

NICULAE MANAFI

BAZELE MECANICII APLICATE**PARTEA VI-a MECANICA ANALITICĂ
CONȚINUT**

21. PRINCIPIUL LUI D'ALEMBERT	392
21.1 Forța de inerție	392
21.2 Torsorul de inerție la solidul rigid.....	394
21.3. Principiul lui D'Alembert la solidul rigid.....	398
21.4 Metoda cinetostatică la sistemele de corpuri	399
21.5 Metoda cinetostatică la mecanismele plane.....	404
22. PRINCIPIUL LUCRULUI MECANIC VIRTUAL	409
22.1 Legături și deplasări în Mecanica Analitică	409
22.2 Lucrul mecanic virtual	410
22.3 Principiul lucrului mecanic virtual în cazul echilibrului	411
22.4 Principiul lucrului mecanic virtual în cazul mișcării.....	413
23. ECUAȚIILE LUI LAGRANGE	418
23.1 Abstractizări în Mecanica Analitică.....	418
23.2 Echilibrul sistemelor cu mai multe grade de libertate	419
23.3 Deducerea ecuațiilor lui Lagrange	420
23.4 Funcția de forță și funcția disipativă pentru cazurile uzuale.....	424
23.5 Aplicații ale ecuațiilor lui Lagrange.....	427
23.5.1 Sisteme cu un grad de libertate	427
23.5.2 Sisteme cu mai multe grade de libertate	429
24. DINAMICA SISTEMELOR OSCILANTE	431
24.1 Generalități	431
24.2 Oscilatorul liniar	431
24.3 Sisteme cu un grad de libertate	434
24.4 Sisteme cu mai multe grade de libertate.....	437

Partea VI-a MECANICA ANALITICĂ

21. PRINCIPIUL LUI D'ALEMBERT

21.1 Forța de inerție

Fie un punct material de masă m supus acțiunii unui sistem de forțe concurente. Conform legii fundamentale a Dinamicii (principiul acțiunii forței din Mecanica newtoniană), accelerația imprimată este proporțională cu rezultanta \bar{R} a forțelor, are direcția și sensul de acțiune al acesteia:

$$m\bar{a} = \bar{R} = \sum \bar{F} \quad (21.1)$$

Dacă punctul material este supus și la legături, suma din partea dreaptă include și forțele de legătură (reacțiunile). Relația de mai sus se mai poate scrie:

$$\sum \bar{F} - m\bar{a} = 0 \quad (21.2)$$

Cele de al doilea termen al acestei relații, respectiv:

$$\bar{F}_i = -m\bar{a} \quad (21.3)$$

se definește drept *forță de inerție*; relația (21.2) devine:

$$\sum \bar{F} + \bar{F}_i = 0 \quad (21.4)$$

Această relație exprimă *principiul lui D'Alembert* aplicat punctului material, conform căruia *în orice moment al mișcării forța de inerție face echilibrul forțelor date și de legătură*.

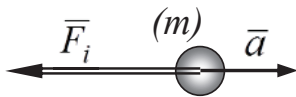


Fig.20.1

După cum se poate observa, forța de inerție nu este o forță reală, direct aplicată prin interacțiunea dintre corpuri sau prin efectul de câmp, ci este o forță fictivă introdusă formal. Cu toate acestea ea exprimă efectul pus în evidență

de principiul inerției din Mecanica newtoniană, conform căruia *orice corp tinde să-și păstreze starea de repaus sau de mișcare rectilinie și uniformă atâta timp cât nu intervin forțe care să modifice această stare*. În consecință, forța de inerție se manifestă numai atunci când corpul are o accelerație și este îndreptată în sens opus acesteia. În acest context, pentru forța de inerție se va utiliza o reprezentare grafică distinctă în raport cu celelalte forțe (fig.20.1), specificând totodată că indicele i provine de la cuvântul *inerție* și nu este un indice de însumare ca în cazurile anterioare. În aplicații, atunci când direcția și sensul accelerației sunt cunoscute, după introducerea forței de inerție în sens invers acesteia, se ignoră semnul negativ din definiția vectorială (21.3). La nivel scalar:

$$F_i = ma \quad (21.5)$$

Principiul lui D'Alembert stă la baza *metodei cinetostatice* prin intermediul căreia problemele de Dinamică pot fi rezolvate utilizând formal metoda cunoscută din Statică referitoare la echilibrul corpurilor și sistemelor de corpuri. Se stabilesc ecuații de echilibru de forma generală (21.4) și se rezolvă acestea în raport cu accelerația necunoscută; se reține faptul că este un echilibru fictiv întrucât corpurile se află în mișcare și posedă o accelerație.

Pentru exemplificare se consideră un punct material care alunecă pe un plan înclinat cu frecare (fig.21.2). Ecuația vectorială de echilibru cinetostatic este:

$$\bar{G} + \bar{N} + \bar{F}_f + \bar{F}_i = 0 \quad (21.6)$$

Ecuațiile scalare de proiecție pe direcția planului înclinat și pe normala la acesta sunt:

$$\begin{cases} G \sin \alpha - F_f - F_i = 0 \\ N - G \cos \alpha = 0 \end{cases} \quad (21.7)$$

Făcând înlocuirile:

$$G = mg \quad F_f = \mu N = \mu mg \cos \alpha \quad F_i = ma \quad (21.8)$$

se obține pentru accelerație cunoscuta relație:

$$a = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) \quad (21.9)$$

Un al doilea exemplu se referă la pendulul matematic (fig.21.3). Ecuația de echilibru cinetostatic este:

$$\bar{G} + \bar{T} + \bar{F}_i = 0 \quad (21.10)$$

Ținând cont de mișcarea circulară a acestuia, pentru forța de inerție se poate scrie relația:

$$\bar{F}_i = -m\bar{a} = -m(\bar{a}_\tau + \bar{a}_v) = \bar{F}_i^\tau + \bar{F}_i^v \quad (21.11)$$

în care intervin componentele tangențială și normală ale forței de inerție relativ la traiectoria circulară a pendulului:

$$\bar{F}_i^\tau = -m\bar{a}_\tau \quad \bar{F}_i^v = -m\bar{a}_v \quad (21.12)$$

În mod uzual, componenta normală a forței de inerție \bar{F}_i^v este numită *forță centrifugă*.

Proiectând ecuația de echilibru pe direcțiile tangentei și normalei se obțin ecuațiile scalare:

$$\begin{cases} -G \sin \theta - F_i^\tau = 0 \\ T - G \cos \theta - F_i^v = 0 \end{cases} \quad (21.13)$$

În aceste ecuații:

$$F_i^\tau = ma_\tau = ml\varepsilon = ml\ddot{\theta} \quad F_i^v = ma_v = ml\omega^2 = ml\dot{\theta}^2 \quad (21.14)$$

Făcând înlocuirile în ecuațiile scalare de mai sus se găsesc ecuațiile diferențiale ale mișcării pendulului matematic, respectiv:

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin \theta \\ T = ml\dot{\theta}^2 + mg \cos \theta \end{cases} \quad (21.15)$$

care se integrează în modul arătat în cap.13.3.4.

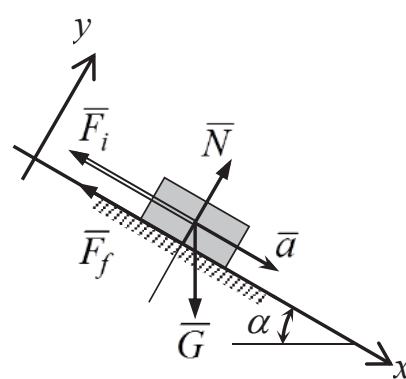


Fig.21.2

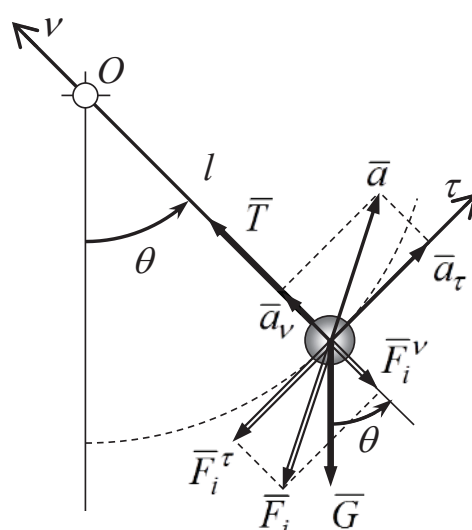


Fig.21.3

21.2 Torsorul de inerție la solidul rigid

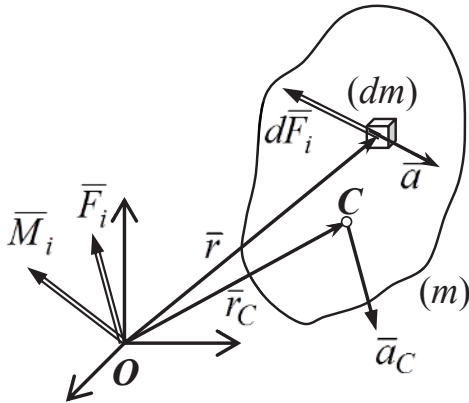


Fig.21.4

punct oarecare, pentru ele putându-se calcula un *torsor de inerție* compus dintr-o rezultantă și un moment rezultant față de punctul considerat:

$$\tau_i(\bar{F}_i, \bar{M}_i) \quad (21.16)$$

Pentru determinarea componentelor acestuia se pornește de la forța de inerție aplicată unei mase elementare dm (fig.21.4) care se reduce în punctul O prin:

$$\begin{cases} d\bar{F}_i = -\bar{a} dm \\ d\bar{M}_i = \bar{r} \times d\bar{F}_i = -(\bar{r} \times \bar{a}) dm \end{cases} \quad (21.17)$$

Se integrează aceste relații pe întreaga masă a corpului. Reamintind teorema momentelor statice (cap.4.3) conform căreia:

$$m\bar{r}_C = \int_{(m)} \bar{r} dm \quad (21.18)$$

rezultanta forțelor de inerție se determină făcând următoarea prelucrare:

$$\begin{aligned} \bar{F}_i &= \int_{(m)} d\bar{F}_i = - \int_{(m)} \bar{a} dm = - \int_{(m)} \frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} dm = - \frac{d^2}{dt^2} \left(\int_{(m)} \bar{r} dm \right) = \\ &= - \frac{d^2}{dt^2} (m\bar{r}_C) = -m \frac{d^2 \bar{r}_C}{dt^2} = -m\bar{a}_C = -\dot{\bar{H}} \end{aligned} \quad (21.19)$$

Momentul rezultant al forțelor de inerție se determină în modul următor:

$$\begin{aligned} \bar{M}_i &= \int_{(m)} d\bar{M}_i = - \int_{(m)} (\bar{r} \times \bar{a}) dm = - \int_{(m)} \left(\bar{r} \times \frac{d\bar{v}}{dt} \right) dm = \\ &= - \frac{d}{dt} \left(\int_{(m)} (\bar{r} \times \bar{v}) dm \right) = -\dot{\bar{K}}_O \end{aligned} \quad (21.20)$$

În aceste demonstrații s-a ținut cont de faptul că derivarea în raport cu timpul și integrarea relativ la masa corpului sunt independente între ele și ordinea acestor operațiuni poate fi inversată. S-a demonstrat că torsorul de reducere al forțelor de inerție este egal cu derivata în raport cu timpul luată cu semn schimbat a torsorului cinetic, definit în relația (17.110), oricare ar fi punctul de reducere.

Concentrat, se poate scrie:

$$\tau_i(\bar{F}_i, \bar{M}_i) = -\dot{\tau}_{cin}(\bar{H}, \bar{K}_O) \quad (21.21)$$

În mișcarea de rotație a corpului față de un punct (cap.17.1.3), relația matriceală pentru momentul cinetic este:

$$\mathbf{K}_O = \mathbf{J}_O \cdot \boldsymbol{\omega} \quad (21.22)$$

în care \mathbf{J}_O este matricea de inerție calculată față de un sistem de referință cu originea în punctul O ; dacă corpul este în mișcare față de acest punct, momentele de inerție mecanice componente ale acestei matrici sunt mărimi variabile în raport cu timpul. Pentru a evita derivarea acestora este util ca reducerea forțelor de inerție să se facă în raport cu un sistem de referință mobil, solidar cu corpul, față de care momentele de inerție mecanice sunt constante. Torsorul de inerție are în acest caz aceeași formă dată în rel.21.21, *toate mărimile vectoriale proiectându-se pe axele acestui sistem de referință* (fig.21.5). Se justifică astfel și motivul pentru care atât în Cinematica cât și în Dinamica solidului rigid din capitolele anterioare, toți parametrii cinematici și dinamici au fost raportați la un sistem de referință mobil solidar cu corpul. Se mai face precizarea că pentru derivatele absolute ale impulsului și momentului cinetic se aplică regula de derivare dată de relația (18.5).

Recapitulând demonstrația precedentă, componentele torsorului de inerție au forma vectorială:

$$\bar{F}_i = -m\bar{a}_C = -\bar{H} \quad (21.23)$$

$$\bar{M}_i = -\bar{K}_O \quad (21.24)$$

Forma matriceală echivalentă a acestor relații este:

$$\mathbf{F}_i = -m \cdot \mathbf{a}_C \quad (21.25)$$

$$\mathbf{M}_i = -\dot{\mathbf{K}}_O = -\mathbf{J}_O \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \quad (21.26)$$

La nivel de proiecții pe axele sistemului de referință menționat aceste relații matriceale generale iau forma explicită:

$$\begin{bmatrix} F_{ix} \\ F_{iy} \\ F_{iz} \end{bmatrix} = -m \begin{bmatrix} a_{Cx} \\ a_{Cy} \\ a_{Cz} \end{bmatrix} \quad (21.27)$$

$$\begin{bmatrix} M_{ix} \\ M_{iy} \\ M_{iz} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \dot{K}_x \\ \dot{K}_y \\ \dot{K}_z \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{bmatrix} \quad (21.28)$$

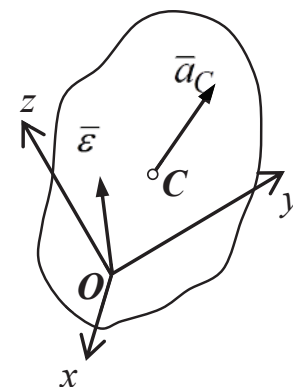


Fig.21.5

Printr-o alegere convenabilă a sistemului de referință solidar cu corpul, astfel ca originea să coincidă cu centrul de masă iar axele acestuia să fie și direcții principale de inerție, relațiile scalare provenite din aceste expresii matriciale capătă o formă simplificată.

Pornind de la relațiile generale prezentate mai înainte se pot calcula rezultanta forțelor de inerție și momentul rezultat al acestora pentru cazurile particulare ale mișcării solidului rigid.

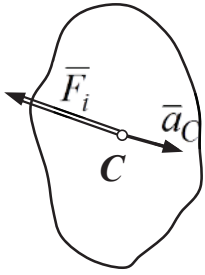


Fig.21.6

a) mișcarea de translație.

Toate punctele corpului au aceeași viteză și aceeași accelerație, iar $\bar{\omega} = \bar{\varepsilon} = 0$. În consecință:

$$\bar{F}_i = -m\bar{a}_C \quad \bar{M}_i = 0 \quad (21.29)$$

Torsorul de inerție are o singură componentă – forța de inerție rezultantă (fig.21.6).

Forțele de inerție alcătuiesc, ca și forțele de greutate, un sistem de forțe paralele distribuite în masa corpului, reducibile la o rezultantă unică aplicată în centrul de masă al corpului.

b) mișcarea de rotație în jurul unui punct fix.

Dacă punctul fix este chiar centrul de masă al corpului, atunci $\bar{a}_C = 0$ și, în consecință, rezultanta forțelor de inerție este nulă ($\bar{F}_i = 0$). Torsorul de inerție are o singură componentă – momentul rezultant al forțelor de inerție, care se calculează cu relația generală (21.28).

Dacă sistemul de referință propriu este alcătuit din direcțiile principale de inerție, atunci această relație capătă forma:

$$\begin{bmatrix} M_{ix} \\ M_{iy} \\ M_{iz} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{bmatrix} \quad (21.30)$$

în care J_1, J_2, J_3 sunt momentele de inerție mecanice principale, calculate față de direcțiile menționate.

În cazul particular al unei sfere de masă m și rază R , articulată în centrul ei de masă (fig.21.7), cele trei momente principale sunt egale; ținând cont de relația între momentele de inerție mecanice în spațiu se poate scrie:

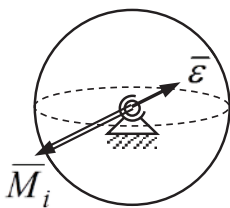


Fig.21.7

$$J_1 = J_2 = J_3 = \frac{2}{3} J_C \quad (21.31)$$

în care J_C se calculează cu relația (16.204), respectiv:

$$J_C = \frac{3}{5} mR^2 \quad (21.32)$$

Momentul rezultant al forțelor de inerție ia forma matriceală:

$$\begin{bmatrix} M_{ix} \\ M_{iy} \\ M_{iz} \end{bmatrix} = -\frac{2}{3} J_C \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{bmatrix} \quad (21.33)$$

din care se deduce relația vectorială:

$$\bar{M}_i = -\frac{2}{3} J_C \bar{\varepsilon} \quad (21.34)$$

Momentul va fi coliniar cu accelerația unghiulară, în sens contrar acesteia.

c) mișcarea de rotație în jurul unei axe fixe

Vectorii $\bar{\omega}$ și $\bar{\varepsilon}$ sunt coliniari cu axa de rotație; sistemul de referință al corpului se alege cu centrul de masă conținut în planul Oxz (fig.21.8), astfel că:

$$\bar{r}_C = x_C \bar{i} + z_C \bar{k} \quad (21.35)$$

Centrul de masă descrie o traiectorie circulară într-un plan paralel cu Oxy ; rezultanta forțelor de inerție va fi:

$$\begin{aligned} \bar{F}_i &= -m \bar{a}_C = -m(\bar{a}_C^v + \bar{a}_C^t) = \\ &= -m \bar{a}_C^v - m \bar{a}_C^t = \bar{F}_i^v + \bar{F}_i^t \end{aligned} \quad (21.36)$$

La nivel scalar cele două componente ale acesteia se calculează cu relațiile:

$$\begin{cases} F_i^v = m a_C^v = m x_C \omega^2 \\ F_i^t = m a_C^t = m x_C \varepsilon \end{cases} \quad (21.37)$$

Se observă că ambele componente depind de distanța x_C de la centrul de masă la axa de rotație.

Derivata în raport cu timpul a momentului cinetic (cap.18.2.1) este:

$$\dot{\bar{K}}_O = (-J_{xz} \varepsilon + J_{yz} \omega^2) \bar{i} + (-J_{yz} \varepsilon - J_{xz} \omega^2) \bar{j} + J_z \varepsilon \bar{k} \quad (21.38)$$

astfel că momentul resultant al forțelor de inerție se calculează cu relația:

$$\bar{M}_i = -\dot{\bar{K}}_O = (J_{xz} \varepsilon - J_{yz} \omega^2) \bar{i} + (J_{yz} \varepsilon + J_{xz} \omega^2) \bar{j} - J_z \varepsilon \bar{k} \quad (21.39)$$

Dacă centrul de masă se află pe axa de rotație ($x_C = 0$) rezultanta forțelor de inerție este nulă. Dacă axa de rotație Oz este axă de simetrie, respectiv direcție principală de inerție, atunci $J_{xz} = J_{yz}$ și momentul de inerție resultant devine:

$$\bar{M}_i = -J_z \varepsilon \bar{k} = -J_z \bar{\varepsilon} \quad (21.40)$$

Se regăsec astfel cele două condiții pentru echilibrarea rotorilor, expuse în cap.18.2.2, conform cărora pentru funcționarea corectă a unui rotor este necesar ca centrul său de masă să se afle pe axa de rotație și aceasta să fie direcție principală de inerție, respectiv axă de simetrie.

În cazul uzual al unui disc de masă m și rază R al cărui ax este introdus în interiorul unor lagăre fixe (fig.21.9), centrul de masă se află pe axa de rotație și în consecință $\bar{F}_i = 0$. Momentul resultant al forțelor de inerție se calculează la nivel scalar cu relația:

$$M_i = J_C \varepsilon = \frac{1}{2} m R^2 \varepsilon \quad (21.41)$$

întrucât în acest caz $J_z = J_C$.

