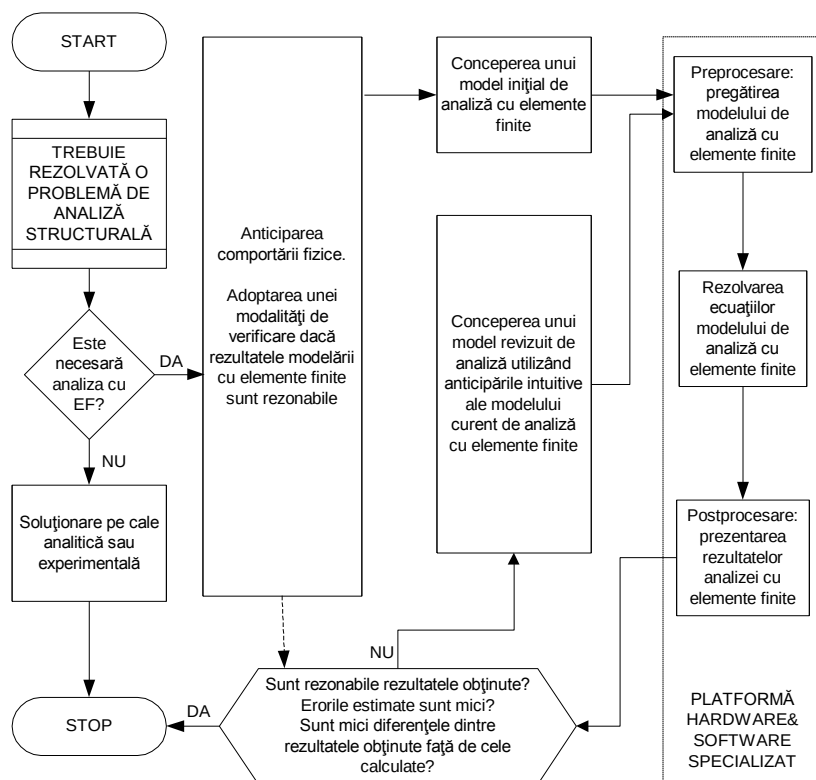


Fig.35. Algoritm general de rezolvare a unei

probleme de analiză structurală utilizând metoda elementelor finite

BIBLIOGRAFIE

- [1] Alămoreanu E., *Metoda elementelor finite și elementelor de frontieră*, U.P.B., 1995.
- [2] Biriș S.Șt., *Metoda elementelor finite – aplicații în construcția de mașini agricole*, Editura Printech, București, 1999.
- [3] Biriș S.Șt., *Metoda elementelor finite – concepte fundamentale*, Editura Printech, București, 2005.
- [4] Blumenfeld M., *Introducere în metoda elementelor finite*, Editura Tehnică, București, 1995.
- [5] Buzdugan Gh., *Rezistența materialelor*, Editura Academiei R.S.R., București, 1986.
- [6] Constantinescu I.N., Munteanu M.Gh., Golumbovici D.C., *Calcul de rezistența structurilor de mașini și utilaje*, Editura Tehnică, București, 1984.
- [7] Faur N., *Elemente finite – fundamente*, Editura Politehnica, Timișoara, 2002.
- [8] Sorohan Șt., *Metoda elementelor finite în ingineria mecanică. Programe și aplicații*, Partea I, U.P.B., 1996.
- [9] Zienkiewicz O.C., *The Finite Element Method in Engineering Science*, McGraw-Hill, London, 1975.