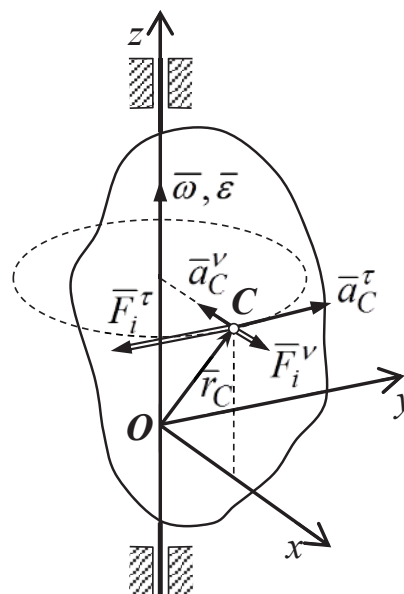


Fig.21.8

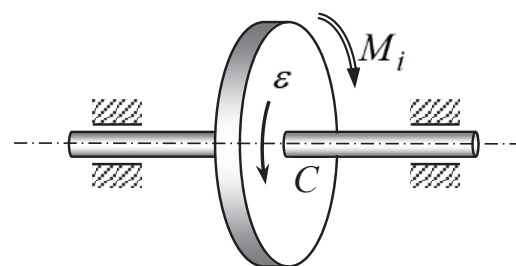


Fig.21.9

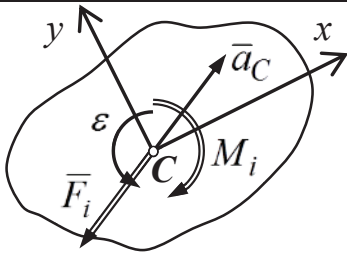


Fig.21.10

d) mișcarea plan paralelă

Sistemul de referință mobil se alege cu originea în centrul de masă C al corpului (fig.21.10). Accelerația acestui punct este conținută în planul mișcării și, în consecință, rezultanta forțelor de inerție se va găsi de asemenea în acest plan:

$$\bar{F}_i = -m\bar{a}_C \quad (21.42)$$

Vectorii vitezei unghiulare $\bar{\omega}$ și accelerației unghiulare $\bar{\varepsilon}$ sunt perpendiculari pe planul mișcării. Conform celor arătate în cap.18.4, (rel.18.130 ÷ 18.132) derivata momentului cinetic este dată de relația:

$$\dot{\bar{K}}_C = (-J_{xz}\varepsilon + J_{yz}\omega^2)\bar{i} + (-J_{yz}\varepsilon - J_{xz}\omega^2)\bar{j} + J_z\varepsilon\bar{k} \quad (21.43)$$

Momentul resultant al forțelor de inerție este:

$$\bar{M}_i = -\dot{\bar{K}}_C = (J_{xz}\varepsilon - J_{yz}\omega^2)\bar{i} + (J_{yz}\varepsilon + J_{xz}\omega^2)\bar{j} - J_z\varepsilon\bar{k} \quad (21.44)$$

Se observă că acest moment are aceeași formă cu cel de la mișcarea de rotație în jurul unei axe fixe, ca urmare a faptului că mișcarea plan paralelă se consideră compusă dintr-o translație cu parametrii cinematici ai centrului de masă și o rotație în jurul unei axe perpendiculare pe planul mișcării în acest punct. Dacă aceasta este și axă de simetrie, ca și în cazul precedent, momentul resultant al forțelor de inerție se calculează cu relația:

$$\bar{M}_i = -J_z\varepsilon\bar{k} = -J_z\bar{\varepsilon} \quad (21.45)$$

Fie, de exemplu, cazul uzual al unei roți de masă m și rază R care se rostogolește pe un plan (fig.21.11); forțele de inerție se reduc în raport cu centrul de masă al roții. Componentele torsorului de inerție se calculează la nivel scalar cu relațiile:

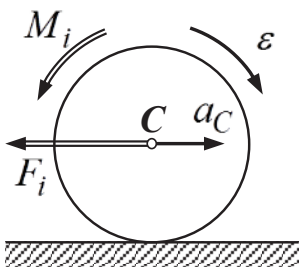


Fig.21.11

$$F_i = ma_C \quad M_i = J_C\varepsilon = \frac{1}{2}mR^2\varepsilon \quad (21.46)$$

Dacă rostogolirea este fără alunecare, atunci cele două accelerații sunt legate între ele prin relația $a_C = R\varepsilon$.

21.3. Principiul lui D'Alembert la solidul rigid

S-a arătat în capitolul precedent (rel.21.21) legătura între torsorul de inerție și derivata torsorului cinetic, respectiv:

$$\tau_i(\bar{F}_i, \bar{M}_i) = -\dot{\tau}_{cin}(\bar{H}, \bar{K}_O) \quad (21.47)$$

În cap.17.4 (rel.17.111) s-a demonstrat că derivata în raport cu timpul a torsorului cinetic este egală cu torsorul de reducere al sistemului de forțe aplicate corpului:

$$\dot{\tau}_{cin}(\bar{H}, \bar{K}_O) = \tau_O(\bar{R}, \bar{M}_O) \quad (21.48)$$

Eliminând torsorul cinetic între aceste relații se obține:

$$\tau_O(\bar{R}, \bar{M}_O) + \tau_i(\bar{F}_i, \bar{M}_i) = 0 \quad (21.49)$$

Această relație sintetică permite enunțarea principiului lui D'Alembert extins în cazul solidului rigid – *în orice moment al mișcării torsorul forțelor de inerție face echilibrul torsorului forțelor date și de legătură aplicate corpului*. La nivel vectorial, această expresie se traduce prin relațiile generale:

$$\begin{cases} \sum \bar{F} + \bar{F}_i = 0 \\ \sum \bar{M} + \bar{M}_i = 0 \end{cases} \quad (21.50)$$

Sumele din aceste relații includ atât forțele date, direct aplicate, cât și reacțiunile din legăturile corpului.

Așa cum s-a arătat în Statică, în cazul unui sistem general de forțe dispuse în spațiu, celor două ecuații vectoriale le corespund 6 ecuații scalare de echilibru cinetostatic:

$$\begin{cases} \sum F_x + F_{ix} = 0 \\ \sum F_y + F_{iy} = 0 \\ \sum F_z + F_{iz} = 0 \end{cases} \quad (21.51) \quad \begin{cases} \sum M_x + M_{ix} = 0 \\ \sum M_y + M_{iy} = 0 \\ \sum M_z + M_{iz} = 0 \end{cases} \quad (21.52)$$

În funcție de configurația sistemului de forțe numărul acestor ecuații se reduce. Astfel, dacă corpul este acționat de un sistem de forțe coplanare (de exemplu într-un plan Oxy) numărul de ecuații se reduce la 3, respectiv:

$$\begin{cases} \sum F_x + F_{ix} = 0 \\ \sum F_y + F_{iy} = 0 \\ \sum M_z + M_{iz} = 0 \end{cases} \quad (21.53)$$

Printr-o alegere convenabilă a sistemului de referință aceste sisteme de ecuații pot căpăta forme mai simple; întrucât necunoscutele sunt tocmai accelerațiile, liniare sau unghiulare, este rezonabil ca ele să se poată proiecta în adevărată măsură pe una dintre axele sistemului de referință.

21.4 Metoda cinetostatică la sistemele de corpuri

Metoda cinetostatică aplicată la sistemele de corpuri urmează în general aceleași etape de rezolvare ca și metoda izolării corpurilor din Statică (cap.7.2). Pe baza analizei mișcării sistemului se alcătuieste mai întâi tabelul cinematic, în modul expus și exemplificat în cap.19. Considerând cunoscute detaliile metodei izolării corpurilor, se prezintă în continuare succint etapele metodei cinetostatice, cu precizările impuse de aplicarea principiului lui D'Alembert pentru fiecare din corpurile componente ale sistemului.

– se desenează separat fiecare corp din sistem, redus la elementele grafice esențiale;

– se desenează forțele exterioare date ale căror direcții și sensuri de acțiune sunt de regulă cunoscute;

– se desenează reacțiunile exterioare și interioare;

– se reprezintă accelerațiile liniare și unghiulare pentru fiecare corp, în funcție de mișcarea acestuia;

– se introduc la fiecare corp forțele și momentele de inerție rezultante, în sens invers accelerațiilor;

– se stabilesc relațiile de calcul pentru expresiile scalare ale acestora fără a se mai lua în considerare semnul negativ din definiția vectorială; în aceste relații vor fi introduse, pe baza tabelului cinematic, accelerațiile considerate principale;

– se scriu pentru fiecare corp ecuațiile de echilibru cinetostatic;

– se adaugă, după caz, ecuațiile de definiție pentru forțele și momentele de frecare, ținând cont că corpurile se află în mișcare; face excepție cazul rostogolirii fără alunecare la care forța de frecare se definește printr-o inecuație;

– se stabilește ordinea de rezolvare a sistemului de ecuații, eventual printr-o schemă logică;

– se elimină succesiv toate necunoscutele (de regulă acestea sunt reacțiunile din legături); în funcție de numărul gradelor de libertate ale sistemului se obțin una sau mai multe ecuații liniare care vor conține numai forțele date și forțele și momentele de inerție;

– se înlocuiesc în aceste ecuații forțele și momentele de inerție prin expresiile lor;

– se rezolvă aceste ecuații în raport cu accelerațiile principale;

În funcție de obiectivul urmărit, calculele pot fi continuate în modul expus în cap.19.2 referitor la metoda impulsului.

Problema 21.1 Să se determine accelerația sistemului din fig.21.12.

Date: $G, r, \mu = 1/4, s = r/10\sqrt{3}, J_2 = J_3 = 4Gr^2/g, \alpha = 30^\circ$

Cerute: a_1

Rezolvare: Momentul de inerție al corpului 4 față de centrul său de masă este:

$$J_4 = m_4 R_4^2 / 2 = 9Gr^2 / 4g \quad (21.54)$$

Din tabelul cinematic este importantă în acest caz numai coloana accelerațiilor (tab.21.1)

Tabelul 21.1

Nr.	Mișc.	Accelerații
1	T	a_1
2	T	$a_2 = a_1$
	R	$\varepsilon_2 = a_1 / 2r$
3	R	$\varepsilon_3 = 3a_1 / 4r$
4	T	$a_4 = 3a_1 / 4$
	R	$\varepsilon_4 = a_1 / 2r$

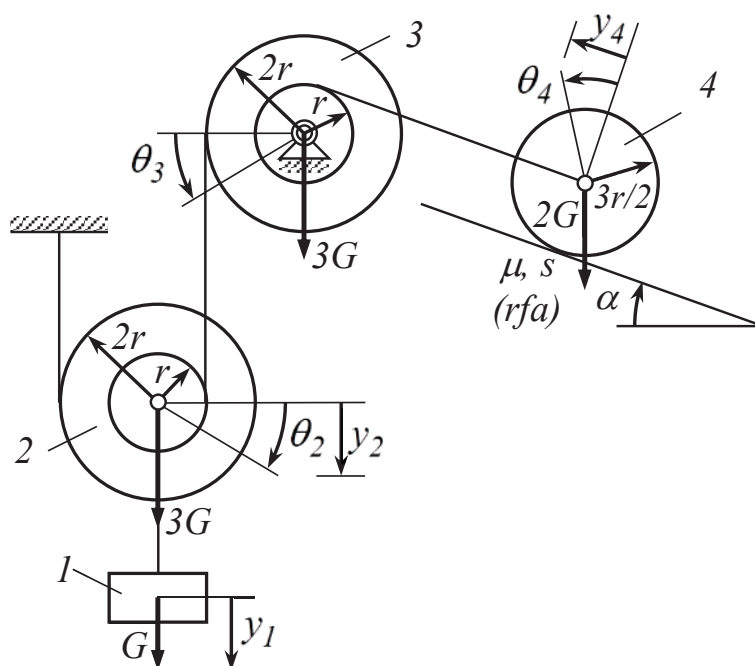


Fig.21.12

Schemele de încărcare ale corpurilor sunt prezentate în fig.21.13.

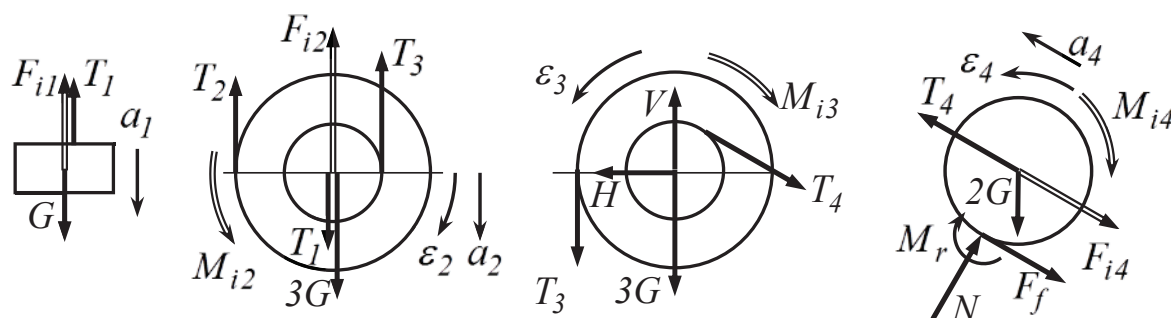


Fig.21.13

Forțele și momentele de inerție au următoarele expresii:

$$F_{i1} = m_1 a_1 = \frac{G}{g} a_1 \quad (1)$$

$$F_{i2} = m_2 a_2 = \frac{3G}{g} a_1 \quad (2)$$

$$F_{i2} = m_2 a_2 = \frac{3G}{g} a_1 \quad (3)$$

$$M_{i3} = J_3 \varepsilon_3 = \frac{4Gr^2}{g} \cdot \frac{3a_1}{4r} \quad (4)$$

$$F_{i4} = m_4 a_4 = \frac{2G}{g} \cdot \frac{3a_1}{4} \quad (5) \quad (21.55)$$

$$M_{i4} = J_4 \varepsilon_4 = \frac{9Gr^2}{4g} \cdot \frac{a_1}{2r} \quad (6)$$

Ecuțiile de echilibru cinetostatic sunt următoarele:

Corpul 1:

$$T_1 - G + F_{i1} = 0 \quad (1)$$

Corpul 2:

$$T_2 + T_3 - T_1 - 3G + F_{i2} = 0 \quad (2)$$

$$T_3 r - T_2 \cdot 2r + M_{i2} = 0 \quad (3)$$

Corpul 3:

$$T_4 \cos \alpha - H = 0 \quad (4)$$

$$V - T_3 - T_4 \sin \alpha - 3G = 0 \quad (5)$$

$$T_3 \cdot 2r - T_4 r - M_{i3} = 0 \quad (6)$$

Corpul 4:

$$T_4 - F_f - 2G \sin \alpha - F_{i4} = 0 \quad (7) \quad (21.56)$$

$$N - 2G \cos \alpha = 0 \quad (8)$$

$$F_f \cdot 3r/2 - M_r - M_{i4} = 0 \quad (9)$$

$$M_r = s N \quad (10)$$

La corpul 4, care se rostogolește fără alunecare, forța de frecare este una dintre necunoscute, inecuația $F_f \leq \mu N$ neputând fi folosită. Reacțiunile H și V se determină din ecuațiile (4) și (5), ecuații care nu participă la calculul accelerației. Se izolează din restul ecuațiilor celelalte necunoscute, după cum urmează:

$$N = 2G \cos \alpha \quad (1)$$

$$M_r = s N \quad (2)$$

$$F_f = \frac{2}{3r} (M_r + M_{i4}) \quad (3)$$

$$T_1 = G - F_{i1} \quad (4)$$

$$T_2 = \frac{1}{3} (4G - F_{i1} - F_{i2} + \frac{M_{i2}}{r}) \quad (5)$$

$$T_3 = \frac{2}{3} (4G - F_{i1} - F_{i2}) - \frac{1}{3} \frac{M_{i2}}{r} \quad (6) \quad (21.57)$$

$$T_4 = F_f + 2G \sin \alpha + F_{i4} \quad (7)$$

În continuare se introduc aceste expresii în ecuația (21.56/6):

$$\frac{4}{3} F_{i1} + \frac{4}{3} F_{i2} + \frac{2}{3r} M_{i2} + \frac{1}{r} M_{i3} + F_{i4} + \frac{2}{3r} M_{i4} = \frac{16}{3} G - \frac{2}{3r} M_r - 2G \sin \alpha \quad (21.58)$$

Făcând înlocuirile forțelor și momentelor de inerție se găsește în final:

$$a_1 = 256g/715r = 0,358g/r \quad (21.59)$$

Problema 21.2 Să se calculeze accelerațiile sistemului cu două grade de libertate din fig.21.14.

Date: $G, r, J_3 = J_4 = 4Gr^2/g, \mu = 1/\sqrt{3}, \alpha = 30^\circ$

Cerute: a_3, ε_3 , valorile forțelor și momentelor de inerție, valorile reacțiunilor.

Rezolvare: Tabelul cinematic, util și în acest caz numai la nivelul accelerațiilor, are configurația dată în tab.21.2.

Tabelul 21.2

Nr.	Mișc.	Accelerații
1	T	$a_1 = a_3 + 2r\varepsilon_3$
2	T	$a_2 = a_3 - r\varepsilon_3$
3	T	a_3
	R	ε_3
4	R	$\varepsilon_4 = a_3 / 2r$
5	T	$a_5 = a_3 / 2$

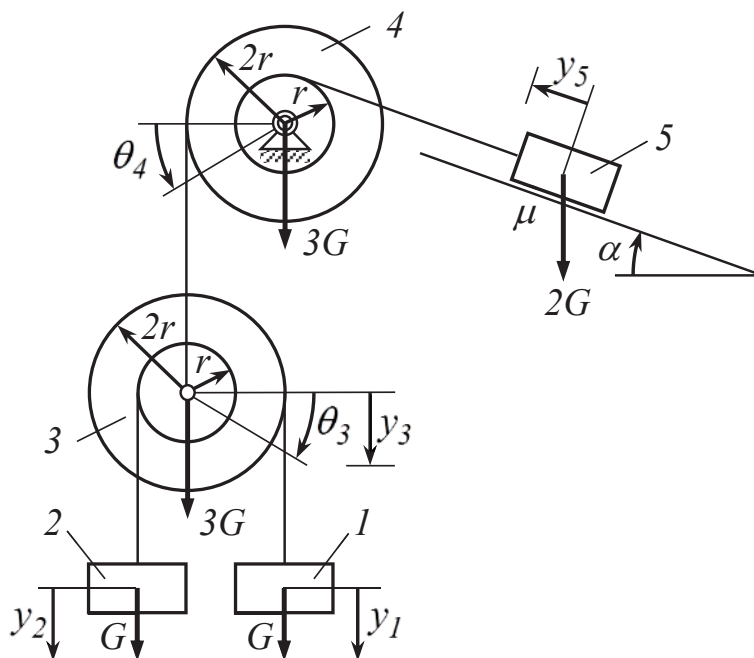


Fig.21.14

Schemele de încărcare ale corpurilor sunt prezentate în fig.21.15.

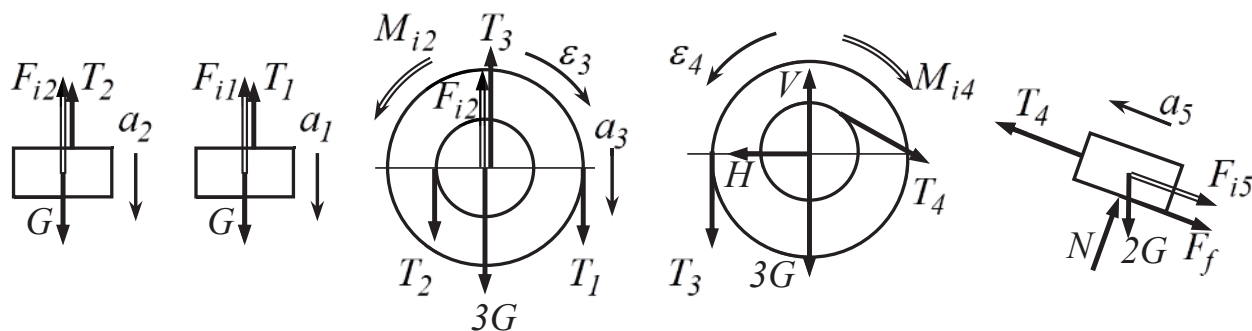


Fig.21.15

Forțele și momentele de inerție au următoarele expresii:

$$F_{i1} = m_1 a_1 = \frac{G}{g} (a_3 + 2r\varepsilon_3) \quad (1)$$

$$F_{i2} = m_2 a_2 = \frac{G}{g} (a_3 - r\varepsilon_3) \quad (2)$$

$$F_{i3} = m_3 a_3 = \frac{3G}{g} a_3 \quad (3)$$

$$M_{i3} = J_3 \varepsilon_3 = \frac{4Gr^2}{g} \varepsilon_3 \quad (4)$$

$$M_{i4} = J_4 \varepsilon_4 = \frac{4Gr^2}{g} \cdot \frac{a_3}{r} \quad (5) \quad (21.60)$$

$$F_{i5} = m_5 a_5 = \frac{2G}{g} \cdot \frac{a_3}{2} \quad (6)$$

Ecuatiile de echilibru cinetostatic sunt următoarele:

Corpul 1:

$$T_1 - G + F_{i1} = 0 \quad (1)$$

Corpul 2:

$$T_2 - G + F_{i2} = 0 \quad (2)$$

Corpul 3:

$$T_3 - T_1 - T_2 - 3G + F_{i3} = 0 \quad (3)$$

$$T_2 r - T_1 \cdot 2r + M_{i3} = 0 \quad (4)$$

Corpul 4:

$$T_4 \cos \alpha - H = 0 \quad (5)$$

$$V - T_3 - T_4 \sin \alpha - 3G = 0 \quad (6)$$

$$T_3 \cdot 2r - T_4 r - M_{i4} = 0 \quad (7)$$

Corpul 5:

$$T_4 - F_f - 2G \sin \alpha - F_{i5} = 0 \quad (8)$$

$$N - 2G \cos \alpha = 0 \quad (9)$$

$$F_f = \mu N \quad (10)$$

(21.61)

Se extrag în continuare expresiile reacțiunilor interne:

$$T_1 = G - F_{i1} \quad (1)$$

$$T_2 = G - F_{i2} \quad (2)$$

$$T_3 = 5G - F_{i1} - F_{i2} - F_{i3} \quad (3)$$

$$N = 2G \cos \alpha \quad (4)$$

$$F_f = 2\mu G \cos \alpha \quad (5) \quad (21.62)$$

$$T_4 = 2G(\sin \alpha + \mu \cos \alpha) + F_{i5} \quad (3)$$

Se introduc aceste expresii în ecuația (21.61/4) și (21.61/7):

$$\begin{cases} 2F_{i1} - F_{i2} + \frac{M_{i3}}{r} = G \\ 2F_{i1} + 2F_{i2} + 2F_{i3} + \frac{M_{i4}}{r} + F_{i5} = 10G - 2G(\sin \alpha + \mu \cos \alpha) \end{cases} \quad (21.63)$$

Se introduc expresiile forțelor și momentelor de inerție din relațiile (21.60) și datele problemei; se obține un sistem de două ecuații cu două necunoscute:

$$\begin{cases} a_3 + 9r\varepsilon_3 = g \\ 11a_3 - 2r\varepsilon_3 = 8g \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a_3 = 74/101 \cdot g \cong 0,733g \\ \varepsilon_3 = 3/101 \cdot g/r \cong 0,023 \cdot g/r \end{cases} \quad (21.64)$$

Se pot calcula în continuare valorile forțelor de inerție și ale momentelor de inerție înlocuind aceste valori în relațiile (21.60):

$$F_{i1} = \frac{G}{g}(a_3 + 2r\varepsilon_3) = \frac{80}{101}G \quad (1)$$

$$F_{i2} = \frac{G}{g}(a_3 - r\varepsilon_3) = \frac{71}{101}G \quad (2)$$

$$F_{i3} = \frac{3G}{g}a_3 = \frac{222}{101}G \quad (3)$$

$$M_{i3} = \frac{4Gr^2}{g}\varepsilon_3 = \frac{12}{101}Gr \quad (4)$$

$$M_{i4} = \frac{4Gr^2}{g} \cdot \frac{a_3}{r} = \frac{296}{101}Gr \quad (5) \quad (21.65)$$

$$F_{i5} = \frac{2G}{g} \cdot \frac{a_3}{2} = \frac{74}{101}G \quad (6)$$

Reacțiunile din legături se calculează pornind de la relațiile (21.62):

$$T_1 = 21/101 \cdot G \quad (1)$$

$$T_2 = 30/101 \cdot G \quad (2)$$

$$T_3 = 132/101 \cdot G \quad (3)$$

$$T_4 = 175/101 \cdot G \quad (4)$$

$$N = G\sqrt{3} \quad (5)$$

$$F_f = G \quad (6)$$

$$H = T_4 \cos \alpha = 175\sqrt{3}/202 \cdot G \quad (7) \quad (21.66)$$

$$V = 3G + T_3 + T_4 \sin \alpha = \frac{913}{202}G \quad (8)$$

21.5 Metoda cinetostatică la mecanismele plane^{*)}

În analiza dinamică a unui mecanism plan se consideră cunoscută legea de mișcare a elementului conducător și, pornind de la aceasta, distribuția parametrilor cinematici ai punctelor de interes din configurația schemei lui cinemate. Obiectivul principal al acestei analize îl constituie calculul reacțiunilor din cuplele de legătură dintre elementele mecanismului pentru toată succesiunea de poziții din cadrul unui ciclu cinematic.

Metoda cinetostatică destinată acestui obiectiv, prezentată succint în cele ce urmează, reprezintă o continuare în domeniul analizei dinamice a metodei analitice din Cinematică, detaliată în cap.10.4.5 și exemplificată în cap.11 și cap.12. Se consideră necesară prezentarea în prealabil a unor aspecte de detaliu specifice.

Între proiecțiile unei forțe pe axele sistemului local Axy și ale celui global OXY (fig.21.16) exista relația matriceală:

$$\begin{bmatrix} F_X \\ F_Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix} \quad (21.67)$$

precum și cea inversă:

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_X \\ F_Y \end{bmatrix} \quad (21.68)$$

în care intervine transpusa matricii de rotație.

Momentul unei forțe oarecare față de un punct se exprimă în cazul general prin produsul vectorial:

$$\bar{M} = \bar{r} \times \bar{F} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \rightarrow \begin{cases} M_x = yF_z - zF_y \\ M_y = zF_x - xF_z \\ M_z = xF_y - yF_x \end{cases} \quad (21.69)$$

Aceleași expresii pentru proiecțiile momentului se obțin utilizând forma matriceală a produsului vectorial:

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} \quad (21.70)$$

În plan (fig.21.17) intervin unele particularități: $z = 0$, $F_z = 0$, $M_x = M_y = 0$, $M_z \equiv M$. Relația de mai sus ia forma simplificată:

$$M = [-y ; x] \cdot \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix} \quad (21.71)$$

Momentele sunt pozitive în sens trigonometric și negative în sens orar.

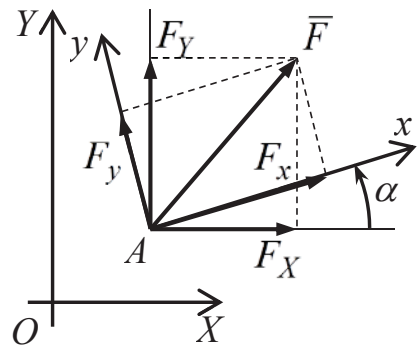


Fig.21.16

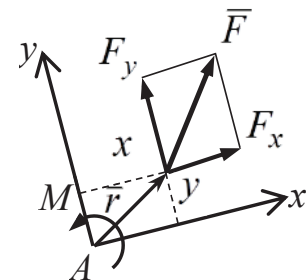


Fig.21.17

^{*)} O tratare mai amplă a acestui subiect va fi efectuată într-o lucrare ulterioară.

Cele mai răspândite legături din configurația mecanismelor plane sunt articulațiile cilindrice și culisele cu translație rectilinie. Pentru forțele aplicate unui element oarecare se pot stabili niște convenții de reprezentare valabile în cazul general; fac excepție forțele tehnologice, a căror configurație și legi de variație sunt specifice situațiilor concrete.

Reacțiunea totală dintr-o articulație are forma generală:

$$\bar{R} = H\bar{i} + V\bar{j} \quad (21.72)$$

în care componentele H și V au direcțiile axelor de coordonate locale și sensurile pozitive ale acestora (fig.21.18). În cazul unei culise aflată în mișcare relativă pe o bară rectilinie suprapusă axei locale Ax reacțiunea totală aplicată barei are forma:

$$\bar{R} = F_f\bar{i} + N\bar{j} \quad (21.73)$$

în care intervin reacțiunea normală N și forța de frecare F_f (fig.21.19).

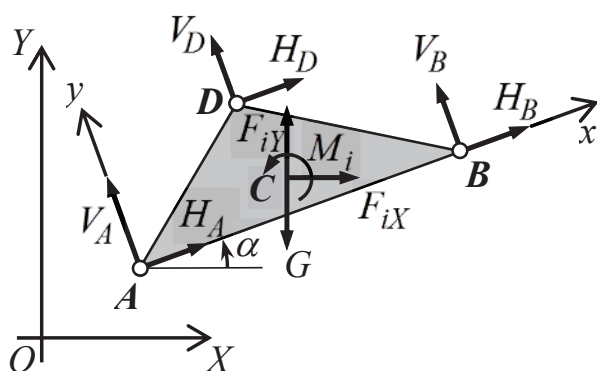


Fig.21.18

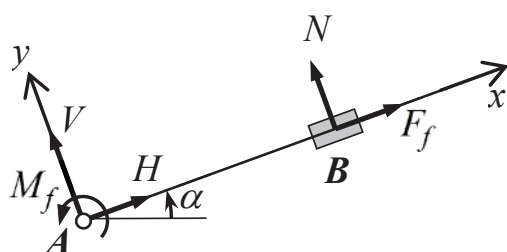


Fig.21.19

Momentul de frecare dintr-o articulație care leagă între ele două elemente are sensul invers vitezei unghiulare relative dintre acestea și se evaluează cu relația:

$$M_f = -\mu_0 r_0 \sqrt{H^2 + V^2} \cdot \frac{\omega_r}{|\omega_r|} \quad (21.74)$$

în care μ_0 este coeficientul de frecare din articulație iar r_0 este raza axului acesteia (cap.6.4.4).

Forța de frecare aplicată unei culise are sensul invers vitezei relative a acesteia în raport cu suportul de alunecare; ea poate fi evaluată utilizând relația:

$$F_f = -\mu |N| \cdot \frac{v_r}{|v_r|} \quad (21.75)$$

Pentru introducerea în calcul a forțelor de inerție se observă mai întâi că în analiza cinematică accelerațiile centrelor de masă ale corpurilor se determină prin proiecțiile lor pe axele sistemului de referință global OXY , iar vectorul accelerației unghiulare ε este perpendicular pe planul mișcării. Torsorul de inerție va fi:

$$\begin{bmatrix} F_{iX} \\ F_{iY} \end{bmatrix} = -m \begin{bmatrix} a_{CX} \\ a_{CY} \end{bmatrix} \quad (21.76)$$

$$M_i = -J_C \varepsilon \quad (21.77)$$

Semnul negativ este în acest caz obligatoriu. Utilizând relația de transformare (21.68) se obține pentru forța de inerție și pentru greutate:

$$\begin{bmatrix} F_{ix} \\ F_{iy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_{iX} \\ F_{iY} \end{bmatrix} \quad (21.78) \quad \begin{bmatrix} G_x \\ G_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -G \end{bmatrix} \quad (21.79)$$

Ecuatiile de echilibru cinetostatic au forma generală:

$$\sum \bar{R} + \bar{F}_i + \bar{G} = 0 \quad (21.80)$$

$$\sum [M_A(\bar{R}) + M_f] + M_A(\bar{F}_i) + M_A(\bar{G}) + M_i = 0 \quad (21.81)$$

Deoarece mișcarea elementului este în plan ecuația de momente are formă scalară.

Pentru calculul reacțiunilor este comod ca ecuațiile de proiecție pentru forțe să se facă pe direcțiile sistemului local de referință; cu notațiile din fig.21.18 și 21.19, ecuației vectoriale de echilibru cinetostatic (21.80) îi vor corespunde ecuațiile scalare generale:

$$\begin{cases} \sum H + F_f + F_{ix} + G_x = 0 \\ \sum V + N + F_{iy} + G_y = 0 \end{cases} \quad (21.82)$$

Momentul față de originea A al reacțiunii dintr-o articulație, de exemplu cea din punctul D (fig.21.18), se calculează cu relația (21.71), respectiv:

$$M_A(\bar{R}_D) + M_f = [-y_D; x_D] \cdot \begin{bmatrix} H_D \\ V_D \end{bmatrix} + M_f = -y_D H_D + x_D V_D + M_f \quad (21.83)$$

În această relație momentul de frecare din articulația D se calculează cu relația (21.74). În cazul particular al culisei din punctul B (fig.21.19), momentul este:

$$M_A(\bar{R}_B) = [0; x_B] \cdot \begin{bmatrix} F_f \\ N \end{bmatrix} = x_B N \quad (21.84)$$

Forța de inerție și greutatea sunt aplicate în centrul de masă C , astfel că:

$$M_A(\bar{F}_i) + M_A(\bar{G}) = [-y_C; x_C] \cdot \begin{bmatrix} F_{ix} + G_x \\ F_{iy} + G_y \end{bmatrix} \quad (21.85)$$

Transmiterea reacțiunilor de la un element la altul într-o articulație (fig.21.20) se face pe baza echivalenței:

$$\bar{R}_{12} = -\bar{R}_{21} \quad (21.86)$$

La nivel matriceal această echivalență se traduce prin relația:

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} H_{12} \\ V_{12} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} H_{21} \\ V_{21} \end{bmatrix} \quad (21.87)$$

din care se deduc ecuațiile scalare:

$$\begin{cases} H_{12} \cos \alpha - V_{12} \sin \alpha = -H_{21} \cos \beta + V_{21} \sin \beta \\ H_{12} \sin \alpha + V_{12} \cos \alpha = -H_{21} \sin \beta - V_{21} \cos \beta \end{cases} \quad (21.88)$$

În cazul în care există și frecare în articulație se adaugă relația:

$$M_{f12} = -M_{f21} \quad (21.89)$$

În cazul culisei cu mișcare de translație în lungul unei bare rectilinii (fig.21.19), relației (21.86) îi vor corespunde egalitățile:

$$\begin{cases} N_{12} = -N_{21} \\ F_{f12} = -F_{f21} \end{cases} \quad (21.90)$$

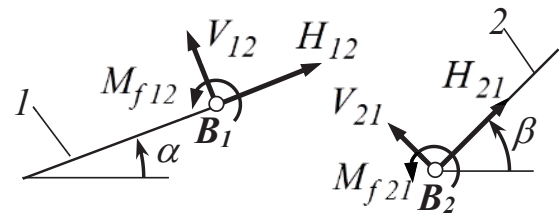


Fig.21.20

Problema 21.3. Mecanismul din fig.21.21 este compus din discul 1, biela 2 și culisa 3 ale căror greutatea sunt cunoscute. Discul este antrenat de un cuplu motor M iar asupra culisei acționează forța elastică a unui arc spiral având constanta elastică k și rezistența datorată frecării, coeficientul de frecare fiind μ . Considerând efectuat calculul parametrilor cinematici ai punctelor de interes (poziții, viteze, accelerații), să se stabilească ecuațiile de echilibru cinetostatic pentru determinarea reacțiilor.

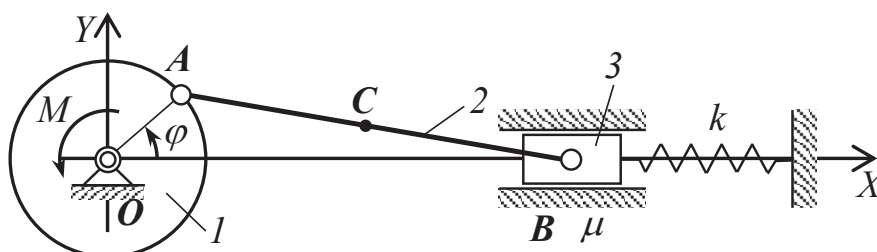


Fig.21.21

Rezolvare: Se izolează corpurile și se introduc forțele date, reacțiunile și forțele de inerție.

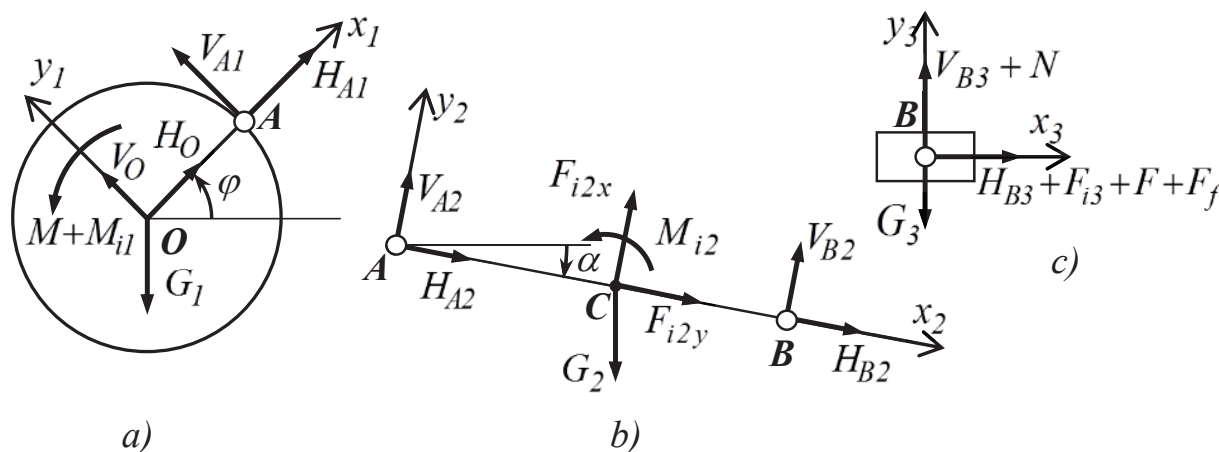


Fig.21.22

Forțele și momentele de inerție ale corpurilor sunt determinate cu relații de forma (21.76) și (21.77). Pe baza celor expuse mai înainte, se scriu mai întâi ecuațiile de echilibru cinetostatic sub forma matriceală din care se deduc apoi ecuațiile scalare.

Pentru discul 1 (fig.22.21, a) aceste ecuații sunt:

$$\begin{bmatrix} H_O + H_{A1} \\ V_O + V_{A1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -G_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (21.91)$$

$$M + M_{i1} + \begin{bmatrix} -y_{1A} & x_{1A} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} H_{A1} \\ V_{A1} \end{bmatrix} = 0 \quad (21.92)$$

în care $x_{1A} = OA = R$ și $y_{1A} = 0$. Ecuațiile scalare provenite din acestea sunt:

$$\begin{cases} H_O + H_{A1} - G_1 \sin\varphi = 0 \\ V_O + V_{A1} - G_1 \cos\varphi = 0 \\ M + M_{i1} + V_{A1}R = 0 \end{cases} \quad (21.93)$$

Pentru biela 2 (fig.22.21, *b*) ecuațiile matriceale sunt:

$$\begin{bmatrix} H_{A2} + H_{B2} + F_{i2x} \\ V_{A2} + V_{B2} + F_{i2y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -G_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (21.94)$$

$$[-y_{2C} \quad x_{2C}] \cdot \begin{bmatrix} F_{i2x} - G_2 \sin\alpha \\ F_{i2y} - G_2 \cos\alpha \end{bmatrix} + [-y_{2B} \quad x_{2B}] \cdot \begin{bmatrix} H_{B2} \\ V_{B2} \end{bmatrix} + M_{i2} = 0 \quad (21.95)$$

în care $x_{2C} = AC, y_{2C} = 0$ și $x_{2B} = AB, y_{2B} = 0$. Se obțin ecuațiile scalare:

$$\begin{cases} H_{A2} + H_{B2} + F_{i2x} - G_2 \sin\alpha = 0 \\ V_{A2} + V_{B2} + F_{i2y} - G_2 \cos\alpha = 0 \\ (F_{i2y} - G_2 \cos\alpha) \cdot AC + V_{B2} \cdot AB = 0 \end{cases} \quad (21.96)$$

Forța exercitată de arcul spiral, în montajul din fig. 21.21, este:

$$F = -k(l - l_0) \quad (21.97)$$

în care l și l_0 sunt lungimea curentă și respectiv în stare liberă a arcului.

La culisa 3 (fig.21.22, *c*) sistemul de referință local coincide cu cel global astfel că ecuațiile scalare se obțin direct:

$$\begin{cases} H_{B3} + F_{i3} + F + F_f = 0 \\ V_{B3} + N - G_3 = 0 \end{cases} \quad (21.98)$$

La acestea se adaugă ecuația de definiție a forței de frecare:

$$F_f = -\mu |N| \cdot \frac{v_B}{|v_B|} \quad (21.99)$$

Pe baza relațiilor (21.88) se pot scrie ecuațiile de transmitere a reacțiilor:

$$\begin{cases} H_{A1} \cos\varphi - V_{A1} \sin\varphi = -H_{A2} \cos\alpha + V_{A2} \sin\alpha \\ H_{A1} \sin\varphi + V_{A1} \cos\varphi = -H_{A2} \sin\alpha - V_{A2} \cos\alpha \end{cases} \quad (21.100)$$

$$\begin{cases} H_{B2} \cos\alpha - V_{B2} \sin\alpha = -H_{B3} \\ H_{B2} \sin\alpha + V_{B2} \cos\alpha = -V_{B3} \end{cases} \quad (21.101)$$

Sistemul format din ecuațiile (21.93), (21.96), (21.100) și (21.101) permite determinarea tuturor reacțiilor; se poate determina deasemenea valoarea cuplului M considerat ca moment de echilibrare.

22. PRINCIPIUL LUCRULUI MECANIC VIRTUAL

22.1 Legături și deplasări în Mecanica Analitică

După cum s-a arătat în partea de Statică, pentru un punct material legăturile uzuale sunt contactul cu o curbă sau cu o suprafață iar pentru un solid rigid aceste legături sunt rezemarea, articulația, încastrarea și prinderea în fire. Prin definiție, legăturile care pot fi impuse unui corp sunt restricții geometrice care reduc numărul gradelor de libertate ale acestuia. În cazul punctului material, de exemplu, cele trei grade de libertate, specifice punctului material liber, se reduc la două în cazul constrângerii de a se afla pe o suprafață și la unul în cazul obligației de a rămâne pe o curbă. La solidul rigid, cu excepția încastrării, care imobilizează corpurile aflate în contact, fiecare din legăturile menționate permite corpului un anumit număr de grade de mobilitate relativă.

În Mecanica Analitică se utilizează o anumită clasificare a legăturilor, mai comod de exemplificat în cazul punctului material; legăturile acestuia pot fi definite analitic și prin ecuații matematice. Într-un spațiu cartezian tridimensional o suprafață oarecare se exprimă printr-o ecuație de forma:

$$f(x, y, z) = 0 \quad (22.1)$$

iar o curbă în spațiu este definită ca intersecție a două suprafețe, respectiv:

$$f_1(x, y, z) = 0 \quad f_2(x, y, z) = 0 \quad (22.2)$$

Este evident că coordonatele punctului material aflat pe o suprafață sau pe o curbă trebuie să verifice ecuațiile acestora.

O legătură se numește *scleronomă* dacă timpul nu intervine explicit în ecuațiile acesteia. În cazul punctului material aflat pe o suprafață sau o curbă fixă, legătura se definește prin ecuații de forma (22.1), respectiv (22.2). Legătura se numește *reonomă* dacă timpul apare explicit în ecuații:

$$f(x, y, z, t) = 0 \quad (22.3)$$

$$f_1(x, y, z, t) = 0 \quad f_2(x, y, z, t) = 0 \quad (22.4)$$

În acest caz suprafața sau curba este mobilă în raport cu sistemul de referință.

Legăturile se numesc *olonome* dacă în ecuațiile de definiție nu intervin vitezele și accelerațiile; ele se exprimă prin ecuații având formele de mai sus. Legăturile sunt *neolonome* dacă în ecuațiile lor apar și derivatele de ordinul I și II ale coordonatelor. O legătură scleronomă neolonomă are forma:

$$f(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}) = 0 \quad (22.5)$$

$$f_1(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}) = 0 \quad f_2(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}) = 0 \quad (22.6)$$

În legătura reonomă neolonomă intervine și timpul:

$$f(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}, t) = 0 \quad (22.7)$$

$$f_1(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}, t) = 0 \quad f_2(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}, t) = 0 \quad (22.8)$$

În aspectele teoretice din Mecanica Analitică, pentru simplificarea tratării, legăturile se consideră *ideale*, respectiv fără frecare; în aplicații, forțele și momentele de frecare se introduc printre forțele date.

Deplasările permise de fiecare tip de legătura, posibil a fi efectuate, se numesc *deplasări virtuale*. Sub acțiunea unei forțe corpul respectiv poate efectua o *deplasare reală*; este evident că deplasarea reală se află printre deplasările virtuale permise de legătura respectivă. Dacă legătura permite un singur grad de libertate (cazul, de exemplu, al unei articulații cilindrice), atunci deplasarea reală și cea virtuală sunt unice și coincid. În Mecanica Analitică se operează cu valori elementare ale acestor deplasări.

Recapitulând, se pot da următoarele definiții:

– *deplasări reale* – deplasări infinitezimale, compatibile cu legăturile, efectuate sub acțiunea forțelor direct aplicate; sunt dependente de timp;

– *deplasări virtuale* – deplasări infinitezimale, compatibile cu legăturile, posibil a fi efectuate; sunt independente de timp.

Așa cum s-a arătat în capitolele precedente, deplasarea reală a unui punct material se exprimă prin diferențiala $d\vec{r}$ a vectorului său de poziție în orice sistem de coordonate. Pentru deplasarea virtuală a acestuia se utilizează notația $\delta\vec{r}$, care se extinde și asupra variației virtuale a coordonatelor. Expresiile de definiție ale acestor deplasări în diferite sisteme de coordonate au forme echivalente. Astfel:

– în *coordonate carteziene*, pornind de la expresia vectorului de poziție:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad (22.9)$$

se obțin relațiile:

$$d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k} \quad (22.10) \quad \delta\vec{r} = \delta x\vec{i} + \delta y\vec{j} + \delta z\vec{k} \quad (22.11)$$

– în *coordonate polare* (cap.9.2.2) vectorul de poziție are expresia:

$$\vec{r} = r\vec{u}_r \quad (22.12)$$

Prin diferențiere, pornind de la relațiile (9.39), se obține:

$$d\vec{r} = dr\vec{u}_r + r d(\vec{u}_r) = dr\vec{u}_r + r d\theta\vec{u}_\theta \quad (22.13)$$

Deplasarea virtuală va fi:

$$\delta\vec{r} = \delta r\vec{u}_r + r\delta\theta\vec{u}_\theta \quad (22.14)$$

– în *coordonate intrinseci* (cap.9.2.5), pornind de la relația (9.93), se stabilește:

$$d\vec{r} = ds\vec{\tau} \quad (22.15)$$

$$\delta\vec{r} = \delta s\vec{\tau} \quad (22.16)$$

22.2 Lucrul mecanic virtual

După cum s-a arătat în Dinamică, cu deplasarea elementară reală $d\vec{r}$ (fig.22.1) se poate defini un lucru mecanic elementar prin produsul scalar:

$$dL = \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (22.17)$$

În mod analog, corespunzător deplasării virtuale se definește un lucru mecanic elementar virtual:

$$\delta L = \vec{F} \cdot \delta\vec{r} \quad (22.18)$$

În sistemele de coordonate uzuale lucrul mecanic elementar virtual are forme analoge celui elementar real.

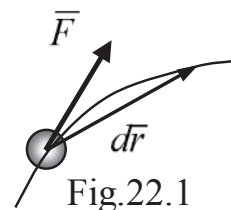


Fig.22.1

– în coordonate carteziene:

$$dL = F_x dx + F_y dy + F_z dz \quad (22.19) \quad \delta L = F_x \delta x + F_y \delta y + F_z \delta z \quad (22.20)$$

– în coordonate polare:

$$\begin{aligned} dL &= (F_r \bar{u}_r + F_\theta \bar{u}_\theta) \cdot (dr \bar{u}_r + r d\theta \bar{u}_\theta) = \\ &= F_r dr + F_\theta r d\theta = F_r dr + M d\theta \end{aligned} \quad (22.21)$$

în care M reprezintă momentul forței față de polul coordonatelor. În mod analog:

$$\delta L = F_r \delta r + F_\theta r \delta \theta = F_r \delta r + M \delta \theta \quad (22.22)$$

– în coordonate intrinseci:

$$dL = (F_\tau \bar{\tau} + F_\nu \bar{\nu} + F_\beta \bar{\beta}) \cdot (ds \bar{\tau}) = F_\tau ds \quad (22.23)$$

$$\delta L = F_\tau \delta s \quad (22.24)$$

Câteva exemple uzuale de lucru mecanic virtual sunt prezentate în fig.22.2.

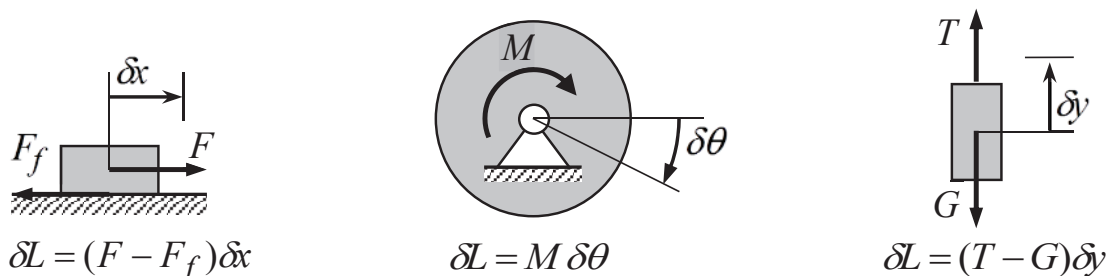


Fig.22.2

22.3 Principiul lucrului mecanic virtual în cazul echilibrului

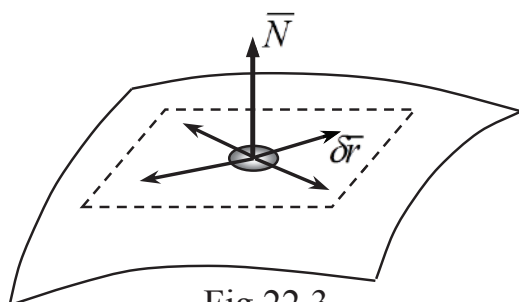


Fig.22.3

Se consideră un punct material aflat în echilibru pe o suprafață sub acțiunea unui sistem de forțe (fig.22.3). Reacțiunea din partea suprafeței este perpendiculară pe planul tangent la aceasta în punctul respectiv; deplasările virtuale sunt conținute în acest plan tangent. Ecuația de echilibru este:

$$\sum \bar{F} + \bar{N} = 0 \quad (22.25)$$

Prin înmulțirea scalară a acestei ecuații cu deplasarea virtuală $\delta \bar{r}$ se obține lucrul mecanic virtual:

$$\delta L = (\sum \bar{F}) \cdot \delta \bar{r} + \bar{N} \cdot \delta \bar{r} = 0 \quad (22.26)$$

Se observă că $\bar{N} \cdot \delta \bar{r} = 0$ datorită perpendicularității celor doi vectori. În consecință:

$$\delta L = (\sum \bar{F}) \cdot \delta \bar{r} = 0 \quad (22.27)$$

Această relație exprimă *principiul lucrului mecanic virtual*, conform căruia *condiția necesară și suficientă pentru ca un punct material să se afle în echilibru este ca lucrul mecanic virtual al sistemului de forțe date, direct aplicate, să fie nul*. Dacă echilibrul este cu frecare, forța de frecare se include printre acestea.

Principiul lucrului mecanic virtual se extinde și pentru cazul unui solid rigid aflat echilibru sub acțiunea unui sistem de forțe și momente; forma generală a acestuia este:

$$\delta L = \sum (\bar{F}_j \cdot \delta \bar{r}_j) + \sum (M_k \delta \theta_k) = 0 \quad (22.28)$$

în care j și k sunt în acest caz indici de numerotare, indicele i fiind utilizat la definirea forțelor și momentelor de inerție. În această relație $\delta \bar{r}_j$ sunt deplasările virtuale ale punctelor de aplicație ale forțelor iar $\delta \theta_k$ sunt rotațiile virtuale. Fie, de exemplu, cazul unei roți trasă pe un plan înclinat aflată în echilibru cu frecare (fig.22.4). Aplicând principiul lucrului mecanic virtual se obține expresia:

$$\delta L = (F - G \sin \alpha - F_f) \delta x - M_r \delta \theta = 0 \quad (22.29)$$

Atât forța de frecare cât și momentul de frecare de rostogolire se includ printre forțele date, direct aplicate, condițiile de echilibru fiind cele cunoscute din Statică, respectiv $F_f \leq \mu N$ și $M_r \leq s N$.

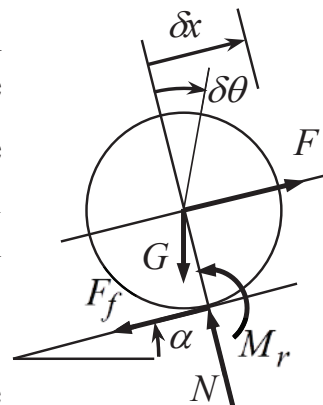


Fig.22.4

Principiul lucrului mecanic virtual poate fi aplicat și sistemelor de corpuri aflate în echilibru, ținând cont de câteva observații:

– relațiile între deplasările virtuale ale corpurilor componente sunt analoge celor dintre deplasările reale; ca și în cazul sistemelor aflate în mișcare, pe baza unui tabel cinematic deplasările virtuale se reduc la cele corespunzătoare parametrilor poziționali principali.

– lucrul mecanic virtual se calculează în mod analog celui real; este evident că forțele care nu dau lucru mecanic real nu vor da nici virtual (forțele aplicate în puncte fixe, cele perpendiculare pe direcția deplasărilor, cele din centrele instantanee de rotație precum și reacțiunile reciproce dintre corpurile sistemului).

– deplasările virtuale sunt infinitezimale dar diferite de zero; în consecință, expresiile care înmulțesc deplasările principale, obținute după reducere, sunt nule.

Problema 22.1 Să se determine valoarea cuplului motor M pentru care sistemul din fig.22.5 rămâne în echilibru.

Rezolvare: Relațiile între deplasările virtuale sunt analoge celor reale, în ipoteza că sistemul s-ar afla în mișcare:

$$\delta \theta_2 = \frac{r_1}{R_2} \delta \theta_1 \quad (22.30)$$

$$\delta x_3 = r_2 \delta \theta_2 = \frac{r_1 r_2}{R_2} \delta \theta_1$$

Pentru calculul lucrului mecanic virtual se iau în considerare numai cuplul motor și forța de frecare astfel că:

$$\delta L = M \delta \theta_1 - F_f \delta x_3 = 0 \quad (22.31)$$

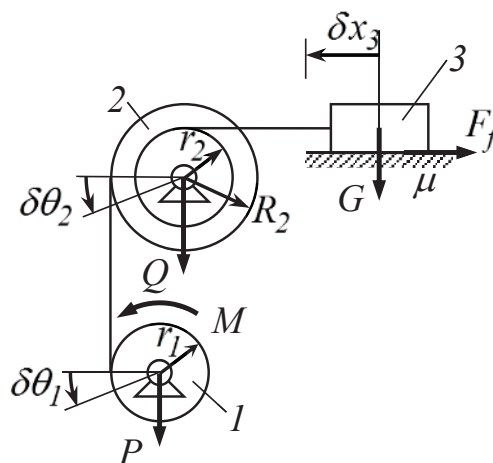


Fig.22.5

Reducând deplasările virtuale la cea a corpului I , se mai poate scrie:

$$\delta L = (M - F_f \frac{r_1 r_2}{R_2}) \delta \theta_1 = 0 \quad (22.32)$$

Deoarece $\delta \theta_1 \neq 0$ expresia din paranteză este nulă. Cu observația că $F_f \leq \mu N$, în care $N = G$, se obține în continuare:

$$F_f = M \frac{R_2}{r_1 r_2} \leq \mu G \rightarrow M \leq \mu \frac{r_1 r_2}{R_2} G \quad (22.33)$$

22.4 Principiul lucrului mecanic virtual în cazul mișcării

Principiul lui D'Alembert, prezentat pe larg în capitolul 21, stipulează că în orice moment al mișcării tursorul forțelor de inerție face echilibrul forțelor date și de legătură care acționează asupra unui corp sau asupra unui sistem de corpuri. Deși, așa cum s-a arătat, nu este vorba de un echilibru real ci de unul fictiv, se poate aplica corpului sau sistemului respectiv principiul lucrului mecanic virtual, introducând printre forțele date, direct aplicate, și forțele și momentele de inerție.

Considerând un sistem de corpuri care se pune în mișcare pornind din repaus și având în consecință accelerațiile îndreptate în sensul deplasărilor, relația generală (2.28) va lua forma:

$$\delta L = \sum (\bar{F}_j - \bar{F}_{ij}) \cdot \delta \bar{r}_j + \sum (M_k - M_{ik}) \delta \theta_k = 0 \quad (22.34)$$

în care indicele i definește forțele și momentele de inerție. Semnul acestora în ecuație va depinde în mod evident de sensul accelerațiilor în raport cu deplasările.

Reluând exemplul roții trase pe planul înclinat din capitolul precedent, principiul lucrului mecanic virtual se exprimă prin relația:

$$\delta L = (F - F_i - G \sin \alpha - F_f) \delta x - (M_r + M_i) \delta \theta = 0 \quad (22.35)$$

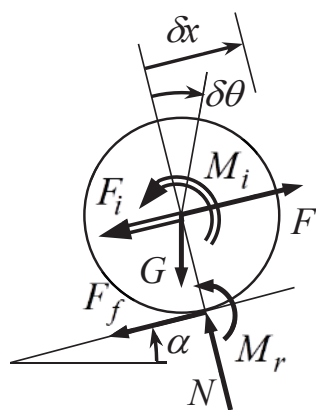


Fig.22.6

în care $F_i = m a_C$ și $M_i = J_C \varepsilon$, în ipoteza că accelerația centrului de masă și accelerația unghiulară au sensul deplasărilor virtuale (fig.22.6). În acest caz $M_r = sN$ și $F_f = \mu N$. Dacă roata se rostogolește fără alunecare, punctul de contact cu planul înclinat este centrul instantaneu de rotație al roții; forța de frecare $F_f \leq \mu N$ nu va participa la

calculul lucrului mecanic, lipsind din ecuația (22.35).

Observațiile menționate în capitolul precedent referitor la sistemele de corpuri aflate în echilibru rămân valabile și pentru sistemele aflate în mișcare. Dacă un sistem are mai multe grade de libertate, sunt nule expresiile care înmulțesc deplasările virtuale principale.

Ecuțiile rezultate prin aplicarea principiului lucrului mecanic virtual în cazul sistemelor în mișcare servesc la determinarea accelerațiilor principale. Pentru calculul reacțiunilor se poate utiliza în continuare metoda cinetostatică.

Problema 22.2 Sistemul din fig.22.7 se pune în mișcare pornind din repaus.

Date: $G, r, \mu = 1/4, s = r/20\sqrt{3}, \alpha = 30^\circ,$

$$J_2 = J_3 = 4Gr^2/g, J_4 = m_4 r_4^2 / 2 = 9Gr^2/4g$$

Cerute: a_1 , forțele și momentele de inerție, reacțiunile

Rezolvare: Sistemul are un singur grad de libertate. Se alcătuieste tabelul cinematic în modul expus în capitolele precedente, în funcție de parametrii poziționali și cinematici ai corpului 1; tabelul 22.1 va conține deplasările virtuale, accelerațiile precum și forțele și momentele de inerție calculate cu acestea.

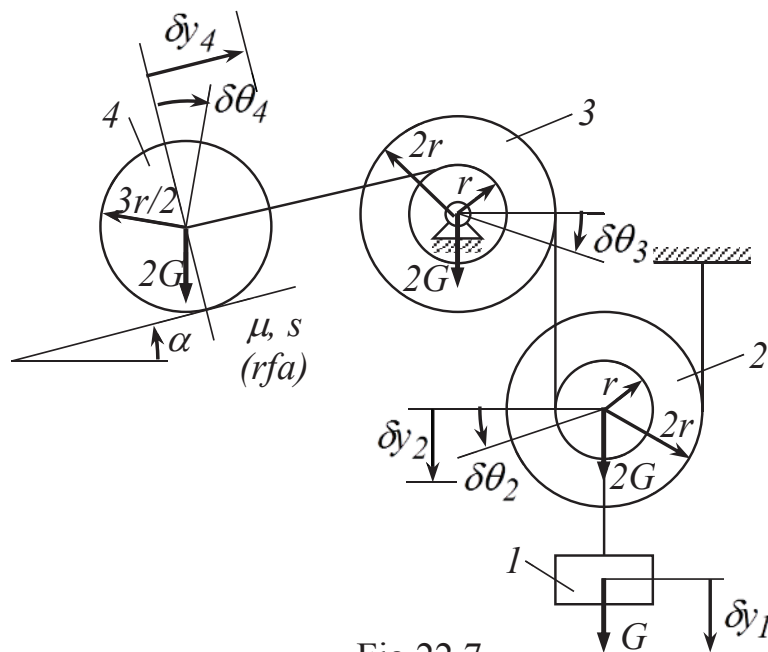


Fig.22.7

Tabelul 22.1

Corp	Mișcarea	Deplasarea virtuală	Accelerația	Forțe și momente de inerție
1	T	δy_1	a_1	$F_{i1} = m_1 a_1 = \frac{G}{g} a_1$
2	T	$\delta y_2 = \delta y_1$	$a_2 = a_1$	$F_{i2} = m_2 a_2 = \frac{2G}{g} a_1$
	R	$\delta \theta_2 = \frac{1}{2r} \delta y_1$	$\varepsilon_2 = \frac{1}{2r} a_1$	$M_{i2} = J_2 \varepsilon_2 = \frac{2Gr}{g} a_1$
3	R	$\delta \theta_3 = \frac{3}{4r} \delta y_1$	$\varepsilon_3 = \frac{3}{4r} a_1$	$M_{i3} = J_3 \varepsilon_3 = \frac{3Gr}{g} a_1$
4	T	$\delta y_4 = \frac{3}{4} \delta y_1$	$a_4 = \frac{3}{4} a_1$	$F_{i4} = m_4 a_4 = \frac{3G}{2g} a_1$
	R	$\delta \theta_4 = \frac{1}{2r} \delta y_1$	$\varepsilon_4 = \frac{1}{2r} a_1$	$M_{i4} = J_4 \varepsilon_4 = \frac{9Gr}{8g} a_1$

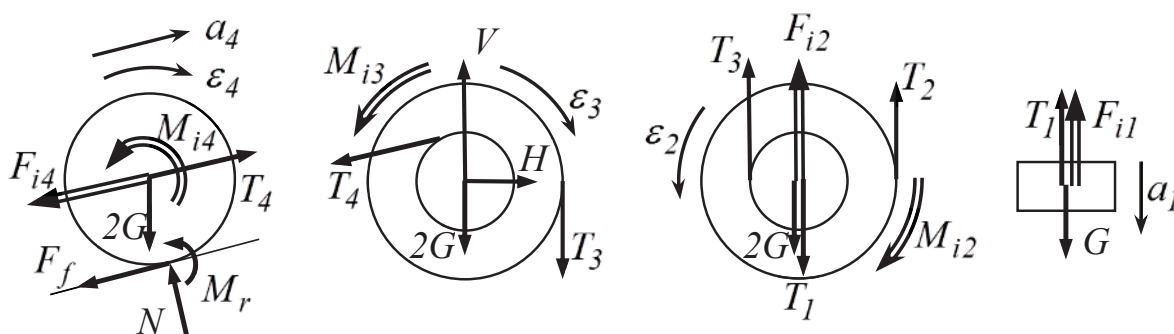


Fig.22.8

Cu forțele din fig.22.8 și deplasările din fig.22.7 se stabilește ecuația corespunzătoare principiului lucrului mecanic virtual:

$$\begin{aligned} \delta L = (G - F_{i1})\delta y_1 + (2G - F_{i2})\delta y_2 - M_{i2}\delta\theta_2 - \\ - M_{i3}\delta\theta_3 - (2G\sin\alpha + F_{i4})\delta y_4 - (M_{i4} + M_r)\delta\theta_4 = 0 \end{aligned} \quad (22.36)$$

Forța de frecare $F_f \leq \mu N$ aplicată corpului 4 nu dă lucru mecanic și constituie, împreună cu celelalte reacțiuni, o necunoscută a problemei; momentul de frecare de rostogolire este $M_r = sN = s \cdot 2G\cos\alpha$. Pe baza tabelului cinematic se înlocuiesc deplasările virtuale:

$$\begin{aligned} \delta L = [(G - F_{i1}) + (2G - F_{i2}) - M_{i2}\frac{1}{2r} - M_{i3}\frac{3}{4r} - \\ - (2G\sin\alpha + F_{i4})\frac{3}{4} - (M_{i4} + M_r)\frac{1}{2r}]\delta y_1 = 0 \end{aligned} \quad (22.37)$$

Întrucât $\delta y_1 \neq 0$ rezultă că expresia din paranteza dreaptă este nulă. În consecință:

$$3G - \frac{3}{2}G\sin\alpha - \frac{s}{r}G\cos\alpha = F_{i1} + F_{i2} + \frac{1}{2r}M_{i2} + \frac{3}{4r}M_{i3} + \frac{3}{4}F_{i4} + \frac{1}{2r}M_{i4} \quad (22.38)$$

Se înlocuiesc forțele și momentele de inerție prin expresiile lor din tab.22.1. Ținând cont și de datele problemei se obține:

$$\frac{89}{40}G = \frac{127}{16} \cdot \frac{Ga_1}{g} \quad \rightarrow \quad a_1 = \frac{178}{635}g \cong 0,28g \quad (22.39)$$

Cu expresiile din tab.22.1 se calculează forțele și momentele de inerție.

Tabelul 22.2

Corp 1	$F_{i1} = \frac{G}{g}a_1 = \frac{178}{635}G = 0,28G$	
Corp 2	$F_{i2} = \frac{2G}{g}a_1 = \frac{356}{635}G = 0,56G$	$M_{i2} = \frac{2Gr}{g}a_1 = \frac{356}{635}Gr = 0,56Gr$
Corp 3	$M_{i3} = \frac{3Gr}{g}a_1 = \frac{534}{635}Gr = 0,84Gr$	
Corp 4	$F_{i4} = \frac{3G}{2g}a_1 = \frac{534}{1270}Gr = 0,42G$	$M_{i4} = \frac{9Gr}{8g}a_1 = \frac{801}{2540}Gr = 0,315Gr$

Pentru calculul reacțiunilor se utilizează metoda cinetostatică. Pe baza încărcărilor din fig.22.8 se scriu mai întâi ecuațiile:

$$\text{Corpul 1: } T_1 + F_{i1} - G = 0 \quad (22.40)$$

$$\text{Corpul 2: } T_2 + T_3 - T_1 - 2G + F_{i2} = 0 \quad (22.41)$$

$$T_2 \cdot 2r - T_3 \cdot r - M_{i2} = 0 \quad (22.42)$$

$$\text{Corpul 3: } H - T_4 \cos \alpha = 0 \quad (22.43)$$

$$V - 2G - T_3 - T_4 \sin \alpha = 0 \quad (22.44)$$

$$T_4 \cdot r - T_3 \cdot 2r + M_{i3} = 0 \quad (22.45)$$

$$\text{Corpul 4: } T_4 - F_{i4} - F_f - 2G \sin \alpha = 0 \quad (22.46)$$

$$N - 2G \cos \alpha = 0 \quad (22.47)$$

$$M_{i4} + M_r - F_f \cdot 3r / 2 = 0 \quad (22.48)$$

$$M_r = sN \quad (22.49)$$

Numărul de 10 ecuații este mai mare cu o unitate față de numărul necunoscutelor ca urmare a faptului că prin metoda cinetostatică, așa cum s-a arătat în cap.21.4, se poate calcula inclusiv accelerația sistemului. Ecuația suplimentară poate servi la verificarea corectitudinii calculului.

Din ecuațiile de mai sus se determină valorile reacțiunilor.

Tabelul 22.3

Nr.	Relația de calcul	Valoarea
1	$T_1 = G - F_{i1}$	$0,720G$
2	$T_2 = \frac{1}{3}(T_1 + 2G - F_{i2} + \frac{1}{r}M_{i2})$	$0,906G$
3	$T_3 = 2T_2 - \frac{1}{r}M_{i2}$	$1,252G$
4	$T_4 = 2T_3 - \frac{1}{r}M_{i3}$	$1,690G$
5	$H = T_4 \cos \alpha$	$1,441G$
6	$V = 2G + T_3 + T_4 \sin \alpha$	$4,085G$
7	$N = 2G \cos \alpha$	$1,732G$
8	$M_r = sN$	$0,05Gr$
9	$F_f = T_4 - F_{i4} - 2G \sin \alpha$	$0,243G$

Se poate observa că forța de frecare are o valoare inferioară limitei la care apare alunecarea, respectiv:

$$F_{f \text{ lim}} = \mu N = 0,433G \quad (22.50)$$

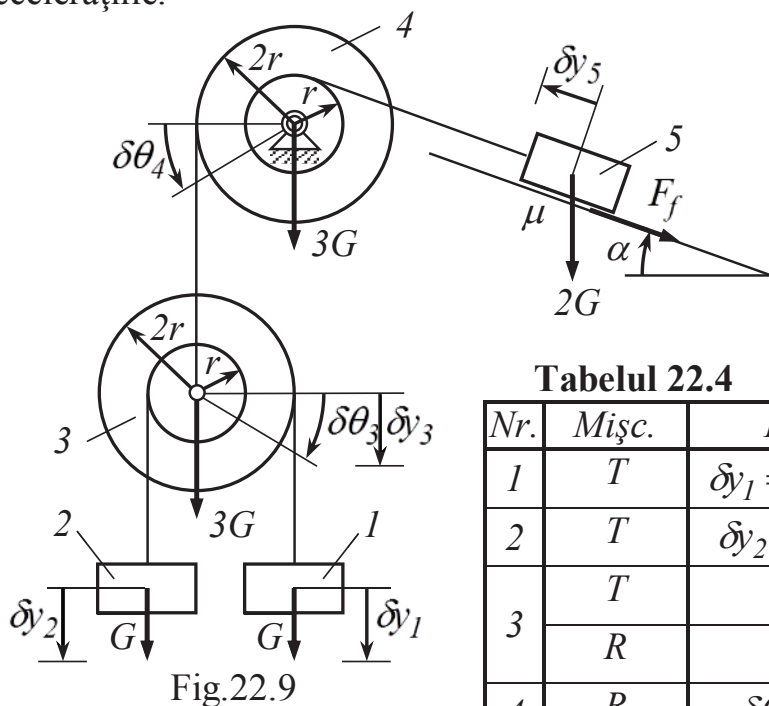
Se confirmă prin aceasta rostogolirea fără alunecare a corpului 4 pe planul înclinat.

Problema 22.3. Sistemul cu două grade de libertate din fig.22.9 se pune în mișcare pornind din repaus. Să se calculeze accelerațiile sistemului.

Date: $G, r, J_3 = J_4 = 4Gr^2/g, \mu = 1/\sqrt{3}, \alpha = 30^\circ$

Cerute: a_3, ε_3

Rezolvare: Sistemul propus este identic cu cel de la problema 21.2, astfel că datele necesare vor fi preluate de acolo. În tab.22.4 sunt indicate deplasările virtuale și accelerațiile.



Tabelul 22.4

Nr.	Mișc.	Deplasări	Accelerații
1	T	$\delta y_1 = \delta y_3 + 2r\delta\theta_3$	$a_1 = a_3 + 2r\varepsilon_3$
2	T	$\delta y_2 = \delta y_3 - r\delta\theta_3$	$a_2 = a_3 - r\varepsilon_3$
3	T	δy_3	a_3
	R	$\delta\theta_3$	ε_3
4	R	$\delta\theta_4 = \delta y_3 / 2r$	$\varepsilon_4 = a_3 / 2r$
5	T	$\delta y_5 = \delta y_3 / 2$	$a_5 = a_3 / 2$

Lucrul mecanic virtual este:

$$\delta L = (G - F_{i1})\delta y_1 + (G - F_{i2})\delta y_2 + (3G - F_{i3})\delta y_3 - M_{i3}\delta\theta_3 - M_{i4}\delta\theta_4 - (2G \sin \alpha + F_f + F_{i5})\delta y_5 = 0 \quad (22.51)$$

în care $F_f = \mu N = \mu 2G \cos \alpha$. Se fac înlocuirile în funcție de δy_3 și $\delta\theta_3$:

$$\delta L = [(G - F_{i1}) + (G - F_{i2}) + (3G - F_{i3}) - \frac{1}{2r} M_{i4} - \frac{1}{2}(2G \sin \alpha + F_f + F_{i5})]\delta y_3 + [2r(G - F_{i1}) - r(G - F_{i2}) - M_{i3}]\delta\theta_3 = 0 \quad (22.52)$$

Întrucât $\delta y_3 \neq 0$ și $\delta\theta_3 \neq 0$, sunt nule expresiile din parantezele drepte. Se obțin ecuațiile:

$$\begin{cases} 5G - G(\sin \alpha + \mu \cos \alpha) = F_{i1} + F_{i2} + F_{i3} + \frac{1}{2r} M_{i4} + \frac{1}{2} F_{i5} \\ Gr = 2rF_{i1} - rF_{i2} + M_{i3} \end{cases} \quad (22.53)$$

Acest sistem este identic cu cel obținut în problema 21.2 (rel.21.63) și în consecință se vor obține aceleași valori pentru cele două accelerații (rel.21.64).

23. ECUAȚIILE LUI LAGRANGE

23.1 Abstractizări în Mecanica Analitică

Aspectele teoretice studiate în capitolele precedente pot fi transpuse într-o formă abstractizată, urmărindu-se stabilirea unor ecuații de mișcare cu un grad mare de generalizare, valabile pentru orice sistem mecanic cu mai multe grade de libertate.

Numărul gradelor de libertate ale unui sistem mecanic oarecare este dat de numărul parametrilor poziționali independenți, care pot fi coordonate liniare sau unghiuri de poziție. În acest context se introduce noțiunea de *coordonată generalizată*, notată prin litera q , oricare ar fi natura fizică a acesteia. Astfel, pentru un sistem având h grade de libertate vor exista q_1, q_2, \dots, q_h coordonate generalizate; acestea sunt mărimi scalare variabile în raport cu timpul.

Poziția unui punct oarecare din sistem va depinde de aceste coordonate printr-un vector de poziție având forma generală:

$$\bar{r} = \bar{r}(q_1, q_2, \dots, q_h, t) \quad (23.1)$$

Deplasarea reală $d\bar{r}$ a punctului se exprimă prin diferențiala totală a unei funcții de mai multe variabile:

$$d\bar{r} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_2} dq_2 + \dots + \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_h} dq_h + \frac{\partial \bar{r}}{\partial t} dt \quad (23.2)$$

Pentru viteza punctului se poate scrie relația:

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_h} \dot{q}_h + \frac{\partial \bar{r}}{\partial t} \quad (23.3)$$

Deplasarea virtuală $\delta\bar{r}$ este independentă de timp ($t=const.$) și se exprimă printr-o relație analogă deplasării reale:

$$\delta\bar{r} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_h} \delta q_h = \sum_{k=1}^h \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_k} \delta q_k \quad (23.4)$$

Lucrul mecanic virtual al unei forțe aplicată în punctul considerat este dat de produsul scalar:

$$\bar{F} \cdot \delta\bar{r} = \bar{F} \cdot \left(\sum_{k=1}^h \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_k} \delta q_k \right) = \sum_{k=1}^h \left(\bar{F} \cdot \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_k} \right) \delta q_k \quad (23.5)$$

Dacă asupra sistemului acționează un număr de n forțe în tot atâtea puncte, aplicarea principiului lucrului mecanic virtual conduce la relația:

$$\delta L = \sum_{j=1}^n (\bar{F}_j \cdot \delta\bar{r}_j) = \sum_{j=1}^n \left[\sum_{k=1}^h \left(\bar{F}_j \cdot \frac{\partial \bar{r}_j}{\partial q_k} \right) \delta q_k \right] = 0 \quad (23.6)$$

Se prelucrează această relație prin schimbarea ordinii de însumare:

$$\delta L = \sum_{k=1}^h \left[\sum_{j=1}^n \left(\bar{F}_j \cdot \frac{\partial \bar{r}_j}{\partial q_k} \right) \right] \delta q_k = 0 \quad (23.7)$$

În continuare se introduce notația:

$$Q_k = \sum_{j=1}^n \left(\bar{F}_j \cdot \frac{\partial \bar{r}_j}{\partial q_k} \right) \quad (23.8)$$

astfel că relația precedentă devine:

$$\delta L = \sum_{k=1}^h Q_k \delta q_k = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \dots + Q_h \delta q_h = 0 \quad (23.9)$$

Mărimea Q_k poartă numele de *forță generalizată* și reprezintă totalitatea acțiunilor care pot produce o deplasare după coordonata q_k . Se observă că Q_k are dimensiunea unei forțe dacă coordonata q_k este o deplasare liniară; Q_k are dimensiunea unui moment în cazul în care q_k este un unghi de poziție. Trebuie făcută și precizarea că în compunerea forțelor generalizate sunt incluse numai forțele și momentele date, direct aplicate, nu și reacțiunile din legături.

23.2 Echilibrul sistemelor cu mai multe grade de libertate

Deoarece deplasările virtuale sunt diferite de zero, condiția rezultată din utilizarea principiului mecanic virtual la un sistem în echilibru este ca toate forțele generalizate să fie nule, respectiv:

$$Q_1 = Q_2 = \dots = Q_h = 0 \quad (23.10)$$

sau, sub altă formă:

$$Q_k = \sum_{j=1}^n \left(\bar{F}_j \cdot \frac{\partial \bar{r}_j}{\partial q_k} \right) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, h) \quad (23.11)$$

Se obține astfel un număr de ecuații egal cu numărul gradelor de libertate ale sistemului din care se pot calcula fie forțele care asigură echilibrul într-o poziție dată, fie poziția sistemului când se cunosc forțele aplicate. Calculul reacțiunilor se poate face apoi utilizând metodele cunoscute din Statică.

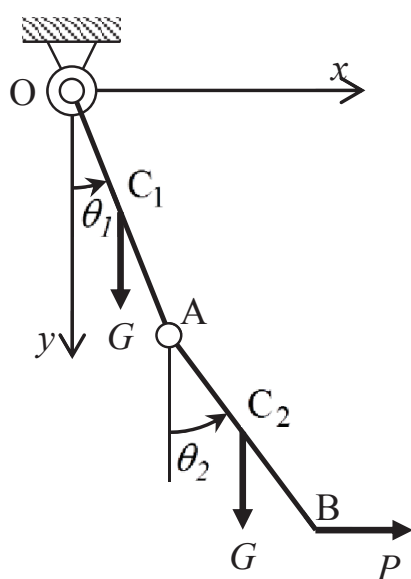


Fig.23.1

Problema 23.1 Să se determine poziția de echilibru a sistemului cu două grade de libertate din fig.23.1.

Date: $OA = AB = 2l$, G, P

Cerute: θ_1, θ_2

Rezolvare: Cele două coordonate generalizate sunt tocmai unghiurile de poziție ale barelor:

$$q_1 = \theta_1 \quad q_2 = \theta_2 \quad (23.12)$$

În sistemul de coordonate considerat, vectorii de poziție ai punctelor de aplicație ale forțelor sunt:

$$\bar{r}_1 = l \sin \theta_1 \bar{i} + l \cos \theta_1 \bar{j}$$

$$\bar{r}_2 = (2l \sin \theta_1 + l \sin \theta_2) \bar{i} + (2l \cos \theta_1 + l \cos \theta_2) \bar{j}$$

$$\bar{r}_3 = (2l \sin \theta_1 + 2l \sin \theta_2) \bar{i} + (2l \cos \theta_1 + 2l \cos \theta_2) \bar{j} \quad (23.13)$$

Forțele aplicate în cele trei puncte sunt:

$$\bar{F}_1 = \bar{F}_2 = G \bar{j} \quad \bar{F}_3 = P \bar{i} \quad (23.14)$$

Forțele generalizate se calculează pe baza relației (23.11):

$$Q_1 = \bar{F}_1 \cdot \frac{\partial \bar{r}_1}{\partial \theta_1} + \bar{F}_2 \cdot \frac{\partial \bar{r}_2}{\partial \theta_1} + \bar{F}_3 \cdot \frac{\partial \bar{r}_3}{\partial \theta_1} = 0$$

$$Q_2 = \bar{F}_1 \cdot \frac{\partial \bar{r}_1}{\partial \theta_2} + \bar{F}_2 \cdot \frac{\partial \bar{r}_2}{\partial \theta_2} + \bar{F}_3 \cdot \frac{\partial \bar{r}_3}{\partial \theta_2} = 0 \quad (23.15)$$

Derivatele parțiale din aceste expresii se calculează după cum urmează:

$$\frac{\partial \bar{r}_1}{\partial \theta_1} = l \cos \theta_1 \bar{i} - l \sin \theta_1 \bar{j} \quad \frac{\partial \bar{r}_1}{\partial \theta_2} = 0$$

$$\frac{\partial \bar{r}_2}{\partial \theta_1} = 2l \cos \theta_1 \bar{i} - 2l \sin \theta_1 \bar{j} \quad \frac{\partial \bar{r}_2}{\partial \theta_2} = l \cos \theta_2 \bar{i} - l \sin \theta_2 \bar{j} \quad (23.16)$$

$$\frac{\partial \bar{r}_3}{\partial \theta_1} = 2l \cos \theta_1 \bar{i} - 2l \sin \theta_1 \bar{j} \quad \frac{\partial \bar{r}_3}{\partial \theta_2} = 2l \cos \theta_2 \bar{i} - 2l \sin \theta_2 \bar{j}$$

Se fac înlocuirile în (23.15) aplicând regula de calcul a produselor scalare:

$$Q_1 = -Gl \sin \theta_1 - 2Gl \sin \theta_1 + 2Pl \cos \theta_1 = 0$$

$$Q_2 = -Gl \sin \theta_2 + 2Pl \cos \theta_2 = 0 \quad (23.17)$$

Se obține în final:

$$\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{2P}{3G} \quad \operatorname{tg} \theta_2 = \frac{2P}{G} \quad (23.18)$$

Se poate observa că forțele generalizate au dimensiunea unor momente întrucât coordonatele generalizate sunt unghiuri de poziție.

23.3 Deducerea ecuațiilor lui Lagrange

Pentru studiul sistemelor mecanice cu mai multe grade de libertate aflate în mișcare se poate utiliza o metodă bazată pe ecuațiile lui Lagrange, a căror deducere este prezentată în cele ce urmează. Metoda permite stabilirea ecuațiilor de mișcare ale sistemelor la nivelul accelerațiilor din care ulterior, prin integrare se pot obține legile de mișcare la nivelul vitezelor și deplasărilor.

Se consideră un sistem mecanic cu h grade de libertate; pentru comoditatea tratării se va lua cazul unui sistem de n puncte materiale cu legături olonome reonome, ecuațiile de mișcare obținute putând fi extinse asupra oricărui alt sistem. Relațiile de definiție (23.1)÷(23.4) își păstrează valabilitatea.

Pentru studiul mișcării unui punct material, lucrul mecanic virtual va include și forța de inerție $\bar{F}_i = -m\bar{a}$, produsul scalar (23.5) luând forma:

$$(\bar{F} + \bar{F}_i) \cdot \delta \bar{r} = (\bar{F} - m\bar{a}) \cdot \left(\sum_{k=1}^h \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_k} \delta q_k \right) = \sum_{k=1}^h \left[(\bar{F} - m\bar{a}) \cdot \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_k} \delta q_k \right] \quad (23.19)$$

Se aplică principiul lucrului mecanic virtual pentru toate cele n puncte materiale ale sistemului:

$$\delta L = \sum_{j=1}^n [(\bar{F}_j + \bar{F}_{ij}) \cdot \delta \bar{r}_j] = \sum_{j=1}^n \left\{ \sum_{k=1}^h \left[(\bar{F}_j - m_j \bar{a}_j) \cdot \frac{\partial \bar{r}_j}{\partial q_k} \delta q_k \right] \right\} = 0 \quad (23.20)$$

În continuare se inversează ordinea de însumare și se dă factor comun δq_k :

$$\delta L = \sum_{k=1}^h \left\{ \sum_{j=1}^n \left[(\bar{F}_j - m_j \bar{a}_j) \cdot \frac{\partial \bar{r}_j}{\partial q_k} \right] \right\} \delta q_k = 0 \quad (23.21)$$

Deoarece deplasările virtuale sunt nenule, rezultă că sunt nule expresiile care le înmulțesc. Rezultă un sistem de h ecuații având forma generală:

$$\sum_{j=1}^n \left[(\bar{F}_j - m_j \bar{a}_j) \cdot \frac{\partial \bar{r}_j}{\partial q_k} \right] = 0 \quad (k = 1 \div h) \quad (23.22)$$

Această relație se mai poate pune sub forma:

$$\sum_{j=1}^n \left(m_j \bar{a}_j \cdot \frac{\partial \bar{r}_j}{\partial q_k} \right) = \sum_{j=1}^n \left(\bar{F}_j \cdot \frac{\partial \bar{r}_j}{\partial q_k} \right) \quad (k = 1 \div h) \quad (23.23)$$

În partea dreaptă a acestei relații se recunoaște forța generalizată din (23.11):

$$Q_k = \sum_{j=1}^n \left(\bar{F}_j \cdot \frac{\partial \bar{r}_j}{\partial q_k} \right) = 0 \quad (k = 1 \div h) \quad (23.24)$$

Așa cum s-a arătat mai înainte, aceasta înglobează totalitatea acțiunilor din sistem care determină deplasarea după coordonata q_k . Sistemul (23.23) va lua forma:

$$\sum_{j=1}^n \left(m_j \bar{a}_j \cdot \frac{\partial \bar{r}_j}{\partial q_k} \right) = Q_k \quad (k = 1 \div h) \quad (23.25)$$

Acest sistem reprezintă *ecuațiile lui Lagrange de speța I*.

Pentru facilitarea utilizării acestor ecuații în aplicațiile practice se prelucrează expresia din paranteză care corespunde unui punct oarecare de rang j din sistem. Pentru simplificarea expresiilor se renunță temporar la acest indice.

$$m\bar{a} \cdot \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_k} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_k} \cdot \frac{d(m\bar{v})}{dt} \quad (23.26)$$

Se reamintește că regula de derivare a produsului a două funcții oarecare $f(t)$ și $g(t)$ în raport cu timpul este:

$$\frac{d}{dt}(fg) = f \frac{dg}{dt} + g \frac{df}{dt} \rightarrow f \frac{dg}{dt} = \frac{d}{dt}(fg) - g \frac{df}{dt} \quad (23.27)$$

Regula se aplică și produsului scalar al unor funcții vectoriale. În locul funcției f se introduce $\partial \bar{r} / \partial q_k$ iar în locul funcției g se introduce $m\bar{v}$.

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial q_k} \cdot \frac{d(m\bar{v})}{dt} = \frac{d}{dt} \left(m\bar{v} \cdot \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_k} \right) - m\bar{v} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial q_k} \right) \quad (23.28)$$

În cap.23.1 s-a definit viteza punctului prin relația:

$$\bar{v} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_h} \dot{q}_h + \frac{\partial \bar{r}}{\partial t} = \sum_{k=1}^h \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \bar{r}}{\partial t} \quad (23.29)$$

Deoarece atât coordonatele generalizate q_k cât și vitezele generalizate \dot{q}_k sunt independente, se verifică cu ușurință că:

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial q_k} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial \dot{q}_k} \quad (23.30)$$

Prin inversarea ordinei de derivare, ultimul termen din rel (23.28) devine:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial q_k} \right) = \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{d\bar{r}}{dt} \right) = \frac{\partial \bar{v}}{\partial q_k} \quad (23.31)$$

Cu observația că $\bar{v}^2 = \bar{v} \cdot \bar{v} = v^2$, se revine în relația (23.26)

$$\begin{aligned} m\bar{a} \cdot \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_k} &= \frac{d}{dt} \left(m\bar{v} \cdot \frac{\partial \bar{v}}{\partial \dot{q}_k} \right) - m\bar{v} \cdot \frac{\partial \bar{v}}{\partial q_k} = \\ &= \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left(\frac{mv^2}{2} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{mv^2}{2} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_j}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial E_j}{\partial q_k} \end{aligned} \quad (23.32)$$

În această relație $E_j = mv^2 / 2$ reprezintă energia cinetică a punctului de rang j considerat. În continuare se revine la primul termen din relația generală (25.25).

$$\sum_{j=1}^n \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_j}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial E_j}{\partial q_k} \right] = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left(\sum_{j=1}^n E_j \right) \right] - \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\sum_{j=1}^n E_j \right) \quad (23.33)$$

Sumele din paranteze reprezintă energia cinetică totală a sistemului:

$$E = \sum_{j=1}^n E_j \quad (23.34)$$

Sistemul de ecuații (23.25) devine:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial E}{\partial q_k} = Q_k \quad (k = 1 \div h) \quad (23.35)$$

Această expresie reprezintă prima formă a *ecuațiilor lui Lagrange de speța II*.

Dacă sistemul este acționat numai de forțe conservative există o funcție de forță dependentă de coordonatele generalizate q_k :

$$U = U(q_1, q_2, \dots, q_h) \quad (23.36)$$

În acest caz forța generalizată se obține printr-o relație de forma:

$$Q_k = \frac{\partial U}{\partial q_k} \quad (k = 1 \div h) \quad (23.37)$$

Se obține în continuare forma a doua a ecuațiilor lui Lagrange de speța II:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial E}{\partial q_k} = \frac{\partial U}{\partial q_k} \quad (k = 1 \div h) \quad (23.38)$$

Această formă este utilă mai ales în studiul vibrațiilor cu mai multe grade de libertate. Tipurile de forțe conservative uzuale pentru care există o funcție de forță (sunt importante în special forțele de greutate și forțele elastice) au fost prezentate în capitolul 13.1.3.

Derivatele de ordinul întâi pot fi cumulate în partea stângă a relației de mai sus, obținându-se:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial}{\partial q_k} (E + U) = 0 \quad (23.39)$$

Se reamintește din cap.13.1.3 că funcția de forță este echivalentă energiei potențiale luată cu semnul schimbat; în acest context suma dintre energia cinetică și funcția de forță mai poartă și denumirea de *potențial cinetic* și este definită ca *funcția lui Lagrange*. Pentru aceasta se introduce notația:

$$\mathbf{L} = E + U \quad (23.40)$$

Prin intermediul energiei cinetice această mărime este funcție și de vitezele generalizate \dot{q}_k , astfel că:

$$\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_k} \quad (23.41)$$

Se obține forma a treia a ecuațiilor lui Lagrange de speța II:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial q_k} = 0 \quad (k = 1 \div h) \quad (23.42)$$

utilă în capitolele speciale ale Mecanicii Analitice.

În aplicațiile practice intervin și forțe neconservative (forțe tehnologice, forțe de frecare, etc.); pentru acestea se calculează un lucru mecanic total de forma:

$$L = L(q_1, q_2, \dots, q_h) \quad (23.43)$$

Forțele generalizate se vor calcula în acest caz cu relația:

$$Q_k = \frac{\partial U}{\partial q_k} + \frac{\partial L}{\partial q_k} \quad (k = 1 \div h) \quad (23.44)$$

O altă situație este cea în care în sistem intervin și forțe dependente de viteză, cum sunt cele de la amortizoarele hidraulice. Pentru acestea se poate calcula o funcție disipativă de forma:

$$D = D(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_h) \quad (23.45)$$

În acest caz expresia forței generalizate se completează în modul următor:

$$Q_k = \frac{\partial U}{\partial q_k} + \frac{\partial L}{\partial q_k} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_k} \quad (k = 1 \div h) \quad (23.46)$$

Asupra modului în care se calculează funcția de forță și funcția disipativă se vor face precizări în continuare.

Ecuatiile Lui Lagrange, în oricare dintre formele prezentate, reprezintă un sistem de ecuații diferențiale de ordinul II; numărul acestora este egal cu cel al gradelor de libertate ale sistemului mecanic respectiv. Prin integrarea analitică sau prin metode numerice a acestui sistem de ecuații, integrare care are în general soluții unice, se obțin legile de mișcare la nivelul vitezelor și deplasărilor. Soluțiile trebuie să satisfacă condițiile inițiale de forma $(q_k)_0$ pentru poziții și $(\dot{q}_k)_0$ pentru viteze.

Utilizarea ecuațiilor lui Lagrange la sisteme cu un singur grad de libertate este echivalentă metodei energiei cinetice expusă în cap.19.3.

23.4 Funcția de forță și funcția disipativă pentru cazurile uzuale

Funcția de forță s-a definit în capitolul precedent prin relația generală:

$$U = U(q_1, q_2, \dots, q_h) \quad (23.47)$$

Forțele generalizate provin din aceasta prin derivatele parțiale:

$$Q_k = \frac{\partial U}{\partial q_k} \quad (k = 1 \div h) \quad (23.48)$$

Dacă într-un sistem există n forțe conservative, atunci funcția de forță a întregului sistem se obține prin însumarea funcțiilor de forță corespunzătoare fiecăreia dintre forțele respective:

$$U = \sum_{i=1}^n U_i \quad (23.49)$$

Pentru a stabili relațiile uzuale se consideră o forță conservativă oarecare F coliniară cu deplasarea x ; pentru aceasta se poate scrie:

$$F = \frac{dU}{dx} \rightarrow U = \int F dx + C \quad (23.50)$$

În această relație U este funcția de forță corespunzătoare numai forței F iar C este o constantă de integrare. Dacă deplasarea are loc între două poziții finite A și B : atunci:

$$U = \int_A^B F dx = L_{AB} \quad (23.51)$$

Se observă că funcția U corespunde lucrului mecanic efectuat de forță între cele două poziții. Se analizează în continuare funcția de forță corespunzătoare forțelor conservative uzuale întâlnite la sistemele mecanice.

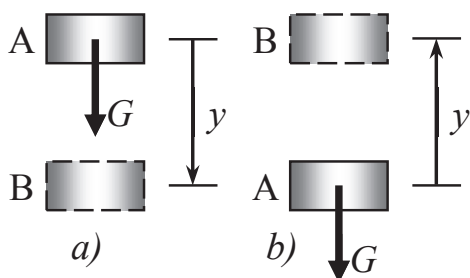


Fig.23.2

a) forța de greutate

Pentru greutatea corpului care coboară pe verticală (fig.23.2, a) funcția de forță este:

$$U = L_{AB} = \int_0^y G dy = Gy \quad (23.52)$$

Considerând $q = y$, este evident că:

$$Q = \frac{\partial U}{\partial y} = G \quad (23.53)$$

Pentru corpul care urcă (fig.23.2, b):

$$U = L_{AB} = -Gy \quad (23.54)$$

În acest caz:

$$Q = \frac{\partial U}{\partial y} = -G \quad (23.55)$$

Coordonata q este o deplasare liniară și Q are dimensiunea unei forțe. Se observă că forța Q este pozitivă, indiferent de sistemul de referință considerat, dacă acționează în sensul creșterii coordonatei q (lucrul mecanic este motor).

Pentru cazul particular al unei bare articulată într-un punct fix O (fig.23.3, *a*), bară care oscilează în jurul poziției verticale, funcția de forță este dată de relația:

$$U = L_{AB} = -Gh = -G \frac{l}{2} (1 - \cos\theta) \quad (23.56)$$

Considerând $q = \theta$ se obține:

$$Q = \frac{\partial U}{\partial \theta} = -G \frac{l}{2} \sin\theta = M_O(G) \quad (23.57)$$

Dacă punctul de articulare se găsește în parte inferioară (fig.23.3, *b*):

$$U = L_{AB} = Gh = G \frac{l}{2} (1 - \cos\theta) \quad (23.58)$$

Se deduce în continuare:

$$Q = \frac{\partial U}{\partial \theta} = G \frac{l}{2} \sin\theta = M_O(G) \quad (23.59)$$

Deoarece coordonata q este în acest caz un unghi de poziție, Q este de natura unui moment. Și în acest caz se constată că Q este pozitivă dacă acționează în sensul de creștere al coordonatei q (lucrul mecanic este motor).

b) forța elastică

Forța de rezistență opusă de un arc atunci când este alungit sau comprimat este proporțională cu deformația acestuia față de poziția în stare liberă prin intermediul unei constante elastice notată k . Valoarea acestei constante depinde de dimensiunile arcului și de materialul din care este confecționat.

La o deplasare x față de poziția liberă a uneia dintre extremități (fig.23.4), păstrând fixă cealaltă extremitate, forța elastică exercitată asupra corpului de legătură este întotdeauna îndreptată în sens invers deplasării:

$$F_e = -kx \quad (23.60)$$

Funcția de forță va fi dată de relația:

$$U = L_{AB} = \int_0^x F_e dx = -\int_0^x kx dx = -\frac{1}{2} kx^2 \quad (23.61)$$

Dacă în cadrul unui sistem care conține arcul respectiv se alege drept coordonată generalizată $q = x$ se obține:

$$Q = \frac{\partial U}{\partial x} = -kx = F_e \quad (23.62)$$

Se observă că lucrul mecanic al unui resort este întotdeauna rezistent.

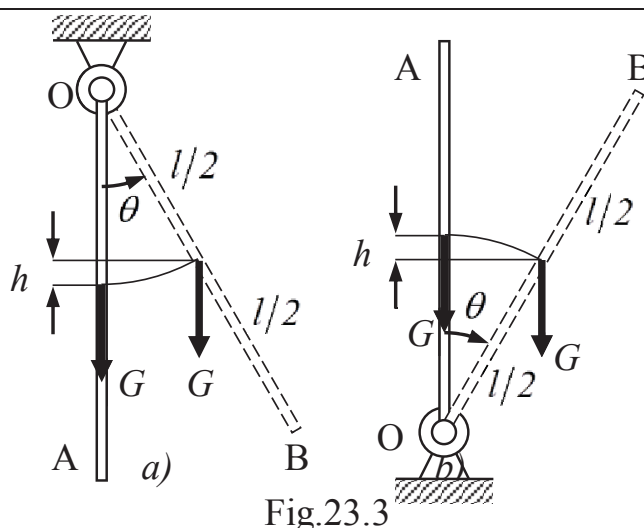


Fig.23.3

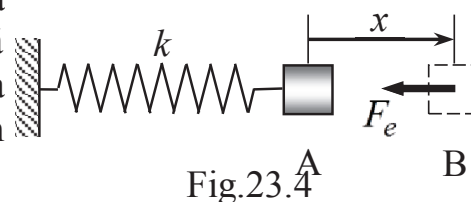
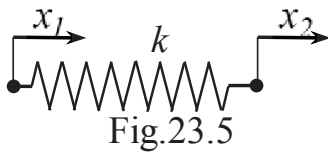


Fig.23.4



Dacă amândouă extremitățile arcului sunt mobile (fig.23.5) deformația este dată de diferența de deplasare a acestora, respectiv $x = x_2 - x_1$; forța elastică va fi:

$$F_e = -k(x_2 - x_1) \quad (23.63)$$

Înlocuind în (23.61) se obține funcția de forță:

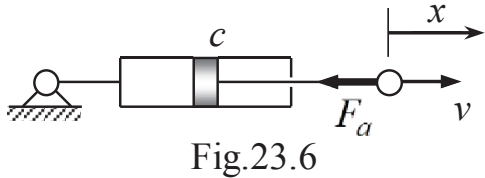
$$U = -\frac{1}{2}k(x_2 - x_1)^2 \quad (23.64)$$

Dacă se alege $q_1 = x_1$ și $q_2 = x_2$, atunci forțele generalizate corespunzătoare vor fi:

$$Q_1 = Q_2 = \frac{\partial U}{\partial x_1} = -\frac{1}{2}k(2x_2 - 2x_1) = -k(x_2 - x_1) = F_e \quad (23.65)$$

Funcția disipativă, notată prin D , se întâlnește în special la dispozitivele pentru amortizarea vibrațiilor. Dacă un astfel de dispozitiv este un cilindru hidraulic (fig.23.6), forța de rezistență \bar{F}_a este proporțională cu viteza pistonului prin intermediul unei constante de amortizare notată c . Valoarea constantei depinde de caracteristicile constructive ale amortizorului. În stare de repaus forța de amortizare este nulă. Legătura dintre forța de amortizare și funcția disipativă este:

$$F_a = -cv = \frac{dD}{dv} \quad (23.66)$$



Funcția D se poate defini prin relația generală:

$$D = \int F_a dv + C \quad (23.67)$$

în care C este o constantă de integrare; detaliind

această relație se obține:

$$D = -c \int v dv + C = -\frac{1}{2}cv^2 + C = -\frac{1}{2}cx\dot{x}^2 + C \quad (23.68)$$

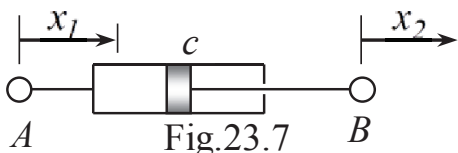
Dacă se consideră $q = x$, atunci forța generalizată are expresia:

$$Q = \frac{\partial D}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = -cx\dot{x} \quad (23.69)$$

Dacă ambele extremități sunt mobile (fig.23.7), forța de amortizare va depinde de viteza relativă a pistonului în raport cu cilindrul, respectiv:

$$F_a = -cv_{rel} = -c(v_B - v_A) = -c(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \quad (23.70)$$

În acest caz funcția disipativă va lua forma:



$$D = -\frac{1}{2}c(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)^2 + C \quad (23.71)$$

Dacă în sistem sunt mai multe amortizoare se calculează o funcție generală:

$$D = \sum D_i \quad (23.72)$$

Pentru un sistem cu mai multe grade de libertate:

$$Q_k = \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_k} \quad (k = 1 \div h) \quad (23.73)$$

23.5 Aplicații ale ecuațiilor lui Lagrange

23.5.1 Sisteme cu un grad de libertate

Pentru sistemele cu un singur grad de libertate există o singură coordonată generalizată q și se alcătuieste o singură ecuație Lagrange, forma generală fiind:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial E}{\partial q} = Q = \frac{\partial U}{\partial q} \quad (23.74)$$

La sistemele mecanice obișnuite, formate din corpuri solide rigide, energia cinetică depinde numai de viteze, nu și de deplasări, astfel că $\partial E / \partial q = 0$.

Problema 23.2 Sistemul din fig.23.8 se pune în mișcare sub acțiunea greutății proprii pornind din repaus. Să se găsească accelerația sistemului.

Date: G, P, J_2, r, R *Cerute:* a_1

Rezolvare: Se alege $q = y_1$ și se alcătuieste tabelul cinematic:

Tabelul 23.1

Nr.	Mișc.	Deplasări	Viteze	Accelerații
1	T	y_1	$v_1 = \dot{y}_1$	$a_1 = \dot{v}_1 = \ddot{y}_1$
2	R	$\theta_2 = y_1 / R$	$\omega_2 = v_1 / R$	$\varepsilon_2 = a_1 / R$
3	T	$y_3 = r / R \cdot y_1$	$v_3 = r / R \cdot v_1$	$a_3 = r / R \cdot a_1$

Energia cinetică a sistemului este:

$$E = \frac{1}{2} \frac{G}{g} v_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \omega_2^2 + \frac{1}{2} \frac{P}{g} v_3^2 = \frac{v_1^2}{2g} \left(G + J_2 g \frac{1}{R^2} + P \frac{r}{R} \right) \quad (23.75)$$

Funcția de forță este:

$$U = G y_1 - P y_3 = y_1 \left(G - P \frac{r}{R} \right) \quad (23.76)$$

Cu observația că $\dot{q} = \dot{y}_1 = v_1$ se calculează primul termen al ecuației Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial v_1} \right) = \frac{a_1}{g} \left(G + J_2 g \frac{1}{R^2} + P \frac{r}{R} \right) \quad (23.77)$$

Se calculează în continuare forța generalizată:

$$Q = \frac{\partial U}{\partial q} = \frac{\partial U}{\partial y_1} = G - P \frac{r}{R} \quad (23.78)$$

Se fac înlocuirile în ecuația Lagrange și se obține în final:

$$a_1 = \frac{G - P r / R}{G + J_2 g / R^2 + P r / R} \cdot g \quad (23.79)$$

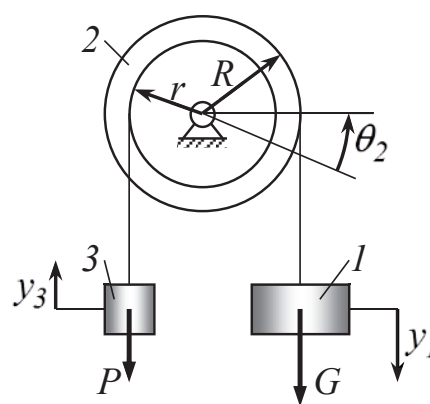


Fig.23.8

Problema 23.3: Sistemul din fig.23.9 este acționat de cuplul motor M și se pune în mișcare pornind din repaus. Să se calculeze accelerația sistemului și tensiunea din firul de legătură între corpurile 2 și 3.

Date: $G, r, M = 3Gr, J_2 = 3Gr^2/g, \mu = 1/8, J_1 = J_3 = Gr^2/2g$

Cerute: ε_1, T_{23}

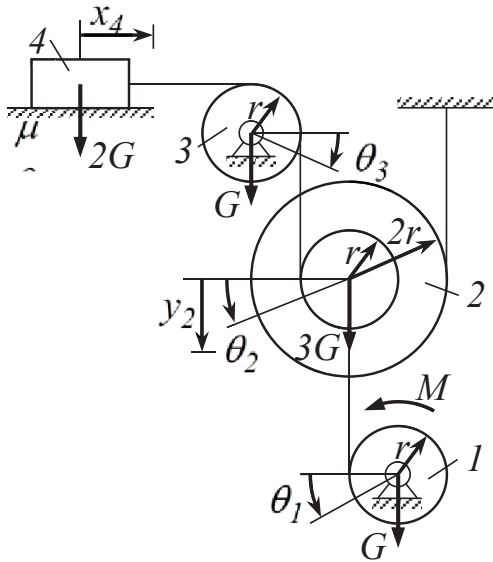


Fig.23.9

Rezolvare: Se alege coordonata $q = \theta_1$. Ecuația Lagrange are în acest caz forma:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \frac{\partial E}{\partial \theta_1} = \frac{\partial U}{\partial \theta_1} + \frac{\partial L}{\partial \theta_1} \quad (23.80)$$

Tabelul cinematic are următoarea configurație:

Tabelul 23.2

Nr.	Mișc.	Deplasări	Viteze	Accelerații
1	R	θ_1	$\omega_1 = \dot{\theta}_1$	$\varepsilon_1 = \dot{\omega}_1 = \ddot{\theta}_1$
2	T	$y_2 = r\theta_1$	$v_2 = r\omega_1$	$a_1 = r\varepsilon_1$
	R	$\theta_2 = \theta_1/2$	$\omega_2 = \omega_1/2$	$\varepsilon_2 = \varepsilon_1/2$
3	R	$\theta_3 = 3\theta_1/2$	$\omega_3 = 3\omega_1/2$	$\varepsilon_3 = 3\varepsilon_1/2$
4	T	$x_4 = 3r\theta_1/2$	$v_4 = 3r\omega_1/2$	$a_4 = 3r\varepsilon_1/2$

Se calculează energiile cinetice ale corpurilor componente:

$$E_1 = \frac{1}{2} J_1 \omega_1^2 = \frac{1}{4} \frac{Gr^2}{g} \cdot \omega_1^2 \quad E_2 = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{2} J_2 \omega_2^2 = \frac{15}{8} \frac{Gr^2}{g} \cdot \omega_1^2 \quad (23.81)$$

$$E_3 = \frac{1}{2} J_3 \omega_3^2 = \frac{9}{16} \frac{Gr^2}{g} \cdot \omega_1^2 \quad E_4 = \frac{1}{2} m_4 v_4^2 = \frac{9}{4} \frac{Gr^2}{g} \cdot \omega_1^2$$

Se calculează în continuare energia cinetică totală a sistemului:

$$E = \sum_{i=1}^4 E_i = \frac{79}{16} \frac{Gr^2}{g} \omega_1^2 \quad (23.82)$$

Funcția de forță se calculează numai pentru greutatea corpului 3:

$$U = 3Gy_2 = 3Gr\theta_1 \quad (23.83)$$

Cu observația că $F_f = \mu \cdot 2G$, lucrul mecanic al forțelor neconservative este:

$$L = M\theta_1 - F_f x_4 = \frac{21}{8} Gr\theta_1 \quad (23.84)$$

Primul termen al ecuației Lagrange se obține derivând energia cinetică:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\theta}_1} \right) \equiv \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \omega_1} \right) = \frac{79}{8} \frac{Gr^2}{g} \varepsilon_1 \quad (23.85)$$

Forța generalizată se calculează în modul următor:

$$Q = \frac{\partial U}{\partial \theta} + \frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{45}{8} Gr \quad (23.86)$$

Deoarece coordonata q este un unghi, Q are dimensiunea unui moment.

Se fac înlocuirile în ecuația (23.80) și rezultă:

$$\varepsilon_1 = \frac{45}{79} \frac{g}{r} \cong 0,57 \frac{g}{r} \quad (23.87)$$

Pentru calculul tensiunii T_{23} se utilizează metoda impulsului aplicată corpurilor 3 și 4. Cu notațiile din fig.23.10 se scriu ecuațiile:

$$m_4 a_4 = T_{34} - F_f \quad (23.88)$$

$$J_3 \varepsilon_3 = T_{23} r - T_{34} r$$

din care, efectuând calculele, rezultă:

$$T_{23} = \frac{I}{r} J_3 \varepsilon_3 + m_4 a_4 + \mu N = \frac{377}{158} G \cong 2,38 G \quad (23.89)$$

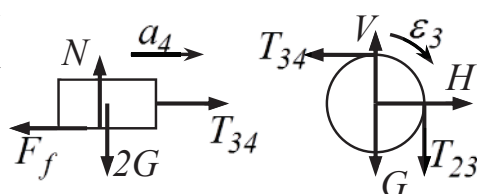


Fig.23.10

23.5.2 Sisteme cu mai multe grade de libertate

Pentru sistemele cu mai multe grade de libertate ecuațiile lui Lagrange au forma generală stabilită anterior:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial E}{\partial q_k} = Q_k = \frac{\partial U}{\partial q_k} + \frac{\partial L}{\partial q_k} \quad (k = 1 \div h) \quad (23.90)$$

Problema 23.4 Sistemul din fig.23.11 se pune în mișcare sub acțiunea greutateților proprii pornind din repaus. Se cere să se determine accelerațiile.

Date: $G, r, J_3 = J_4 = 4Gr^2 / g, \mu = 1/8$

Cerute: a_3, ε_3

Rezolvare: Drept coordonate se aleg $q_1 = y_3$ și $q_2 = \theta_3$ astfel că ecuațiile lui Lagrange vor lua în acest caz forma:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{y}_3} \right) - \frac{\partial E}{\partial y_3} = Q_1 \quad (23.91)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\theta}_3} \right) - \frac{\partial E}{\partial \theta_3} = Q_2$$

Forțele generalizate vor fi:

$$Q_1 = \frac{\partial U}{\partial y_3} + \frac{\partial L}{\partial y_3} \quad (23.92)$$

$$Q_2 = \frac{\partial U}{\partial \theta_3} + \frac{\partial L}{\partial \theta_3}$$

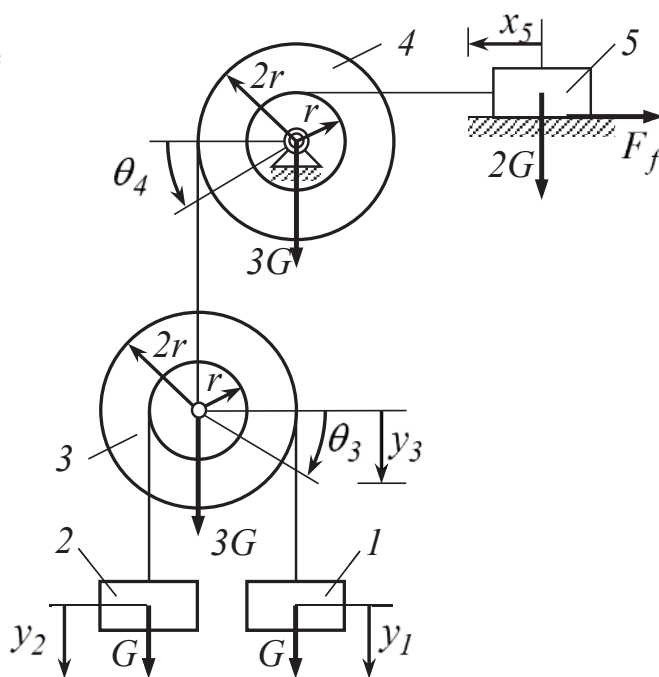


Fig.23.11

În tab.23.3 sunt date relațiile cinematice în funcție de coordonatele alese.

Tabelul 23.3

Corp		Deplasări	Viteze	Energia cinetică
1	T	$y_1 = y_3 + 2r\theta_3$	$v_1 = v_3 + 2r\omega_3$	$E_1 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 = \frac{1}{2}\frac{G}{g}(v_3^2 + 4rv_3\omega_3 + 4r^2\omega_3^2)$
2	T	$y_2 = y_3 - r\theta_3$	$v_2 = v_3 - r\omega_3$	$E_2 = \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}\frac{G}{g}(v_3^2 - 2rv_3\omega_3 + r^2\omega_3^2)$
3	T	y_3	v_3	$E_{3tr} = \frac{1}{2}m_3v_3^2 = \frac{3}{2}\frac{G}{g}v_3^2$
	R	θ_3	ω_3	$E_{3rot} = \frac{1}{2}J_2\omega_3^2 = \frac{2G}{g}r^2\omega_3^2$
4	R	$\theta_4 = y_3/2r$	$\omega_4 = v_3/2r$	$E_4 = \frac{1}{2}J_4\omega_4^2 = \frac{1}{2}\frac{G}{g}v_3^2$
5	T	$x_5 = y_3/2$	$v_5 = v_3/2$	$E_5 = \frac{1}{2}m_5v_5^2 = \frac{1}{4}\frac{G}{g}v_3^2$

Energia cinetică totală a sistemului, după însumare, rezultă:

$$E = \frac{G}{g} \left(\frac{13}{4}v_3^2 + rv_3\omega_3 + \frac{5}{2}r^2\omega_3^2 \right) \quad (23.93)$$

Ținând cont că $\dot{y}_3 = v_3$ și $\dot{\theta}_3 = \omega_3$ se calculează derivatele energiei cinetice:

$$\frac{\partial E}{\partial v_3} = \frac{G}{g} \left(\frac{13}{2}v_3 + r\omega_3 \right) \rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial v_3} \right) = \frac{G}{g} \left(\frac{13}{2}a_3 + r\varepsilon_3 \right) \quad (23.94)$$

$$\frac{\partial E}{\partial \theta_3} = \frac{G}{g} (rv_3 + 5r^2\omega_3) \rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \theta_3} \right) = \frac{G}{g} (ra_3 + 5r^2\varepsilon_3)$$

Funcția de forță și lucrul mecanic se determină cu relațiile:

$$U = Gy_1 + Gy_2 + 3Gy_3 = G(5y_3 + r\theta_3) \quad (23.95)$$

$$L = -F_f x_5 = -\mu \cdot 2G \cdot \frac{y_3}{2} = -\frac{1}{8}Gy_3 \quad (23.96)$$

Derivatele acestora sunt:

$$\frac{\partial U}{\partial y_3} = 5G \quad \frac{\partial U}{\partial \theta_3} = Gr \quad \frac{\partial L}{\partial y_3} = -\frac{1}{8}G \quad \frac{\partial L}{\partial \theta_3} = 0 \quad (23.97)$$

Forțele generalizate (23.92) vor avea valorile:

$$Q_1 = 39G/8 \quad Q_2 = Gr \quad (23.98)$$

Se fac înlocuirile în ecuațiile (23.91) și, după simplificări se obține sistemul:

$$13a_3 + 2r\varepsilon_3 = 39g/8 \quad a_3 + 5r\varepsilon_3 = g \quad (23.99)$$

din care se determină:

$$a_3 = \frac{187}{252}g \cong 0,742g \quad \varepsilon_3 = \frac{13}{252}\frac{g}{r} \cong 0,05\frac{g}{r} \quad (23.100)$$

24. DINAMICA SISTEMELOR OSCILANTE

24.1 Generalități

În cap.14 a fost studiată pe larg mișcarea oscilatorie a punctului material utilizând teorema impulsului la stabilirea ecuației diferențiale a mișcării acestuia. S-a analizat în detaliu modul de integrare al acestei ecuații precum și cazurile particulare provenite din raportul parametrilor funcționali. Noțiunile introduse și notațiile utilizate își păstrează valabilitatea și în dinamica corpurilor sau sistemelor de corpuri cu mișcări oscilante.

În aplicațiile practice prezintă un interes deosebit mișcările oscilatorii de mică amplitudine, cunoscute drept *vibrații mecanice*. Asupra acestora există o vastă literatură de specialitate, depășind cu mult obiectivul prezentei lucrări.

Prezentul capitol se limitează la utilizarea ecuațiilor lui Lagrange pentru stabilirea ecuațiilor diferențiale ale mișcării sistemelor mecanice cu mișcări oscilatorii, cu unul sau mai multe grade de libertate, luând în considerare și cazul micilor oscilații ale acestora.

Se face precizarea că la corpurile cu mișcări de rotație, în cadrul micilor oscilații variația unghiului de poziție se limitează la $\theta = \pm 5 \div 6^\circ$ față de poziția de echilibru; între aceste limite se pot face pentru funcțiile trigonometrice uzuale aproximații de forma $\sin \theta \cong \theta$ și $\cos \theta \cong 1$.

Se consideră necesară reluarea studiului oscilatorului liniar utilizând ecuațiile lui Lagrange întrucât sistemele cu un grad de libertate pot fi analizate în mod asemănător acestuia.

24.2 Oscilatorul liniar

Se consideră cazul general al unui oscilator liniar cu mișcarea pe verticală, compus dintr-o masă suspendată de un arc și de un amortizor montat în paralel cu arcul (fig.24.1). Asupra acestuia acționează o forță perturbatoare armonică de forma:

$$F_p = F_0 \cos pt \quad (24.1)$$

în care F_0 este amplitudinea forței iar p este pulsația acesteia. Considerând drept coordonată generalizată deplasarea y a masei față de poziția de echilibru, ecuația Lagrange pentru oscilator va avea forma generală:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial E}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial L}{\partial y} + \frac{\partial D}{\partial \dot{y}} \quad (24.2)$$

Energia cinetică a oscilatorului este:

$$E = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} m\dot{y}^2 \quad (24.3)$$

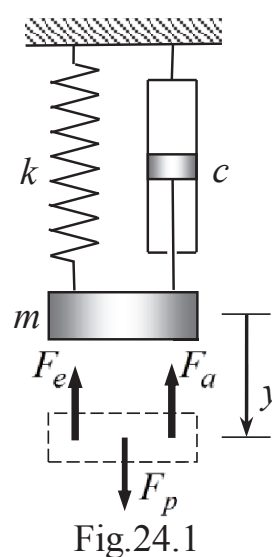


Fig.24.1

Derivatele acesteia sunt:

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} \rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{y}} \right) = m\ddot{y} \quad \frac{\partial E}{\partial y} = 0 \quad (24.4)$$

În legătură cu funcția de forță trebuie făcută o precizare importantă. Forțele conservative în acest caz sunt greutatea masei oscilante $G = mg = \text{const.}$ și forța elastică F_e aplicată de arc. Aceasta din urmă are două componente, una statică, constantă F_{es} datorată pretensionării arcului și alta dinamică, variabilă F_{ed} :

$$F_e = -k(f + y) = -kf - ky = F_{es} + F_{ed} \quad (24.5)$$

În această relație f este deformația statică a arcului sub acțiunea greutății. Greutatea este echilibrată de componenta statică, astfel că $G + F_{es} = 0$. Pe baza acestei observații derivata funcției de forță devine:

$$\frac{\partial U}{\partial y} = G + F_e = G + F_{es} + F_{ed} = F_{ed} = -ky \quad (24.6)$$

cea ce conduce la concluzia că greutatea nu mai intervine în expresia funcției de forță:

$$U = -\frac{1}{2}ky^2 \quad (24.7)$$

Așa cum s-a arătat și în cap.14.2, oscilația are loc în jurul unei poziții deplasată cu deformația statică a arcului față de poziția în stare liberă a acestuia. Observația aceasta este valabilă pentru orice situație de pretensionare a elementului elastic al unui oscilator, oricare ar fi configurația acestuia.

Forța perturbatoare F_p se regăsește în calculul lucrului mecanic al forțelor neconservative:

$$L = F_p y \rightarrow \frac{\partial L}{\partial y} = F_p = F_0 \cos pt \quad (24.8)$$

Funcția disipativă și derivata acesteia se calculează cu relația:

$$D = -\frac{1}{2}cv^2 = -\frac{1}{2}c\dot{y}^2 \rightarrow \frac{\partial D}{\partial \dot{y}} = -c\dot{y} = F_a \quad (24.9)$$

Se fac înlocuirile în ecuația Lagrange (24.2) și se ordonează termenii după ordinul derivatelor:

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = F_0 \cos pt \quad (24.10)$$

Se introduc pentru constantele din ecuație notațiile:

$$\alpha = \frac{c}{2m} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad q = \frac{F_0}{m} \quad (24.11)$$

a căror semnificație a fost expusă în cap.14. Se reamintește că ω reprezintă pulsația proprie a oscilatorului iar α este factorul de amortizare.

Ecuația (24.10) ia forma:

$$\ddot{y} + 2\alpha\dot{y} + \omega^2 y = q \cos pt \quad (24.12)$$

Se recunoaște ecuația diferențială generală (14.5) a mișcării oscilatorului.

Cazurile particulare care derivă din această ecuație generală sunt:

– oscilația liberă fără amortizare ($\alpha = 0, q = 0$):

$$m\ddot{y} + ky = 0 \rightarrow \ddot{y} + \omega^2 y = 0 \quad (24.13)$$

– oscilația liberă cu amortizare ($\alpha \neq 0, q = 0$):

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = 0 \rightarrow \ddot{y} + 2\alpha\dot{y} + \omega^2 y = 0 \quad (24.14)$$

– oscilația forțată fără amortizare ($\alpha = 0, q \neq 0$):

$$m\ddot{y} + ky = F_0 \cos pt \rightarrow \ddot{y} + \omega^2 y = q \cos pt \quad (24.15)$$

– oscilația forțată cu amortizare ($\alpha \neq 0, q \neq 0$), ecuațiile (24.10) și (24.12).

Modul de integrare al acestor ecuații este analizat pe larg în cap.14.

Se poate pune în evidență și un aspect energetic al oscilatorului. Considerând oscilația liberă fără amortizare, prima ecuație (24.13) poate fi prelucrată prin înmulțirea cu \dot{y} :

$$m\dot{y} \cdot \ddot{y} + ky \cdot \dot{y} = 0 \quad (24.16)$$

În această relație se poate recunoaște derivata în raport cu timpul:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{y}^2 + \frac{1}{2} k y^2 \right) = 0 \quad (24.17)$$

S-a arătat în cap.13 că funcția de forță reprezintă energia potențială cu semnul schimbat, astfel ca se poate scrie:

$$V = -U = \frac{1}{2} k y^2 \quad (24.18)$$

Relația (24.17) devine:

$$\frac{d}{dt} (E + V) = 0 \rightarrow E_m = E + V = \text{const.} \quad (24.19)$$

Faptul că energia mecanică rămâne constantă în timp demonstrează caracterul *conservativ* al oscilației libere; energia cinetică comunicată inițial oscilatorului se transformă în energie potențială acumulată de arc; după atingerea deformației extreme a arcului, energia potențială se retransformă în energiei cinetice. Acest proces reversibil se întinde pe toată durata oscilației.

Lucrul mecanic introdus în oscilator de forța perturbatoare face ca energia mecanică a acestuia să fie variabilă, efectul manifestându-se în funcție de raportul între pulsația proprie ω a oscilatorului și pulsația p a forței perturbatoare. Funcția disipativă, permanent negativă, reprezintă pierderea de energie datorată amortizării oscilației.

Un alt aspect legat de oscilatorul liniar îl reprezintă situația când elementul elastic este format din mai multe arcuri diferite, legate în serie sau în paralel. Acestea pot fi înlocuite formal printr-un singur arc având o constantă elastică echivalentă, notată k_{ech} .

La montarea în serie (fig.24.2, a) forța elastică solicită în mod egal ambele arcuri, deformațiile lor sunt însă diferite; suma acestora este deformația totală. Ținând cont și de relația între forța elastică și deformație rezultă:

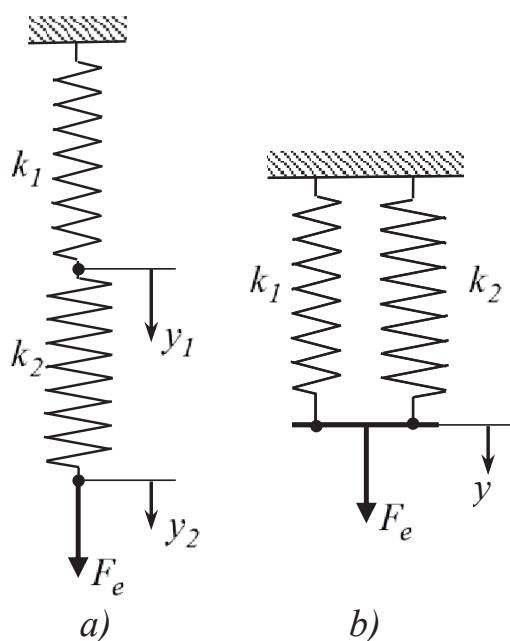


Fig.24.2

$$y = y_1 + y_2 \rightarrow \frac{F_e}{k_{ech}} = \frac{F_e}{k_1} + \frac{F_e}{k_2} \quad (24.20)$$

Se obține în continuare:

$$\frac{1}{k_{ech}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \rightarrow k_{ech} = \frac{k_1 + k_2}{k_1 k_2} \quad (24.21)$$

Pentru cazul a n arcuri legate în serie, relația de mai sus se generalizează:

$$\frac{1}{k_{ech}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{k_i} \quad (24.22)$$

Forța elastică se distribuie cu valori diferite la arcurile montate în paralel (fig.24.2, b); deformația lor este însă aceeași:

$$F_e = F_1 + F_2 \rightarrow k_{ech} y = k_1 y + k_2 y \quad (24.23)$$

Se obține:

$$k_{ech} = k_1 + k_2 \quad (24.24)$$

Generalizarea montării mai multor arcuri în paralel conduce la relația:

$$k_{ech} = \sum_{i=1}^n k_i \quad (24.25)$$

24.3 Sisteme cu un grad de libertate

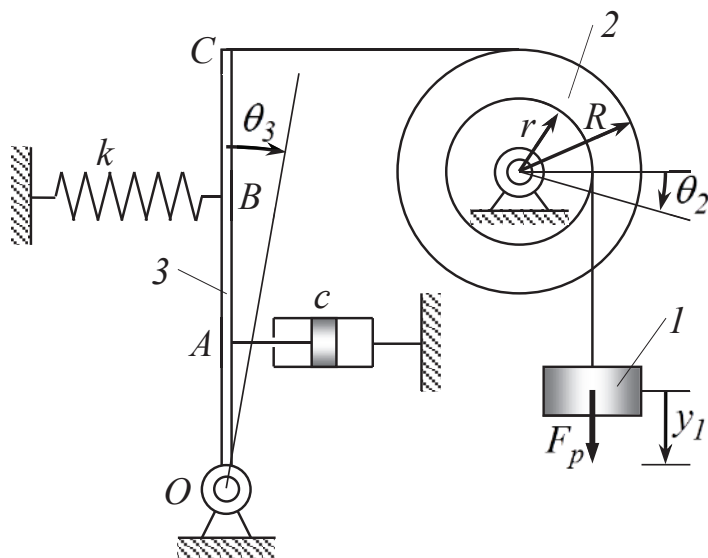


Fig.24.3

Problema 24.1 Se consideră sistemul din fig.24.3 reprezentat în poziția de echilibru.

Date:

Corp 1: $m_1 = m$

Corp 2: $m_2 = 2m, r, R = 2r,$

$$J_2 = 4mr^2$$

Corp 3: $m_3 = 3m, OC = l = 6r$

$$OA = AB = BC = l/3 = 2r$$

Forța perturbatoare: $F_p = F_0 \cos pt$

($F_0 = \text{const.}, p = \text{const.}$)

Condiții inițiale (la $t = 0$):

$$y_1 = y_0, \quad \dot{y}_1 = v_0$$

Cerute: Pentru situația în care sistemul execută mici oscilații, să se determine:

- ecuația diferențială a mișcării pentru oscilația liberă neamortizată;
- pulsația proprie a oscilatorului, perioada și frecvența oscilațiilor;
- legea de mișcare pentru cazul oscilației libere neamortizată;
- ecuația diferențială a mișcării în cazul oscilației forțate cu amortizare.

Rezolvare: Drept coordonată generalizată se consideră deplasarea corpului I , respectiv $q = y_1$ și $\dot{q} = v_1 = \dot{y}_1$. Ecuația Lagrange are în acest caz forma generală:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{y}_1} \right) - \frac{\partial E}{\partial y_1} = Q \quad (24.26)$$

Tabelul cinematic are configurația următoare:

Nr.	T/R	Deplasări	Viteze
1	T	y_1	$v_1 = \dot{y}_1$
2	R	$\theta_2 = y_1/r$	$\omega_2 = v_1/r$
3	R	$\theta_3 = y_1/3r$	$\omega_3 = v_1/3r$

Energia cinetică se calculează pentru fiecare corp în modul următor:

$$E_1 = \frac{1}{2} m v_1^2 \quad (24.27) \quad E_2 = \frac{1}{2} J_2 \omega_2^2 = 2 m v_1^2 \quad (24.28)$$

$$E_3 = \frac{1}{2} J_3 \omega_3^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{m_3 l^2}{3} \right) \omega_3^2 = 2 m v_1^2 \quad (24.29)$$

Energia cinetică totală este:

$$E = E_1 + E_2 + E_3 = \frac{9}{2} m v_1^2 = \frac{9}{2} m \dot{y}_1^2 \quad (24.30)$$

Derivatele acesteia sunt:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{y}_1} \right) = 9 m \ddot{y}_1 \quad \frac{\partial E}{\partial y_1} = 0 \quad (24.31)$$

Pentru cazul oscilației libere fără amortizare, forța generalizată este:

$$Q = Q_1 = \frac{\partial U_{arc}}{\partial y_1} + \frac{\partial U_{bara}}{\partial y_1} \quad (24.32)$$

Pe baza celor arătate în capitolul precedent, nu se ia în considerare greutatea corpului I . Pornind de la relația (24.7) se fac pentru arc următoarele calcule:

$$x_B = OB \cdot \theta_3 = \frac{4}{3} y_1 \quad (24.33) \quad U_{arc} = -\frac{1}{2} k x_B^2 = -\frac{8}{9} k y_1^2 \quad (24.34)$$

$$\frac{\partial U_{arc}}{\partial y_1} = -\frac{16}{9} k y_1 \quad (24.35)$$

Pentru funcția de forță a barei 3 se pornește de la relația (23.58):

$$U_{bara} = G_3 \frac{l}{2} (1 - \cos \theta_3) = 9 m g r (1 - \cos \theta_3) \quad (24.36)$$

Această relație se adaptează pentru cazul micilor oscilații luând numai primii doi termeni din dezvoltarea în serie a funcției trigonometrice *cosinus*, respectiv:

$$\cos \theta_3 = 1 - \frac{1}{2} \theta_3^2 \quad (24.37)$$

$$U_{bara} = \frac{9}{2} m g r \theta_3^2 = \frac{1}{2} \frac{m g}{r} y_1^2 \quad (24.38) \quad \frac{\partial U_{bara}}{\partial y_1} = \frac{m g}{r} y_1 \quad (24.39)$$

Forța generalizată (24.32) devine:

$$Q_1 = \left(-\frac{16}{9}k + \frac{mg}{r} \right) y_1 \quad (24.40)$$

Se fac în continuare înlocuirile în relația (24.26) și se ordonează termenii:

$$\ddot{y}_1 + \frac{1}{9} \left(\frac{16}{9} \frac{k}{m} - \frac{g}{r} \right) y_1 = 0 \quad \rightarrow \quad \ddot{y}_1 + \omega^2 y_1 = 0 \quad (24.41)$$

Se recunoaște ecuația generală a unei oscilații libere neamortizată (cap.14.2). În această ecuație:

$$\omega = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{16}{9} \frac{k}{m} - \frac{g}{r}} \quad (24.42)$$

reprezintă pulsația proprie a micilor oscilații ale sistemului dat. Perioada și frecvența acestor oscilații sunt date de relațiile:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (24.43) \quad f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad (24.44)$$

Legea de mișcare a sistemului, obținută prin integrarea ecuației (24.41), este o oscilație armonică descrisă de relațiile:

$$\begin{cases} y_1 = A \sin(\omega t + \varphi) \\ v_1 = \dot{y}_1 = A \omega \cos(\omega t + \varphi) \end{cases} \quad (24.45)$$

Pe baza relațiilor (14.19), în funcție de condițiile inițiale, amplitudinea și faza acestor oscilații au expresiile:

$$A = \sqrt{y_0^2 + (v_0/\omega)^2} \quad (24.46) \quad \varphi = \arctg(y_0\omega/v_0) \quad (24.47)$$

Funcția disipativă se calculează în funcție de viteza punctului A :

$$v_A = \omega_3 OA = \frac{2}{3} v_1 = \frac{2}{3} \dot{y}_1 \quad (24.48) \quad D = -\frac{1}{2} c v_A^2 = -\frac{2}{9} c v_1^2 = -\frac{2}{9} c \dot{y}_1^2 \quad (24.49)$$

Forța generalizată corespunzătoare funcției disipative va fi:

$$Q_2 = \frac{\partial D}{\partial \dot{y}_1} = -\frac{4}{9} c \dot{y}_1 \quad (24.50)$$

Lucrul mecanic al forțelor neconservative și forța generalizată corespunzătoare se calculează numai pentru forța perturbatoare aplicată corpului I :

$$L = F_p y_1 \quad (24.51) \quad Q_3 = \frac{\partial L}{\partial y_1} = F_p = F_0 \cos pt \quad (24.52)$$

În cazul oscilației forțate cu amortizare, forța generalizată totală este:

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = \left(-\frac{16}{9}k + \frac{mg}{r} \right) y_1 - \frac{4}{9} c \dot{y}_1 + F_0 \cos pt \quad (24.53)$$

Ecuația diferențială a mișcării se obține făcând înlocuirile în relația (24.26):

$$\ddot{y}_1 + \frac{4}{81} \frac{c}{m} \dot{y}_1 + \frac{1}{9} \left(\frac{16}{9} \frac{k}{m} - \frac{g}{r} \right) y_1 = \frac{F_0}{9m} \cos pt \quad (24.54)$$

Modul în care decurge oscilația depinde de datele constructive și funcționale care intervin în această ecuație.

24.4 Sisteme cu mai multe grade de libertate

La sistemele oscilante cu mai multe grade de libertate se pot pune în evidență o serie de aspecte noi. Ele vor fi evidențiate analizând un sistem simplu, cu două grade de libertate, prezentat în continuare.

Problema 24.2 Se consideră sistemul din fig.24.4 care execută mici oscilații în raport cu poziția de echilibru; se neglijează frecările dintre corpuri și suprafața de sprijin orizontală. Corpul 2 se rostogolește fără alunecare.

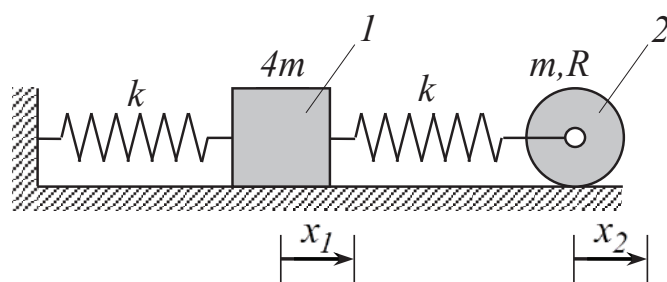


Fig.24.4

Date: m, R, k

$$m_1 = 4m, \quad m_2 = m$$

$$J_2 = mR^2 / 2 \quad \omega_2 = v_2 / R$$

Cerute:

- pulsațiile proprii,
- modurile proprii de vibrație,
- ecuația generală de mișcare.

Rezolvare: Drept coordonate generalizate se consideră deplasările celor două corpuri, respectiv x_1 și x_2 . Cele două ecuații Lagrange vor alcătui sistemul format din ecuațiile:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{x}_1} \right) - \frac{\partial E}{\partial x_1} = \frac{\partial U}{\partial x_1} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{x}_2} \right) - \frac{\partial E}{\partial x_2} = \frac{\partial U}{\partial x_2} \quad (24.55)$$

Energia cinetică a oscilatorului este:

$$E = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{2} J_2 \omega_2^2 = 2m\dot{x}_1^2 + \frac{3}{4} m\dot{x}_2^2 \quad (24.56)$$

Funcția de forță se referă în acest caz numai la cele două arcuri identice:

$$U = -\frac{1}{2} kx_1^2 - \frac{1}{2} k(x_2 - x_1)^2 = -kx_1^2 - \frac{1}{2} kx_2^2 + x_1x_2 \quad (24.57)$$

Derivatele parțiale din sistem sunt:

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{x}_1} = 4m\dot{x}_1 \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{x}_1} \right) = 4m\ddot{x}_1 \quad \frac{\partial E}{\partial x_1} = 0 \quad \frac{\partial U}{\partial x_1} = -2kx_1 + kx_2 \quad (24.58)$$

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{x}_2} = \frac{3}{2} m\dot{x}_2 \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{x}_2} \right) = \frac{3}{2} m\ddot{x}_2 \quad \frac{\partial E}{\partial x_2} = 0 \quad \frac{\partial U}{\partial x_2} = -kx_2 + kx_1 \quad (24.59)$$

Ecuațiile Lagrange (24.55) devin:

$$\begin{cases} 4m\ddot{x}_1 + 2kx_1 - kx_2 = 0 \\ \frac{3}{2} k\ddot{x}_2 + kx_2 - kx_1 = 0 \end{cases} \quad (24.60)$$

S-a obținut un sistem de două ecuații diferențiale de ordinul II, omogene, cu coeficienți constanți. Pentru integrarea acestuia se pornește de la soluții de forma unor oscilații armonice:

$$x_1 = A \sin(\omega t + \varphi) \quad x_2 = B \sin(\omega t + \varphi) \quad (24.61)$$

în care A și B sunt amplitudinile acestora iar ω reprezintă pulsația proprie. Aceste expresii, împreună cu derivatele lor de ordinul II:

$$\ddot{x}_1 = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi) \quad \ddot{x}_2 = -B\omega^2 \sin(\omega t + \varphi) \quad (24.62)$$

se introduc în sistemul de mai sus. După efectuarea simplificărilor și ordonarea termenilor rezultă:

$$\begin{cases} (2k - 4m\omega^2) \cdot A - k \cdot B = 0 \\ -k \cdot A + (k - \frac{3}{2}m\omega^2) \cdot B = 0 \end{cases} \quad (24.63)$$

Sistemul obținut este liniar și omogen în raport cu amplitudinile A și B . Pentru ca acesta să admită soluții reale (soluțiile nule ar corespunde absenței oscilațiilor), este necesar ca determinantul coeficienților să fie nul.

$$\begin{vmatrix} 2k - 4m\omega^2 & -k \\ -k & k - \frac{3}{2}m\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (24.64)$$

Din această condiție rezultă relația:

$$6m^2\omega^4 - 7km\omega^2 + k^2 = 0 \quad (24.65)$$

care reprezintă *ecuația pulsațiilor proprii* pentru sistemului oscilant considerat. Aceasta este o ecuație bipatrată cu rădăcinile:

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{7km \pm \sqrt{49k^2m^2 - 24k^2m^2}}{12m^2} = \frac{(7 \pm 5)km}{12m^2} \quad (24.66)$$

Rezultă în final:

$$\omega_1 = +\sqrt{\frac{k}{m}} \quad \omega_2 = +\sqrt{\frac{1}{6} \frac{k}{m}} \quad (24.67)$$

Pulsațiile proprii sunt mărimi strict pozitive, astfel că deși ecuația pulsațiilor proprii (24.65) este de gradul 4 se obțin numai două soluții.

Se poate observa că valorile pulsațiilor obținute depind numai de caracteristicile constructive ale sistemului oscilant (de aici derivă și denumirea de *pulsații proprii*). Se mai poate constata că numărul pulsațiilor proprii ale unui sistem este egal cu numărul gradelor sale de libertate (două în cazul acestei aplicații). Atunci când sistemul oscilează cu una dintre pulsațiile proprii, se spune că se află într-un *mod propriu de oscilație*; vor exista în consecință atâtea moduri proprii câte pulsații proprii, respectiv grade de libertate are sistemul.

Ecuațiile (24.63) permit stabilirea unui raport între amplitudinile A și B . Luând, de exemplu, prima ecuație se poate calcula raportul:

$$\mu = \frac{B}{A} = \frac{2k - 4m\omega^2}{k} \quad (24.68)$$

Se înlocuiesc valorile pulsațiilor proprii obținute mai sus:

$$\mu_1 = \frac{B_1}{A_1} = \frac{2k - 4m\omega_1^2}{k} = -2 \quad \mu_2 = \frac{B_2}{A_2} = \frac{2k - 4m\omega_2^2}{k} = \frac{4}{3} \quad (24.69)$$

Aceleași valori se obțin dacă se utilizează cea de a doua ecuație (24.63). Rapoartele μ_1 și μ_2 se numesc *coeficienți de distribuție*.

Cu valorile astfel determinate se pot scrie, pornind de la soluțiile inițiale (24.61), ecuațiile corespunzătoare fiecărui mod de oscilație:

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) \\ x_2^{(1)} = B_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) = \mu_1 A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) \end{cases} \quad (24.70)$$

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2) \\ x_2^{(2)} = B_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2) = \mu_2 A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases} \quad (24.71)$$

Relațiile corespunzătoare fiecăruia din modurile proprii reprezintă câte o soluție particulară a sistemului de ecuații diferențiale (24.60) de la care s-a pornit. Soluția generală se obține pe principiul suprapunerii efectelor, respectiv prin însumarea soluțiilor particulare:

$$\begin{cases} x_1 = x_1^{(1)} + x_1^{(2)} = A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2) \\ x_2 = x_2^{(1)} + x_2^{(2)} = \mu_1 A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + \mu_2 A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases} \quad (24.72)$$

Introducerea coeficienților de distribuție permite reducerea numărului constantelor de integrare care trebuie determinate pe baza condițiilor inițiale. La ecuațiile de mai sus se adaugă și cele ale derivatelor de ordinul 1:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 \omega_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \omega_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ \dot{x}_2 = \mu_1 A_1 \omega_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \mu_2 A_2 \omega_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases} \quad (24.73)$$

Pentru sistemul dat condițiile inițiale se referă la valorile $(x_1)_0, (\dot{x}_1)_0, (x_2)_0, (\dot{x}_2)_0$ iar necunoscutele sunt în număr egal, respectiv $A_1, A_2, \varphi_1, \varphi_2$. Determinarea efectivă se poate face fie algebric fie utilizând un program de calcul.

S-a arătat mai sus că pulsațiile proprii ale unui oscilator cu mai multe grade de libertate și modurile proprii de oscilație sunt caracteristicile constructive ale unui oscilator, dependente de masele și elementele elastice din configurația lui. Determinarea acestora pe cale analitică sau experimentală este importantă în special în cazul oscilațiilor forțate, atunci când pulsația forței perturbatoare devine egală cu vreuna din pulsațiile proprii. În acest caz poate interveni fenomenul de rezonanță, cu efectul negativ de amplificare prezentat anterior.